ÇÖZÜMLER

DEĞERLENDİREN : CEM TEZER*

A46. $p > 3$ bir asal sayı ise $p^2 + 2$ nin asal olamayacağını gösteriniz (H. Demir).

Çözüm : 3 ten büyük her p asal sayısı, ya $p = 3n + 1$, veyahut da $p = 3n + 2$ şeklinde yazılabilir. Böylece birinci halde $p^2 + 2 = 9n^2 + 6n + 3$ ikinci halde de $p^2 + 2 = 9n^2 + 6n + 6$ olup $p^2 + 2$ daima 3 ün katıdır. (p asal olsun veya olmasın, 3 e bölünmeyen bir sayı olduğu müddetçe $p^2 + 2$ nin daima 3 e bölünebildiğine dikkat ediniz. Demek ki bu pek iyi inşa edilmemiş bir problem...)

A47. $$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right) = \ln 3$$
olduğunu gösteriniz.

Çözüm :

$$\begin{aligned} \ln(1 + \frac{2}{n(n+3)}) &= \ln\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)} \\ &= \ln(\frac{n+2}{n}) - \ln(\frac{n+3}{n+1}) \end{aligned}$$

olduğu hatırlanarak

$$\sum_{n=1}^{N} \ln(1 + \frac{2}{n(n+3)}) = \ln 3 - \ln(\frac{N+3}{N+1})$$

buradan da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{2}{n(n+3)}) = \ln 3$$

bulunur.

A48. $n - 1$ ve $n + 1$, 10 dan büyük iki asal sayı olsun. $n^3 - 4n$ sayısının daima 120 ye bölündüğünü gösteriniz. (G.E. Andrews)

Çözüm : Önce $120 = 2^3.3.5$ ve $n^3 - 4n = n(n-2)(n+2)$ olduğunu hatırlayalım. Ardışık çift sayılar olan $n-2$, n, $n+2$ nin her biri 2 ye, en az bir tanesi de 3 e bölünebilir. Diğer taraftan $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$ ardışık sayılarından bir tanesi 5 e bölünebilmelidir. $n-1$, $n+1$ asal olduğuna ve 5 e eşit olmadığına göre $n-2$, n, $n+2$ sayılarından biri 5 e bölünebilmelidir. Demek ki $n^3 - 4n$, 120 ye bölünür. (Aslında dikkatli okuyucunun farketmiş olacağı gibi $n \geq 2$ olmak üzere, $n-1$ ve $n+1$ sayıları 5 e bölünmeyen sayılar olduğu takdirde, $n^3 - 4n$ daima 240 ın bir katıdır.)

A49. Bir kenarının ortanoktası ve diğer iki kenarına ait yüksekliklerin ortanoktaları verilen üçgeni pergel ve cetvelle çiziniz. (H. Demir)

Çözüm : Bir ABC üçgeninde $[BC]$ kenarının ortanoktası D, sırasıyla B ve C köşelerine ait yüksekliklerin ayakları E ve F, $[BE]$ ve $[CF]$ nin ortanoktaları da U ve V olsun. Ortosantrı, yani üç yüksekliğin kesiştiği noktayı her zamanki gibi H ile gösterelim. D, U, V verildiği takdirde ABC üçgeninin nasıl çizileceği soruluyor. $\sphericalangle VDU = \sphericalangle BAC$ olduğundan D, U, V noktaları doğrudaş olarak verilemez. DV, AB ye, DU da AC ye paralel olduğundan H, sırasıyla DU ya U dan ve DV ye V den çizilen u ve v dikmelerinin kesişim noktasıdır. W, $[EF]$ nin ortanoktası ise, $UDVW$ bir paralelkenar olur. Bir köşesi H de, H den geçen kenarları u ve v doğrusu üzerinde, merkezi de W da olan bir paralelkenarın H ye komşu köşeleri E ve F dir. Demek ki E noktası H nin W ya göre bakışığından v ye çizilen paralel ile u nun kesişimi olarak elde edilebilir. Benzer şekilde F. En nihayet HE ye E den, HF ye de F den çizilen diklerin kesişim noktası olarak A elde edilir. Gerisi kolay.

A50. $$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$$

Çözüm :

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

polinom özdeşliğinin iki tarafının birer defa türevi alınarak ve $x = 1$ yazılarak

$$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k$$

elde edilebilir. Gene aynı özdeşliğin, bu sefer iki defa türevini almak ve $x = 1$ koymak suretiyle

$$n(n-1)2^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1)$$

* ODTÜ Matematik Bölümü Öğretim Üyesi

$$= \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}k^2 - \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}k$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2 - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2 - n2^{n-1}$$

buradan da

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2 = n(n+1)2^{n-2}$$

elde edilir.

Y46. Odakları F, F' olan bir elips ve bu elipsin F den geçen bir AB kirişi verilsin. A ve B den elipse çizilen normaller N noktasında kesişsin. N den FF' ne çizilen paralelin $[AB]$ doğru parçasının orta noktasından geçtiğini gösteriniz.

Çözüm : Yarıçapı elipsin büyük çapına eşit, F merkezli bir γ çemberi alalım. AB doğrusu γ yı P ve Q noktalarında kessin. A ve P nin F nin aynı tarafında kaldığını farzedelim. A, $[PF']$ nü ortadikmesi ile PQ nun kesişim noktasıdır. (Neden ?) A daki teğet de $[PF']$ nün ortadikmesidir. (Neden ?) Demek ki A noktasındaki normal PF' ye A dan çizilen paralel, B noktasındaki normal de QF' ye B den çizilen paralel olmalıdır. Bu normaller N de kesişiyor. Demek ki N den FF' ne yani PQF' üçgeninin F' den geçen kenarortayına çizilen paralel, ABN üçgeninin N den geçen kenarortayı olmalıdır.

Y47. Bir üçgende içteğet çemberin merkezi I, yüksekliklerin kesişim noktası H ("ortosantr"), çevrel çember merkezi de O olsun. Üçgenin kenar uzunlukları a, b, c, içteğet çemberin yarıçapı da r ise IOH üçgeninin alanının

$$\left|\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{8r}\right|$$

olduğunu gösteriniz. (W.J. Blundon)

Çözüm : Vektör gösterimi kullanacağız. Her zamanki gibi $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ ve $2s = a+b+c$ yazalım.Çevrelçember yarıçapını R ile gösterelim. O yu yani çevrel çember merkezini başlangıç noktası aldığımız, üçgenin ağırlık merkezini de G ile gösterdiğimiz takdirde

$$O = \vec{0}$$
$$G = \frac{1}{3}(A+B+C)$$
$$H = A+B+C \qquad \text{(Neden ?)},$$
$$I = \frac{1}{2s}(aA+bB+cC) \qquad \text{(Neden ?)}$$

bulunur. Herhangi bir XYZ üçgeninin (yönlü) alanını Δ_{XYZ} ile gösterirsek,

$$\begin{aligned}
\Delta_{IOH} = \Delta_{OHI} &= \frac{1}{2}\det[H, I] \\
&= \frac{1}{2}\det[A+B+C, \frac{1}{2s}(aA+bB+cC)] \\
&= \frac{1}{4s}\det[A+B+C, aA+bB+cC] \\
&= \frac{1}{4s}[(c-b)\det(B,C) + (a-c)\det(C,A) + (b-a)\det(A,B)] \\
&= \frac{1}{2s}[(c-b)\Delta_{OBC} + (a-c)\Delta_{OCA} + (b-a)\Delta_{OAB}] \\
&= \frac{R^2}{4s}[(c-b)\sin 2A + (a-c)\sin 2B + (b-a)\sin 2C]
\end{aligned}$$

ve nihayet

$$|\Delta_{IOH}| = |\frac{R}{4s}[(c-b)a\cos A + (a-c)b\cos B + (b-a)c\cos C]|$$

elde edilir.

Şimdi $a \to b \to c \to a$ Şeklindeki bütün çembersel permütasyonlar üzerinden toplamayı

$$\sum^{*}$$

ile göstererek,(mesela

$$\sum^{*} a = a+b+c$$

veya

$$\sum^{*} ab^2 = ab^2 + bc^2 + ca^2$$

gibi) diğer taraftan da

$$|\Delta_{ABC}| = |\frac{1}{2}bc\sin A| = \frac{1}{2}bc(\frac{a}{2R}) = \frac{abc}{4R}$$

ve

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = a^2$$

olduğu da hatırlanarak ve $|\Delta_{ABC}|$ yerine sadece Δ yazarak,

$$\begin{aligned}
|\Delta_{IOH}| &= \frac{abc}{16\Delta s}|\sum^{*} a(b-c)\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}| \\
&= \frac{1}{32\Delta s}|\sum^{*} a^2(b-c)(b^2+c^2-a^2)| \\
&= \frac{1}{32\Delta s}|\sum^{*} a^2(b-c)(4s(s-a)-2bc)| \\
&= \frac{1}{8\Delta s}|\sum^{*} a^2(b-c)s(s-a)| \\
&= \frac{1}{16\Delta}|\sum^{*} a^2(b-c)(b+c-a)| \\
&= \frac{1}{16\Delta}|\sum^{*} a^3(b-c)|
\end{aligned}$$

buradan da $\Delta = rs$ olduğu hatırlanarak ve

$$\sum^{*} a^3(b-c) = (a+b+c)(b-c)(c-a)(a-b)$$

özdeşliği gözönüne alınarak küçük bir hesapla

$$|\Delta_{IOH}| = |\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{8r}|$$

elde edilir.

Y48. İkizkenar bir ABC üçgeninin (B ve C açıları eşit!) A tepe noktasından geçen değişken bir doğru $[AB]$ kenarını D noktasında, çevrel çemberin A köşesi karşısındaki yayını da E noktasında kessin. $[DE], [DB]$ doğruparçalarına ve çevrel çembere içerden değen çemberin yarıçapı r_1, $[DE], [DC]$ doğru parçalarına ve çevrel çembere içerden değen çemberin yarıçapı r_2 olsun. $\ell = |AD|$ ise $\ell + \sqrt{r_1 r_2}$ nin sabit, yani değişken AD doğrusunun konumundan bağımsız olduğunu gösteriniz, (H. Demir)

Çözüm : ABC nin çevrel çemberine α, problemde sözkonusu edilen r_1, r_2 yarıçaplı çemberlere de β_1, β_2 diyelim. β_1, β_2 nin BC ye değdikleri noktalar K_1, K_2 olsun. A merkezli ve kuvveti $|AB|^2 = |AC|^2$ olan bir evirtim altında B ve C noktaları sabit kalırken, α çemberi ve BC doğrusu yer değiştirirler. Bundan β_1, β_2 çemberlerinin kendi kendilerinin evrikleri olduğu ortaya çıkar. Demek ki A merkezli ve $|AB| = |AC|$ yarıçaplı çember β_1 ve β_2 ye dik olmalı, yani A dan β_1 ve β_2 çemberlerine çizilen teğetler eşit uzunlukta olmalıdır. Buradan β_1 ve β_2 in AD doğrusuna aynı bir E noktasında değdikleri ve $|AB| = |AC| = |AE|$ bulunur. Küçük bir hesapla

$$|DE| = |DK_1| = |DK_2| = \sqrt{r_1 r_2}$$

buradan da

$$\ell + \sqrt{r_1 r_2} = |AD| + |DE| = |AE| = |AB| = \text{sabit}$$

bulunur.

Y49. $\ldots\Gamma_n, \Gamma_{n+1}, \Gamma_1, \Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n1}, \Gamma_n\ldots$ çemberler dizisinde ardışık iki çember birbirlerine dıştan teğet ve dizinin bütün çemberleri ölçüsü 2α olan bir açının kenarlarına teğettir. Γ_n in yarıçapına r_n ve $\rho_n = \frac{r_n}{r_0}$ yazarsak $\rho_{m+n} = \rho_m \rho_n$ olduğunu gösteriniz. (H. Demir)

Çözüm : Herhangi bir $n \in \mathbf{Z}$ için Γ_{n+1} ve Γ_n i gözönüne alalım. Pisagor teoreminden kolaylıkla

$$\frac{(r_{n+1}+r_n)^2 - (r_{n+1}-r_n)^2}{(r_{n+1}+r_n)^2} = \cos^2\alpha$$

bulunur. Demek ki $\xi = r_{n+1}/r_n$ oranı

$$\frac{4\xi}{(1+\xi)^2} = \cos^2\alpha$$

yı yani

$$\xi^2 + 2(1 - \frac{2}{\cos^2\alpha})\xi + 1 = 0$$

veyahut da

$$\xi^2 + 2(\frac{1+\sin^2\alpha}{1-sin^2\alpha})\xi + 1 = 0$$

denklemini sağlamalı yani

$$\xi = \frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{(1 \pm \sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha}$$

olmalıdır. Γ_n çemberlerinin $n \in \mathbf{Z}$ ile beraber büyüdüklerini farz ederek $+$ işaretini alabiliriz. Bu suretle

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$$

ve en nihayet

$$\rho_n = \frac{r_n}{r_0} = (\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha})^n$$

buradan da herhangi $m, n \in \mathbf{Z}$ için

$$\rho_m \rho_n = \rho_{m+n}$$

elde edilir.

Y50. $$\sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^k}{k}\binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

özdeşliğini ispat ediniz.

Çözüm : Bu problemi, hem dergimizin kapağında hem de problem sayfamızda yanlış olarak yayınladığımız için okuyucularımızdan özür diliyoruz. Özdeşliğin okuyucularımızın tahmin etmekte güçlük çekmediklerine inandığımız doğru şeklini ve ispatını sunuyoruz :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{k-1} &= (\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^k - 1)x^{-1} \\ &= \frac{(1-x)^n - 1}{x}\end{aligned}$$

polinom özdeşliğinin iki tarafı x e göre 0 dan 1 e kadar integre edilerek

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{k} = \int_0^1 \frac{(1-x)^n - 1}{x}dx$$

ve $t = 1 - x$ ikamesiyle de

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{k} &= -\int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}dt \\ &= -\int_0^1 (1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1})dt \\ &= -(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})\end{aligned}$$

elde edilir.