TAMSAYILAR VE POLİNOMLAR

CEMAL KOÇ*

Giriş

Tamsayıyla polinom, ilk bakışta birbirinden tümüyle farklı görünen kavramlardır. Oysa, yakından baktığımızda durum böyle değil; tamsayılarla polinomların aynı özelliklere sahip cebirsel yapılar oluşturduklarını görüyoruz. Bu yapılara "Öklid Bölgeleri" deniyor. Bu yazıdaki amacımız Öklid Bölgelerinin biçimsel bir incelemesini yapmak değil, ortaöğretimde bugüne dek ele alınan ve alınmayan yönleriyle tamsayıları ve polinomları ortak özelliklerini vurgulayarak tanıtmaktır.

Tamsayılar, Salt Değer

Sonlu kümelerin niceliklerini gösteren

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

doğal sayılar kümesini uygun biçimde genişleterek

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

tamsayılar kümesini elde ediyoruz. Doğal sayılarla yapılan toplama ve çarpma işlemlerinin de bütün tamsayılara yayılmasıyla, ilkokul sıralarından beri alışık olduğumuz birçok önemli özelliğe sahip gerçekten elverişli bir cebirsel yapı elde etmiş oluyoruz. Kanıksanma ölçüsünde doğal oldukları için toplama ve çarpma ile ilgili birleşme, değişme vb., özellikler ve sıralama üzerinde durmuyoruz. Ancak tamsayılarda bölme algoritması üzerinde ayrıntıyla durma gereğini duyuyoruz. Bu amaçla önce her tamsayıya doğal sayılar türünden bir ölçü veren salt (mutlak) değer kavramını anımsıyoruz. Bir tamsayı aldığımızda; bu ya doğal sayılar kümesindedir (negatif olmayan tamsayıdır) ya da

$$\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, \ldots\}$$

kümesindedir, yani negatif tamsayıdır. *Negatif olmayan tamsayıların salt değerleri kendileri, negatif tamsayıların salt değerleri ters işaretleri (yani toplamsal tersleri) olarak tanımlanır. a tamsayısının salt değeri, $|a|$ şeklinde gösterilir.* Örneğin,

$$|0| = 0, \quad |5| = 5, \quad |-2| = -(-2) = 2,$$

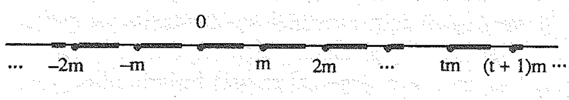
Bölme Algoritması

Herhangi bir a tamsayısı ile sıfırdan farklı bir b tamsayısı verildiğinde

$$a = qb + k \quad ve \quad 0 \leq k < |b|$$

olacak biçimde q ve k tamsayıları bulunabilir. Dahası, q ve k tamsayıları tek türlü belirlidirler. (Buradaki a sayısına *bölünen*, b ye *bölen*, q ya *bölüm*, k ya da *kalan* adı verilir.)

Bölme algoritması diye bilinen bu önermeyi ispatlamak için $m = |b|$ diyelim. $b \neq 0$ alındığı için $m > 0$ olacaktır. Açıkça görüldüğü gibi her a tamsayısı aşağıdaki şekilde görülen aralıklardan birine düşer, yani bir t tamsayısı için $tm \leq a < (t+1)m$ olur:



Her bir kısımdan tm 'yi çıkarırsak buradaki eşitsizlikleri

$$0 \leq a - tm < m$$

biçimine sokabiliriz. Böylece $k = a - tm$ koyarak

$$a = tm + k \quad \text{ve} \quad 0 \leq k < m$$

sonucuna varırız. Şimdi $b > 0$ yani $m = |b| = b$ iken $q = t$ ve $b < 0$ yani $m = |b| = -b$ iken $q = -t$ alarak her iki durumda da

$$a = qb + k \quad \text{ve} \quad 0 \leq k < |b|$$

istenen sonucuna ulaşırız.

Böylece q bölümü ile k kalanının varlığını ispatlamış olduk; bunların tekliğine gelince,

$$a = q_1 b + k_1, \quad 0 \leq k_1 < |b|$$
$$a = q_2 b + k_2, \quad 0 \leq k_2 < |b|$$

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

olduğunu varsayarsak, taraf tarafa çıkarıp salt değer alarak

$$|q_1 - q_2|\,|b| = |k_1 - k_2|, \quad |k_1 - k_2| < |b|$$

elde ederiz. Burada $q_1 \neq q_2$ ya da $k_1 \neq k_2$ kabulü bizi bir yanda $|q_1 - q_2|\,|b| \geq |b|$, diğer yanda da $|k_1 - k_2| < |b|$ eşitsizliğine götürür ve $|b| < |b|$ çelişkisine düşürür. Öyleyse $q_1 = q_2$ ve $k_1 = k_2$ olmalıdır.

Uyarılar

1. Bölme algoritması bize tamsayılarda bölme işlemi deyince bir ikili işlemden değil, yapılan bir işten sözedildiğini göstermektedir.

2. Bölme algoritmasını doğal sayılar içinde kalarak da ifade etmek mümkündür, yani $a \geq 0$ ve $b > 0$ alındığında $q \geq 0$ olacaktır. (Yukarıdaki şeklin yalnızca 0 ın sağında kalan kısmı düşünülecek.) Buradan $a < 0$ ve $b > 0$ durumuna geçmek için

$$|a| = tb + \ell, \qquad 0 \leq \ell < b$$

yazılır ve $\ell = 0$ ise $a = (-t)b$ eşitliğine $\ell \neq 0$ ise

$$a = (-t-1)b + b - \ell$$

eşitliğine geçilerek bölüm ve kalanlar elde edilir.

3. Rasyonel sayılar ve gerçel sayılar için bölme algoritmasının yani bölüm ve kalan kavramlarının herhangi bir anlamı yoktur. Çünkü a ve $b \neq 0$ için rasyonel sayılarda (veya gerçel sayılarda) $a = qb$ olacak biçimde daima q rasyonel sayısı (veya q gerçel sayısı) bulunabilir.

Örnek 1: Bölme algoritmasında $b = 2$ alacak olursak $k = 0$ ya da $k = 1$ olabileceği için bütün tamsayıların

$a = 2q$ (çift sayı) ya da $a = 2q+1$ (tek sayı)

biçiminde olduğunu görüyoruz. Aynı şekilde $b = 3$ alarak her tamsayının ya $3k$, ya $3k+1$ ya da $3k+2$ biçiminde yazılabileceğini görürüz.

Örnek 2: $a \leq \theta_0 < 360^-$ olmak üzere her yönlü açı ölçüsünü derece türünden $\theta_0 + k.360^-$ biçiminde yazabiliriz. Ölçüsü -87463^- olarak verilen yönlü açının θ_0 esas ölçüsünü bulunuz.

Çözüm: 87463 sayısını 360'a böldüğümüzde bölüm olarak 242 kalan olarak 343 buluruz. Şimdi,

$$\begin{aligned} 87463 &= 242.360 + 343 \\ -87463 &= (-242)\cdot 360 - 343 \\ &= (-242)\cdot 360 - 360 + 360 - 343 \\ &= (-243)\cdot 360 + 176 \end{aligned}$$

olacağı için esas ölçü 176^-'dir diyebiliriz.

Bölenler:

Bir a tamsayısını sıfırdan farklı bir b tamsayısına böldüğümüzde kalan sıfır oluyorsa yani,

$$a = qb$$

olacak biçimde bir q tamsayısı varsa b, a yı böler (ya da a, b ile bölünür) diyor ve $b|a$ gösterimi ile belirtiyoruz. Bu durumda b ye a nın *böleni* ya da *çarpanı*; a ya da b nin *katı* diyoruz. a nın b ye bölümünden kalan sıfır değilse $b \nmid a$ yazıyoruz. Söz gelimi,

-20'nin bölenleri :	$\mp 1, \mp 2, \mp 4, \mp 5, \mp 10, \mp 20$
0 'ın bölenleri :	sıfırdan farklı bütün tamsayılar
-1'in bölenleri :	∓ 1 olmaktadır, öyleyse

$5 \mid -20$, $-4 \mid -20$, $28 \mid 0$, $-2 \nmid -1$, yazabiliriz. Sıfırdan farklı her a tamsayısı için ∓ 1 ve $\mp a$ sayıları a nın bölenleridir, bu olağan bölenlerin dışında kalan bölenlere a nın *özbölenleri* denir. Sözgelimi 20'nin özbölenleri: $\mp 2, \mp 4, \mp 5, \mp 10$; -7 nin ise özböleni yok.

Bölenlerle ilgili aşağıdaki özellikleri görmek çok kolaydır.

1. $b|a \Leftrightarrow -b|a \Leftrightarrow b|-a$

2. $a|b$ ve $b|a \Rightarrow b = \mp a$

3. $b|a \Rightarrow b|na$

4. $c = a + b$ ise bir n tamsayısı bu üç sayıdan ikisini böldüğünde üçüncüyü de böler.

5. Bölen sayısı en fazla olan sayı sıfırdır, en az olan tam sayılar ise 1 ve -1'dir. (Bu iki sayı çarpımsal tersi olan tamsayılardır.)

İlk özellik bize bölenlerle ilgili tartışmaları yalnızca pozitif tamsayılar için yapmanın yeterli olduğunu, son özellik ise bölünebilme açısından 0 ile 1 sayılarının ilginç olmadığını göstermektedir. Peki, özböleni olmayan ilginç sayılara ne demeli? **Tam iki tane pozitif böleni bulunan pozitif sayılara asal sayılar denir.** Bunların asıl ilginçliğini ileride göreceğiz, şimdilik birkaç örnek asal sayı sıralamakla yetinelim:
$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$

Özböleni bulunan pozitif sayılara "bileşik sayılar" denir. Söz gelimi 25, 39, 111 bileşik sayılardır.

$$25 = 5.5, \quad 39 = 3.13, \quad 111 = 3.37$$

Örnek 3: Ardışık 5 tamsayıdan birinin 5 ile bölünebildiğini gösteriniz. Bu sonucu herhangi bir m sayısı için de görünüz.

Çözüm: Herhangi ardışık 5 sayı sırayla yazıldığında en baştaki sayının "5" ile bölümünden kalana göre şunlardan biri karşımıza çıkar:

$$5k, 5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4$$

$$5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4, 5k+5 = (k+1)5$$

$$5k+2, 5k+3, 5k+4, 5(k+1), 5k+6$$

$$5k+3, 5k+4, 5(k+1), 5k+6, 5k+7$$

$$5k+4, 5(k+1), 5k+6, 5k+7, 5k+8$$

Görüldüğü gibi her defasında ardışık sayılardan biri (ve hatta yalnız biri) 5 ile bölünür. Aynı düşünce herhangi bir m sayısı için yinelenebilir.

Problem 1. *Her t pozitif tek sayısı için $2^{2t} - 2^t - 2$ nin 18 ile bölünebileceğini gösteriniz.*

Çözüm: t pozitif tek sayı olduğundan $t = 2k+1, k \in \mathbb{N}$ yazabiliriz. Buna göre

$$\begin{aligned} 2^{2t} - 2^t - 2 &= (2^t - 2)(2^t + 1) \\ &= 2(2^{t-1} - 1)(2^t + 1) \\ &= 2(2^{2k} - 1)(2^{2k+1} + 1) \\ &= 2(2^k - 1)(2^k + 1)(2^{2k+1} + 1) \end{aligned}$$

olur. Şimdi,

a) $2^k - 1, 2^k, 2^k + 1$ ardışık üç sayı olduğundan bunlardan biri 3 ile bölünür ve bu 2^k olamaz; yani $(2^k - 1)(2^k + 1)$ çarpımı 3 ile bölünür;

b) n tek sayı olduğundan

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} - y^{n-1})$$

özdeşliği bulunduğundan

$$2^{2k+1} + 1 = (2+1)(2^{2k} - \cdots - 1^{2k})$$

olup 3 ile bölünebilir, baştaki 2 çarpanını da gözönüne alırsak $2^{2t} - 2^t - 2$ nin 18 ile bölündüğünü görürüz.

Problem 2: (AIME 1991). $x^2 + ax + 6a = 0$ *denkleminin kökleri tamsayı ise a gerçel sayısının alabileceği kaç değer vardır?*

Çözüm: x_1 ve x_2 denklemin kökleri ise

$$a = -(x_1 + x_2)$$

olacağından a, x_1, x_2 sayılarından ikisi tamsayı ise üçüncü de tamsayı olacaktır. Demek ki problem hangi a ve x tamsayıları için

$$x^2 + ax + 6a = 0$$

denklemi sağlanır biçimine sokulabilir, bir başka deyişle hangi x tamsayıları için

$$a = \frac{-x^2}{x+6}$$

olacağı belirlenmelidir. Polinom bölmesi ile

$$a = 6 - x - \frac{36}{x+6}$$

yazdığımızda $x + 6$ 'nın 36'nın bölenleri olduğunu görüyoruz. Yani $x + 6 = \mp 1, \mp 2, \mp 3, \mp 4, \mp 6, \mp 9, \mp 12, \mp 18, \mp 36$ olmalıdır. x 'in buradan elde edilecek 18 değerini ayrı ayrı yerine koyup a yı hesapladığımızda şu 10 tane farklı değer elde edilir:

$$-25, -8, -3, -1, 0, 24, 25, 27, 32, 48.$$

Şu kolay problemi de okuyucuya bırakalım.

Problem 3. (AIME 1991). *x ve y pozitif tamsayılar ve $xy + x + y = 71$, $x^2y + xy^2 = 880$ olduğuna göre $x^2 + y^2$ yi hesaplayınız.*

Yazımızı şu çözmecemsi problemle bitirelim:

Problem 3. *Herhangi bir n sayısı alıp bir sıraya n tane tamsayı (kimisi aynı olabilir) yazalım. Birbirine bitişik sayılardan oluşturulan toplamlardan birinin n ile bölünebileceğini gösteriniz.*

(Örneğin 7 tane sayıyı $3\,\underbrace{2\ 1\ 2\ 2}\ 6\ 5$ olarak sıralarsak $2 + 1 + 2 + 2$ toplamı 7 ile bölünür.)

Çözüm. Sıralanan tamsayılar $a_1, a_2, \ldots, a_n$ olsun. a_1 ile başlayan ve bitişik sayılarla oluşturulan toplamlar şunlardır:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ \cdots & \quad \cdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

Bu toplamların n ile bölümünden ortaya çıkan kalanlar $0, 1, \ldots, n-1$ den biri olacaktır. Bu kalanlardan birinin sıfır olması onu veren toplamın n ile bölünmesi demektir. Bu toplamlardan hiçbiri n ile bölünemezse $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ kümesinden alınacak n tane kalan sözkonusu demektir ve bu kalanlardan ikisi birbirine eşit olmalıdır (çekmece ilkesi). Demek ki $i < j$ olmak üzere

$$\begin{aligned} S_i &= a_1 + \cdots + a_i = qn + r \\ S_j &= a_1 + \cdots + a_i + \cdots + a_j = sn + r \end{aligned}$$

olacaktır. Bu ise

$$S_j - S_i = a_{i+1} + \cdots + a_j = (s-q)n$$

olması demektir. Yani a_{i+1} den a_j ye kadar olan parçadaki sayıları toplarsak sonuç n ile bölünür.

Polinomlar, Derece

Polinom kavramını verebilmek için önce bir taban yapıya gerek var. Biz bu yapıyı üzerindeki toplama ve çarpma işlemleriyle birlikte $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi olarak alacağız. $\mathbb{R}$ kümesi yerine $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar kümesi ya da $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi de alınabilir. $\mathbb{R}$ yi düşünerek vereceğimiz ifadeleri okuyucu $\mathbb{R}$ yerine $\mathbb{Q}$ ya da $\mathbb{C}$ alarak da yineleyebilir. *$a_0, a_1, \ldots, a_n$ gerçel sayılar olmak üzere*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

biçimindeki yazılışlara polinom (ya da çokterimli) $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ya da polinomun katsayıları denir. $a_0 \neq 0$ ise a_n ye başkatsayı n ye de polinomun derecesi denir ve der *kısaltması ile belirtilir. $a_n = 1$ ise polinom monik polinom olarak nitelenmektedir. Bütün katsayıları sıfır olan polinoma sıfır polinom denir, onun derecesi tanımlanmamıştır; (gereğinde formüllere uygunluk sağlaması için bu derece $-\infty$ simgesi olarak alınmaktadır).*

Derece kavramı ile sıfırdan farklı her polinoma bir anlamda ölçü veren bir doğal sayı bağlamış oluyoruz. Bu, tamsayılardaki salt değerin rolünü oynuyor: bunun yardımıyla tamsayılarda yapılan akıl yürütmeleri polinomlara taşıyabiliyoruz.

Uyarı. Bir $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ polinomu verildiğinde her α gerçel sayısı için x simgesi yerine α sayısını koyarak

$$A(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_n\alpha^n$$

sayısını elde ederiz. Böylece bir $\alpha \to A(\alpha)$ fonksiyonu buluruz. Bu fonksiyona polinom fonksiyonu denir. Bu fonksiyonla $A(x)$ polinomuna tamamen aynı şeyler gözüyle bakamayız; ancak bu yazıda bu ince noktaya özen göstermeyeceğiz.

Polinomlarda toplama ve çarpma işlemlerini

$$\begin{aligned} &(a_0 + a_1x + \cdots) + (b_0 + b_1x + \cdots) = \\ &\qquad (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots \\ &\qquad (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) \\ &\qquad (b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m) \\ &= \quad a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \cdots + a_nb_mx^{n+m} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlıyoruz. Bu işlemler yakından bildiğimiz birleşme, değişme, dağılma vb. özellikleri sağladıkları için bunlarla işlem yapmakta herhangi bir güçlük bulunmamaktadır. Ancak bölme algoritması üzerinde ayrıntıyla duracağız.

Bölme Algoritması

Herhangi bir $A(x)$ polinomu ile sıfırdan farklı bir $B(x)$ polinomu verildiğinde

$$A(x) = Q(x)B(x) + K(x)$$

ve

$$der(K(x)) < der(B(x))$$

olacak biçimde $Q(x)$ ve $K(x)$ polinomları bulunabilir. Dahası, $Q(x)$ ve $K(x)$ tek türlü belirlidirler. (Buradaki $A(x)$ polinomuna bölünen, $B(x)$ 'e bölen, $Q(x)$ 'a bölüm, $K(x)$ 'e de kalan adı verilir).

Görüldüğü gibi bu ifade yukarıda verilenin tam kopyasıdır. İspat için tam sayılarda nasıl salt değer kavramından yararlandıysak burada da derece kavramından yararlanacağız. $der(B(x)) > der(A(x))$ iken $Q(x) = 0, K(x) = A(x)$ alabiliriz. Geriye $m = der(B(x)) \leq n \times der(A(x))$ durumu kalıyor. Şimdi

$$A(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$
$$B(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$$

polinomlarından

$$A(x) - \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}B(x)$$

polinomunu oluşturursak, dereceyi $A(x)$ inkinden daha küçük duruma getirmiş oluruz. (İşlemlerde bunu aşağıdaki biçimde yapıyoruz.)

$$\begin{array}{c|l} A(x) & B(x) \\ & \\ \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}B(x) & \frac{a_n}{b_m}x^{n-m} \\ & \\ ** & \end{array}$$

Böylece devam edip gittiğimizde en sonunda dereceyi $B(x)$ inkinden küçük yapmış oluyoruz ve elimizde kalan polinoma $K(x)$ dersek

$$K(x) = A(x) - Q(x)B(x)$$

olduğunu görüyoruz. Demek ki istenen

$$A(x) = Q(x)B(x) + K(x)$$

eşitliğine ulaşmış oluyoruz.

$Q(x)$ ve $K(x)$ in tekliğine gelince tamsayılardaki gibi,

$$\begin{aligned} A(x) &= Q_1(x)B(x) + K_1(x) \\ A(x) &= Q_2(x)B(x) + K_2(x) \end{aligned}$$

olduğunu varsayıp taraf tarafa çıkarırsak,

$$(Q_1(x) - Q_2(x))B(x) = K_2(x) - K_1(x)$$

elde ederiz. $K_1(x) \neq K_2(x)$ olsaydı,

$$\begin{aligned} &der(B(x)) > der(K_2(x) - K_1(x)) = \\ &\qquad \mathrm{der}(Q_1(x) - Q_2(x)) + \mathrm{der}(B(x)) \geq \mathrm{der}(B(x)) \end{aligned}$$

çelişkisi çıkardı. Demek ki $K_1(x) = K_2(x)$ ve dolayısıyla da, $B(x) \neq 0$ olduğuna göre $Q_1(x) = Q_2(x)$ olmalıdır.

Bölme algoritmasını $B(x) = x - \alpha$ polinomu için uyguladığımızda $K(x)$ in derecesi birden fazla olamayacağından kalan bir sabit olur ve

$$A(x) = Q(x)(x - \alpha) + K$$

elde edilir. Buradan $A(\alpha) = Q(\alpha)\overbrace{(\alpha - \alpha)}^{0} + K$, yani

$$K = A(\alpha)$$

olduğu görülür. Demek ki bir $A(x)$ polinomunun $x - \alpha$ ile bölümünden kalan

$$K = A(\alpha)$$

sabit polinomudur.

Genelde $A(x)$ polinomunu $B(x)$ 'e böldüğümüzde elde edilen kalan sıfırsa $B(x)$ 'e $A(x)$ in böleni (ya da çarpanı) diyor ve $B(x)|A(x)$ yazıyoruz. Şimdi yukardaki sonuçtan yararlanacak olursak, *$A(x)$ in $x - \alpha$ ile bölünebilmesi için gerek ve yeter koşul $A(\alpha) = 0$ olmasıdır diyebiliriz. Bu durumda α ya A nın kökü (ya da sıfır yeri) diyoruz. Dahası $(x - \alpha)^k|A(x)$ ve $(x - \alpha)^{k+1} \nmid A(x)$ ise α ya A nın k katlı kökü denir.*

Örnek: $x_1 \neq x_2$ olmak üzere $x - x_1$ ile bölümünde $K_1, x - x_2$ ile bölümünde K_2 kalanını veren bir $A(x)$ polinomu $(x - x_1)(x - x_2)$ ile bölünürse kalan ne olur.

Çözüm: $(x - x_1)(x - x_2)$ polinomu ikinci dereceden olduğundan kalan $K(x) = Ax + b$ biçimindedir. Oysa

$$A(x) = Q(x)(x - x_1)(x - x_2) + K(x)$$

ifadesinde x yerine sırayla x_1 ve x_2 koyduğumuzda

$$K_1 = K(x_1) \quad \text{ve} \quad K_2 = K(x_2)$$

elde edilir. Öyleyse x_1 de K_1 ve x_2 de K_2 değerlerini alan lineer polinom

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{K(x) - K_1}{K_2 - K_1}$$

den elde edilir (Doğru denklemini anımsayınız).

Sabit olmayan iki polinomun çarpımı olarak yazılabilen polinomlara indirgenebilir polinom, yazılamayanlara ise indirgenmez polinom denir. Başkatsayının 1 olması koşulunu da ekleyerek asal polinomlara ulaşıyoruz. Buna göre **asal polinom** *deyince derecesi 1 ya da daha büyük olan ve derecesi sıfırdan büyük iki polinomun çarpımı olmayan polinomları anlıyoruz.*