# SAYILAR TEORİSİNDE ÇÖZÜLEMEMİŞ PROBLEMLER

EMRE ALKAN*

Matematikte Sayılar Teorisine henüz fethedilememiş bir kale gözüyle bakılabilir. Bu yazıda matematikçileri halen uğraştırmakta olan bazı problemleri tanıtıp bunlara göre kolay olan örnekler yapacağız.

$n > 10$ olmak üzere $n! = a!b!$ olacak şekilde birden büyük $a, b$ tamsayıları varsa $a = (n-1)!$ ve $b! = n$ olmalıdır. $n > 10$ olmasının nedeni ise $n \leq 10$ iken $10! = 6! \cdot 7!$ eşitliğinin doğru olmasıdır. Bu henüz sonuçlandırılamamış önermelerden biridir. Bu önermeyle ilgili olarak P. Erdös'ün ulaştığı bir sonuç ise şudur:
*$1 < a < b < n$ olmak üzere eğer $n! = a! \cdot b!$ ise öyle bir $c$ sabiti vardır ki $n - b < c \log\log n$ eşitsizliği sağlanır [1].*

$n$ bir doğal sayı olmak üzere $2^n - 1$ şeklinde yazılabilen asal sayılar sonsuz sayıda mıdır? Veya hangi $n$ ler için $2^n - 1$ asaldır? Bu tip asal sayılara Mersenne sayıları denilmektedir. $M_p = 2^p - 1$ bir Mersenne sayısı olsun. 1876'da Lucas $M_p$ nin asal olup olmadığına karar veren bir yöntem buldu ve bu sayede $M_{127} = 2^{127} - 1$ sayısının asal olduğunu gösterdi. Pervusin ve Seelhoff 1886'da $M_{61}$'in asal olduğunu gösterdiler. Bu sayı 1951'e kadar bilinen en büyük asal sayı olma özelliğini korudu. Aynı yıl Ferrier bilgisayar kullanmaksızın $(2^{148} + 1)/17$ sayısının asal olduğunu gösterdi. Sonraları Midler ve Wheeler $180 \cdot M_{127}^2 + 1$ sayısının asal olduğunu bilgisayar yardımıyla gösterdiler.
$p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 9689, 9941, 11213, 19937, 21701$ değerleri için $M_p$ asal, $p \leq 21700$ olacak şekilde diğer $p$ değerleri için ise asal değildir. $M_{21701}$, 6533 basamaklı bir asal sayıdır [2].

Sayılar Teorisinde asal sayılarla ilgili olan problemler belki de en ilginçleridir. Problemlere geçmeden önce aşağıdaki tabloyu inceleyelim.

$\pi(x)$, $x$ ten küçük asal sayıların sayısıdır.

| $x$ | $10^3$ | $10^4$ | $5.10^4$ |
|---|---|---|---|
| $\pi(x)$ | 168 | 1229 | 5133 |

| $x$ | $10^5$ | $5.10^5$ | $10^6$ |
|---|---|---|---|
| $\pi(x)$ | 9592 | 41538 | 78498 |

| $x$ | $2.10^6$ | $5.10^6$ | $10^7$ | $2.10^7$ |
|---|---|---|---|---|
| $\pi(x)$ | 148933 | 348513 | 664579 | 1270607 |

| $x$ | $9.10^7$ | $10^8$ | $10^9$ |
|---|---|---|---|
| $\pi(x)$ | 5216954 | 5761455 | 50847534 |

Bu tablodan şunlar gözlenebilir:

i) $x \to \infty$, iken $\pi(x) \to \infty$

ii) Hemen hemen tüm sayılar asal değildir, yani $x \to \infty$, $\frac{\pi(x)}{x} \to 0$.

Bu iki önermenin sade ispatlarını vereceğiz.

**Tanım:** (Asal polinom) $P(n)$ tamsayı katsayılı bir polinom olsun. Eğer $P(n)$, bir ve kendisinden farklı tamsayı katsayılı iki polinomun çarpımı olarak yazılamıyorsa $P(n)$ 'e bir asal polinom diyeceğiz.

Buradaki soru şudur: $P(n)$ bir asal polinomsa $n$ tamsayıları tararken $P(n)$ sonsuz sayıda asal değere sahip olur mu? Veya, öyle bir $P(n)$ asal polinomu bulunuz ki $n$ 'in yeterince büyük değerlerinden sonra $P(n)$ hiç bir zaman asal olmasın. Bununla ilgili şu teoremi verelim.

**Teorem.** Tamsayı katsayılı, sabit olmayan bir $P(n)$ polinomu her $n$ tamsayısı için veya belli bir sınırdan sonraki her $n$ tamsayısı için asal değerler alamaz.

**Kanıt.** $P_i$ ler asal olmak üzere belli bir $n$ değerinden sonra $P(n)$ in hep asal olduğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned} P(n) &= a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + \\ &\quad a_0 = p_1 \\ P(n+1) &= a_k (n+1)^k + a_{k-1}(n+1)^{k-1} \\ &\quad + \cdots + a_1(n+1) + a_0 = p_2 \end{aligned}$$

---

* Boğaziçi Üniversitesi, Matematik Bölümü öğrencisi

$$
\begin{aligned}
P(n+2) &= a_k(n+2)^k + a_{k-1}(n+2)^{k-1} \\
&\quad + \cdots + a_1(n+2) + a_0 = p_3 \\
&\quad \vdots
\end{aligned}
$$

Kolayca $2|(p_3 - p_1)$, $3|(p_4 - p_1)$, $4|(p_5 - p_1), \ldots$ olduğu gözlenebilir fakat er veya geç $p_1|(p_{p_1+1} - p_1)$ elde edilir ki $p_{p_1+1}$ asal olduğundan bu bir çelişkidir.

Buna karşılık sonlu sayıda ardışık $n$ değerleri için hep asal olan $P(n)$ polinomlarına rastlanmıştır. Mesela $n^2 - n + 41$, $0 \leq n \leq 41$ için hep asaldır. $n^2 - 79n + 1601 = (n-40)^2 + (n-40) + 41$, $0 \leq n \leq 79$ için hep asaldır [2].

**Teorem.** $x \to \infty$, $\pi(x) \to \infty$.

**Kanıt.** $n$ inci asal sayı $p_n$ olsun. Şu halde $(2.3.5\ldots\ p_n) + 1$ sayısı ya asaldır ya da $p_n$ den büyük bir asal çarpanı vardır. Bu fikir sayesinde $p_{n+1} < p_n^n + 1$ olduğu gözlenebilir. Öte yandan tümevarımla $p_n < 2^{2^n}$ olduğunu göstermek kolaydır. Şimdi bir $x$ gerçel sayısı alalım. $e^{e^{n-1}} \leq x \leq e^{e^n}$ ve $n \geq 4$ olsun. $n \geq 4$ iken $e^{e^{n-1}} > 2^{2^n}$ olduğundan $\pi(x) \geq \pi(e^{e^{n-1}}) \geq \pi(2^{2^n}) \geq n$ ($p_n < 2^{2^n}$ olduğu için) elde edilir. $x \leq e^{e^n}$ olduğundan $n \geq loglogx$ elde edilir. Şu halde $x \geq e^{e^3}$ için $\pi(x) \geq log\,log\,x$. $x < e^{e^3}$ için de $\pi(x) \geq log \log x$ olduğu kolayca gözlenebilir.

**Teorem.** $x \geq 2$ için $\pi(x) \geq log\,log\,x$.

Asal sayıların sonsuz çoklukta olduğuna dair ikinci kanıt Fermat sayılarını ele almaktadır. Her $n \geq 1$ doğal sayısı için $F_n = 2^{2^n} + 1$ şeklindeki sayılara Fermat sayıları denmektedir.

**Önönerme.** Herhangi iki Fermat sayısı aralarında asaldır.

**Kanıt.** $q|2^{2^n} + 1$ ve $q|2^{2^{n+k}} + 1, k \geq 1$ olsun. $q|2^{2^{n+k}} - 1$ olduğunu gösterelim. $2^{2^n} = x$ alırsak

$$\frac{x^{2^k} - 1}{x+1} = x^{2^k - 1} - x^{2^k - 2} + \cdots + x - 1$$

olduğundan gözlemimiz doğrudur. Böylece $q|2$ fakat $q$ tek olacağından $q = 1$ elde edilir.

Böylece asal sayıların sonsuz çoklukta olduğunu bir defa daha gözlemiş oluyoruz. Her Fermat sayısı ya asal olacak veya yeni bir asal sayının varlığına neden olacaktır. 2'nin asal olduğu gözönüne alınarak $p_{n+1} \leq 2^{2^n} + 1$ eşitsizliği gözlenebilir.

Fermat, $2^{2^n} + 1$ şeklindeki sayıların asal olduğunu düşünmüştü. Bunu destekleyen, $2^{2^1} + 1 = 5$, $2^{2^2} + 1 = 17$, $2^{2^3} + 1 = 257$, $2^{2^4} + 1 = 65537$ sayılarının asal olduğunu gözlemiş olmasıydı. Fakat 1732'de Euler, $F_5 = 2^{2^5} + 1 = (641)(6700417)$ olduğunu göstererek Fermat'ın hayalini sona erdirdi. $641|F_5$ olduğu şöyle gösterilebilir. $641 = 5^4 + 2^4 = 5.2^7 + 1$ dir. $5^4 + 2^4|5^4 \cdot 2^{28} + 2^{32}$ ve $5 \cdot 2^7 + 1|5^4 \cdot 2^{28} - 1$ olduğundan 641 bu iki sayının farkını yani $F_5$ i bölecektir [3].

1880'de Landry $F_6 = 2^{2^6} + 1 = (274177)(67280421310721)$ olduğunu gösterdi. $7 \leq n \leq 16$ ve

$$n = 18, 19, 23, 36, 38, 39, 55, 63, 73$$

değerleri için $F_n$ in asal olmadığı gösterilmiştir. $F_{14}$ 'ün çarpanları elde edilememiştir [2].

Asal sayıların sonsuz sayıda olduğunu diğer bir yolla kanıtlayalım: $2, 3, 5, 7, \ldots, p_j$ asal sayılarını ele alalım. $N(x)$, bir $x$ gerçel sayısından küçük ve asal çarpanlara ayrılışında sadece $2, 3, 5, 7, \ldots, p_j$ asal sayılarının göründüğü sayıların sayısını göstersin. $\alpha$ bu koşulları sağlayan bir sayı ise $\alpha = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdots p_j^{\alpha_j}$ olarak yazılabilmelidir. $\alpha$ yı şu şekilde yazalım. $\alpha = n^2 \cdot 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdots p_j^{\beta_j}$ burada $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_j \in \{0, 1\}$ olsun. $n \leq \sqrt{x}$ olduğu açıktır. Şu halde $N(x) \leq 2^j\sqrt{x}$ yazılabilir. Şimdi $p_j$ den büyük hiçbir asal sayı olmadığını kabul edelim. Bu durumda $N(x) = [x]$ olacağı açıktır. Kolayca $x \leq 2^j\sqrt{x}$ elde edilir ki bu eşitsizlik $x$ 'in yeterince büyük değerlerinden sonra sağlanmaz. Dolayısıyla asal sayılar sonsuz çoklukta olmalıdır.

Bu güzel ve sade fikir yardımıyla iki önemli sonucu daha göstereceğiz.

**Teorem.** (Euler) $\Sigma\frac{1}{p}$ toplamı ıraksaktır. Burada toplam tüm asal sayılar üzerindendir.

**Kanıt:** Toplamın yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\frac{1}{p_{j+1}} + \frac{1}{p_{j+2}} + \cdots < \frac{1}{2}$$

olacak şekilde bir $j$ indisi bulabiliriz. Şimdi bir $x$ gerçel sayısından küçük ve asal çarpanlara ayrılışında $2, 3, 5, \ldots, p_j$ asal sayılarının hiçbirinin bulunmadığı sayıların sayısına bakalım. Bir önceki kanıttaki fikir kullanılırsa bu tür sayıların sayısının en az $x - 2^j\sqrt{x}$ olduğu görülebilir. Baştaki eşitsizlikten kolayca,

$$\frac{x}{p_{j+1}} + \frac{x}{p_{j+2}} + \cdots < \frac{1}{2}x$$

elde edilir. Sol taraf açıkça $2, 3, 5, \ldots p_j$ asal sayılarının hiçbiri ile bölünemeyen sayıların sayısını fazladan sayar ($2, 3, 5, \ldots p_j$ ile bölünemeyen sayılar $p_{j+1}, p_{j+2}, \ldots$ ile bölünmek zorundadır.) Kolayca $x - 2^j\sqrt{x} < \frac{1}{2}x$ ve $x < 2^{j+1}\sqrt{x}$ elde edilir fakat bu eşitsizlik $x$ in yeterince büyük değerleri için sağlanmaz. Öyleyse toplam ıraksaktır.

**Teorem.** $\pi(x) \geq (log\, x)/2\, log\, 2$ ve $p_n \leq 2^{2n}$ 'dir. ($log, e$ tabanına göre alınmaktadır).

**Kanıt.** $p_j, x$ ten küçük olan en büyük asal sayı olsun. Aynı fikir kullanılarak kolayca $N(x) = [x]$ ve $x \leq 2^{\pi(x)}\sqrt{x}, x \leq 2^{2\pi(x)}, log\, x \leq \pi(x) 2\, log\, 2$ ve $\pi(x) \geq (log\, x)/2\, log\, 2$ elde edilir. $x = p_n$ olsun. $\pi(x) = n$ olacağından $p_n \leq 2^{2n}$ elde edilir.

$P(n) = n$ asal polinomunun $n$ doğal sayıları tararken sonsuz sayıda asal değer aldığını gördük. Daha genel bir teorem ise şöyle:

**Teorem:** (Dirichlet) $a$ pozitif bir tamsayı ve $a, b$ aralarında asal olmak üzere $an + b$ biçiminde sonsuz tane asal sayı vardır [2].

Şimdi önemli bir sonucun kanıtını verelim.

**Teorem.** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\pi(x)}{x} = 0$.

**Kanıt.** $x$ sayısını geçmeyen ve bir $a$ pozitif tamsayısıyla bölünebilen sayıların sayısı kolayca $[\frac{x}{a}]$ olacaktır. $\overline{w}(x, r)$ ile $x$ 'i geçmeyen ve $2, 3, 5, \ldots, p_r$ gibi ilk $r$ asal sayıyla bölenemeyen sayıların sayısını gösterelim. İçerme-Dışarma ilkesi yardımıyla

$$\overline{w}(x, r) = [x] - \sum_{1\leq i\leq r} [\frac{x}{p_i}] + \sum_{1\leq i<j<r} [\frac{x}{p_i p_j}] - \cdots$$

yazılabilir. $2, 3, 5, \ldots, p_r$ ile bölünemeyen sayıların hepsi asal olmayabilir (Mesela $p_{r+1}, p_{r+2}, \ldots$ ile bölünenler olabilir). Bundan dolayı, $\pi(x) \leq \overline{w}(x, r) + r$ yazılabilir. $\overline{w}(x, r)$ deki terim sayısı

$$\binom{r}{0} + \binom{r}{1} + \cdots + \binom{r}{r} = 2^r$$

dir. Bir an için tüm terimlerin tamsayı olduğunu kabul edip tam değerleri atalım. Bu $\overline{w}(x, r)$ de $2^r$ den kesin küçük bir artışa sebep olacaktır. Böylece

$$\pi(x) < x - \sum \frac{x}{p_i} + \sum \frac{x}{p_j p_j} - \cdots + r + 2^r$$

elde ederiz. Şimdi sağ tarafı ele alalım.

$$1 - \sum \frac{1}{p_i} + \sum \frac{1}{p_i p_j} - \cdots = \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

olduğu gözlenebilir. Şu halde

$$\pi(x) < x \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) + r + 2^r$$

$$< x \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) + 2^{r+1}$$

yazılabilir. Şimdi bir $\epsilon > 0$ alalım.

$$r \to \infty, \text{ iken } \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \to 0$$

olduğundan öyle bir $r(\epsilon)$ tamsayısı bulunabilir ki,

$$\prod_{i=1}^{r(\epsilon)} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) < \frac{1}{2}\epsilon$$

olsun. Ayrıca yeterince büyük bir $x$ değeri için $2^{r(\epsilon)+1} < \frac{1}{2}\epsilon x$ olacağı açıktır. Böylece $\pi(x) < \epsilon x$ elde ederiz. $\epsilon$ keyfi bir değer olduğundan sıfıra istenildiği kadar yaklaştırılabilir. Bu, kanıtı tamamlar.

**Not:** $6 = 3 + 3, 8 = 3 + 5, 10 = 5 + 5, 12 = 5 + 7, 14 = 7 + 7, 16 = 3 + 13, 18 = 5 + 13, 20 = 7 + 13, 22 = 3 + 19, 24 = 5 + 19, \ldots$. Bu eşitlikler şu fikri söyler gibi... Dörtten büyük her çift sayı iki tek asal sayının toplamı olarak yazılabilir. Bu ünlü Goldbach sanısıdır ve henüz sonuçlandırılamamıştır. Bu kanıtlanmış olsaydı, yediden büyük her tek sayının üç tek asal sayının toplamı olduğunu çıkarabilirdik, şöyle ki $n > 7$ bir tek sayı olsun. Şu halde $n - 3 > 4$ ve $n - 3$ çifttir. $p_1, p_2$ asal olmak üzere $n = 3 + p_1 + p_2$, yazılabilir.

Şimdi bu konuda yapılmış ilginç çalışmaları ve sonuçlarını verelim.

* 1937'de Vinogradov yeterince büyük her tek sayının üç asalın toplamı olduğunu gösterdi.

* $E(x)$ bir $x$ gerçel sayısından küçük ve iki asalın toplamı olarak yazılamayan çift sayıların sayısı olsun. Estermann, van der Corput, Chudakov $\lim_{x\to\infty} \dfrac{E(x)}{x} = 0$ olduğunu gösterdiler. Montgomery ve Vaughan daha da ileri giderek uygun bir $\epsilon > 0$ sayısı için, $\lim_{x\to\infty} \dfrac{E(x)}{x^{1-\epsilon}} = 0$ olduğunu gösterdiler. Vaughan her $n > 1$ tek sayısının 27 ve her $n > 1$ çift sayısının 26 asalın toplamı olduğunu gösterdi [2].

* $p_{n-1}, p_n$ ardışık asal sayılar olsun. $\min\{p_n - p_{n-1}\} = 2$ olduğu açıktır. Burada merak edilen $\lim_{n\to\infty} \{p_n - p_{n-1}\}$ ifadesidir.

* $n > 7$ ve $n! + 1$ bir tam kare olacak şekilde $n$ sayıları var mıdır? ($n = 4, 5, 7$ için

$n! + 1$ 'in tam kare olduğuna dikkat ediniz. M. Kraitchik, $n > 7$ ve $n! + 1$ bir tam kare ise $n > 1020$ olduğunu göstermiştir [4].

* Her $n$ doğal sayısı için $n^2$ ve $(n+1)^2$ arasında bir asal sayı var mıdır? [4]

* Her $n$ doğal sayısı için $n^2$ ve $n^2 + n$ arasında bir asal sayı var mıdır? [4].

* $2 = 1+1, 5 = 2^2+1, 257 = 4^4+1$ dışında $n^n + 1$ şeklinde asal sayılar var mıdır? [4].

* Son olarak kendi kendime uğraşırken aklıma gelen bir problemi veriyorum. Bu problemi incelediğim kaynaklarda göremedim.

$a^2 + b^2 = c^2 + 1$ ve $a, b, c$ asal olacak şekildeki üçlüler sonsuz sayıda mıdır?
$7^2 + 11^2 = 13^2 + 1, 11^2 + 13^2 = 17^2 + 1, 13^2 + 19^2 = 23^2 + 1, 23^2 + 29^2 = 37^2 + 1, 13^2 + 41^2 = 43^2 + 1, 29^2 + 29^2 = 41^2 + 1, 19^2 + 43^2 = 41^2 + 1, 19^2+43^2 = 47^2+1, 23^2+41^2 = 47^2+1$ örnekleri verilebilir.

Yazıyı örnek problemlerle bitirelim.

**Problem 1.** $log\,2$'nin sayısal değerini yaklaşık olarak bulmadan

$$2\,log\,2 < \prod_p \frac{p^2}{p^2-1}$$

olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:** $s > 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$$

olduğunu göstereceğiz. $p \geq 2$ olduğundan, $s > 1$ için

$$\frac{1}{1-p^{-s}} = 1 + p^{-s} + p^{-2s} + \cdots$$

yazılabilir. $p = 2, 3, 5, \ldots, P$ değerlerini aldığında

$$\prod_{p \leq P} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

hesaplandığında genel terim

$$2^{-a_2 s} \cdot 3^{-a_3 s} \cdots P^{-a_p s} = n^{-s},\ n = 2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdots P^{a_p}$$

şeklindedir. Bir $n$ sayısı tek türlü asal çarpanlarına ayrılabildiğinden, $P$ 'den büyük asal çarpanı olmayan her $n$ sayısı bu çarpımdan bir kez gelecektir. Böylece

$$\prod_{p \leq P} \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{(P)} \frac{1}{n^s}$$

yazılabilir. $\sum_{(P)} \frac{1}{n^s}$ toplamında $n$ in 1 'den $P$ ye kadar tüm değerleri geçecektir. Kolayca,

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{(P)} \frac{1}{n^s} < \sum_{n=P+1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

yazılabilir. $s > 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

yakınsak olduğu için $P \to \infty$ iken

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \to 0$$

yazabiliriz. Böylece

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \lim_{P\to\infty} \sum_{(P)} \frac{1}{n^s} = \lim_{P\to\infty} \prod_{p \leq P} \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

Böylece isteneni gösterdik. $s = 2$ alalım.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \prod_p \frac{p^2}{p^2-1},$$

öte yandan

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} < \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

olduğu görülebilir. Taylor serileri yardımıyla,

$$log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

eşitliğinde $x = 1$ alırsak istenen eşitsizliği elde ederiz.

**Not:** $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, Riemann Zeta fonksiyonu olarak bilinmektedir ($s > 1$ için).

**Problem 2.** Dik kenarları ardışık tamsayı ve hipotenüsü tamsayı olan sonsuz sayıda dik üçgenin varlığını gösteriniz.

**Çözüm:** $n^2 + (n+1)^2 = m^2$ yazılabilir. $2n^2 + 2n + 1 = m^2$ ve $2m^2 - (2n+1)^2 = 1$ elde edilir. $2n + 1 = s$ alalım. $2m^2 - s^2 = 1$ bu denklem için $(1,\ 1)$ bir çözümdür. $2m^2 - s^2 = 2(3m + 2s)^2 - (4m + 3s)^2$ olduğundan sonsuz $(m, s)$ çifti vardır.

**Problem 3.** $a^2 + b^2 - c^2 = -1$ olacak şekilde sonsuz sayıda $(a, b, c)$ tamsayı üçlülerinin varlığını gösteriniz.

**Çözüm:** $(z^2+1)x^2-y^2=-1$ denklemini ele alalım. Burada $x=2z$ ve $y=2z^2+1$ denklemi sağlar. Ayrıca

$$(z^2+1)x^2-y^2 = (z^2+1)((2z^2+1)x+2zy)^2 - ((2z^3+2z)x+(2z^2+1)y)^2$$

özdeşliği sonsuz çözüm olduğunu gösterir. Biz sadece $a=zx, b=x, c=y$ alarak kanıtı tamamlarız.

**Problem 4.** $x,y,z,w$ bir aritmetik dizinin ardışık terimleri olmayacak şekilde (bu koşulun nedeni $(3k)^3+(4k)^3+(5k)^3=(6k)^3$ olmasıdır) $x^3+y^3+z^3=w^3$ eşitliğini sağlayan sonsuz sayıda $x,y,z,w$ tamsayı dörtlülerinin varlığını gösteriniz.

**Çözüm:** $\{b(2a^3-b^3)\}^3+\{a(a^3-2b^3)\}^3+\{b(a^3+b^3)\}^3=\{a(a^3+b^3)\}^3$ özdeşliği çözüm için yetecektir. (Bu özdeşlikle ilgili olarak Bkz. Matematik Dünyası Cilt:1, Sayı:2, Alıştırma Problemi 6).

**Problem 5.** Bir $m$ pozitif tamsayısı veriliyor. Öyle bir $p_n$ asal sayısının ($p_n, n$ inci asal sayı) varlığını gösteriniz ki,

$$m\prod_{i=1}^{n} p_i < P < (m+1)\prod_{i=1}^{n} p_i$$

eşitsizliklerini sağlayan ve $p_n$ den daha büyük bir asal bölene sahip olan bir $P$ sayısı var olsun.

**Çözüm:** $\Sigma\frac{1}{p}$ nin ıraksak olduğunu biliyoruz. Şu halde $m<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}<m+1$ olacak şekilde bir $p_n$ vardır.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i} = \frac{3.5.7\cdot p_n+2.5.7\cdots p_n+\cdots+2.3.5.\cdots p_{n-1}}{\prod_{i=1}^{n} p_i},$$

$P$ sayısını pay olarak seçerek istenenlerin sağlandığını görebiliriz.

**Problem 6.** $9(x^4+y^4+z^4)-(x+y)^4-(x+z)^4=1$ denkleminin sonsuz sayıda tam sayı çözümlerinin varlığını gösteriniz.

**Çözüm:** $9\{(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4\}=(a+b-2c)^4+(a+c-2b)^4+(b+c-2a)^4$ özdeşliğini gözönüne alalım. $b+c-2a=1$ olacak şekilde sonsuz $(a,b,c)$ üçlüsü vardır. Biz $x=c-b, y=a-b, z=c-a$ alırız. Böylece $x+y=a+c-2b, x+z=2c-a-b,$ $x\to -x$ değişikliği denklemi etkilemediğinden kanıt tamamlanır.

**Problem 7.** $2x^4-y^4=1$ olacak şekilde her $(x,y)$ pozitif tamsayı ikilisine karşılık $(m-n)^4-4mn^2(m-2n)=1$ denklemini sağlayan bir $(m,n)$ pozitif ikilisi olduğunu gösterin.

**Çözüm:** $2(x^2)^2-(y^2)^2=1, x^2=a, y^2=b$ alalım. $2a^2-b^2=1, b$ tek olmalıdır. $b=2s+1$ alalım. Böylece $a^2=s^2+(s+1)^2$ elde ederiz $(a,s,s+1)$ bir temel Pisagor üçlüsüdür. Öyle $m,n$ tamsayıları bulabiliriz ki $a=m^2+n^2, s=2mn, s+1=m^2-n^2$ bunlar yerine konursa $2(m^2+n^2)^2-(m^2-n^2+2mn)^2=1$ bu ise $(m-n)^4-4mn^2(m-2n)=1$ e denktir.

KAYNAKCA


[1] American Mathematical Monthly, 1991.

[2] G.H. Hardy, E.M. Wright, An Introduction to the Theory of Numbers, Oxford Univ. Press, 1975.

[3] Coxeter, Introduction to Geometry, New York, Wiley, 1969.

[4] Waclaw Sierpinski, A Selection of Problems in the Theory of Numbers, Popular Lectures in Mathematics, Pergamon Press, 1964.


## ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYADI

Bundan böyle her yıl düzenlenecek olan Ulusal Matematik Olimpiyatı'nın birinci aşaması 9 Mayıs Pazar günü, 7 ilde yapıldı. Bu aşama sonucu, başarılı öğrenciler Aralık ayında yapılacak olan ikinci aşamaya katılmaya hak kazanacaklar. Ayrıca, Uluslararası Olimpiyat takımı için hazırlık grubu bu yarışma sonucuna göre oluşacak.

Birinci aşama sınavı, 36 çoktan seçmeli sorudan oluşmuştu. Aşağıda (sayfa 24 ve 25) bu sorular arasından seçtiğimiz bir kısmını veriyoruz. Amacımız soruları tanıtmak olduğu için seçeneklere yer vermedik. Çözümleri önümüzdeki sayıda bulacaksınız.