

NASIL TOPLAMALI?

HALUK ORAL*

Bu yazımızda bazı kombinasyon toplamlarının ilginç bir yöntemle bulunmasından bahis edeceğiz.

Önce $(x + y)^n$ in nasıl açılabileceğini hatırlayalım.

$$(x + y)^n = (x + y)(x + y) \cdots (x + y)$$

eşitliğinin sağ tarafındaki çarpımları yaparsak her parantez, çarpımın derecesine 1 ekleyeceği için bütün terimlerin derecesi n olur. Şimdi $x^k y^{n-k}$ teriminin katsayısını düşünelim. x in kuvveti olan k , parantezlerin k tanesinden x in seçildiğini gösterir. Bu seçim $\binom{n}{k}$ türlü yapılır ve bu seçim y leri de belirlediği için $x^k y^{n-k}$ nın katsayısı $\binom{n}{k}$ olur. Öyle ise

$$(x + y)(x + y) \cdots (x + y) = \binom{n}{0} x^0 y^n + \binom{n}{1} x^1 y^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n} x^n y^0$$

yani

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

buluruz. Bu eşitliğe binom açılımı denir. Bu eşitliği kullanarak

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = (1 + 1)^n = 2^n$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = (1 - 1)^n = 0$$

olduğu kolaylıkla görülür.

Şimdi

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^m \binom{n}{m} \quad (m \leq n)$$

toplamını bulalım. Bu toplam

$$x^n(1-x)^n + x^{n-1}(1-x)^n + \cdots + x^{n-m}(1-x)^n$$

polinomunda x^n nin katsayısıdır. Bu polinomu dönüştürerek

$$\begin{aligned} & x^n(1-x)^n + x^{n-1}(1-x)^n + \cdots + x^{n-m}(1-x)^n \\ &= (1-x)^n \cdot x^{n-m} \cdot (x^m + x^{m-1} + \cdots + x + 1) \\ &= (1-x)^n \cdot x^{n-m} \cdot \frac{1-x^{m+1}}{1-x} \\ &= (1-x)^{n-1} \cdot (x^{n-m} - x^{n+1}) \\ &= x^{n-m} \cdot (1-x)^{n-1} - x^{n+1} \cdot (1-x)^{n-1} \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu polinomda x^n ,

$$x^{n-m} \cdot (-1)^m \binom{n-1}{m} x^m = (-1)^m \binom{n-1}{m} x^n$$

olarak görüneceğinden, $m < n$ için katsayısı ve dolayısı ile istenilen toplam $(-1)^m \binom{n-1}{m}$ olur ve $m = n$ için daha evvel verdiğimiz $(1-1)^n = 0$ toplamını elde ederiz.

Yukarıda bir geometrik serinin toplam formülünü kullandık;

$$1 + x + \cdots + x^m = \frac{1-x^{m+1}}{1-x} \quad (x \neq 1)$$

Bu eşitlik tümevarımla, veya şu şekilde kolaylıkla gösterilebilir:

$$\begin{aligned} A &= 1 + x + \cdots + x^m \\ Ax &= x + x^2 + \cdots + x^{m+1} \\ A - Ax &= 1 - x^{m+1} \end{aligned}$$

O halde

$$A = \frac{1-x^{m+1}}{1-x}$$

Eğer $|x| < 1$ ise x^m nin m büyüdükçe sifıra yaklaşan değerler alacağını düşünürsek, aşağıdaki sonsuz toplam için

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^m + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

eşitliğini de yazabiliriz.

Bu sonlu ve sonsuz toplam formüllerinin kullanılabileceği iki örnek daha verelim. Önce sonlu toplam için;

$$\binom{n}{k} + \binom{n+1}{k} + \binom{n+2}{k} + \cdots + \binom{n+m}{k} \quad (k \leq n)$$

* Boğaziçi Üniversitesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi

ORAL

Bu toplam x^k nin $(1+x)^n + (1+x)^{n+1} + \dots + (1+x)^{n+m}$ polinomundaki katsayısıdır. Yine bu polinomu dönüştürerek

$$\begin{aligned} (1+x)^n + (1+x)^{n+1} + \dots + (1+x)^{n+m} &= \\ &= (1+x)^n [1 + (1+x) + \dots + (1+x)^m] \\ &= (1+x)^n \left[\frac{1 - (1+x)^{m+1}}{1 - (1+x)} \right] \\ &= \frac{1}{x} [(1+x)^{n+m+1} - (1+x)^n] \end{aligned}$$

elde ederiz. x^k li terim

$$\frac{1}{x} \left[\binom{n+m+1}{k+1} x^{k+1} - \binom{n}{k+1} x^{k+1} \right]$$

olacağından $k < n$ için x^k nin katsayısı

$$\binom{n+m+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}$$

olarak bulunur. $k = n$ hali için bu katsayı $\binom{n+m+1}{k+1}$ dir.

Şimdi sonsuz toplam formülünün kullanıldığı bir örnek verelim.

$$\binom{2n}{0} - \binom{2n-1}{1} + \binom{2n-2}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

toplamını bulalım.

Bu ifade

$$\begin{aligned} x^{2n}(1-x)^{2n} + x^{2n-1}(1-x)^{2n-1} + \\ x^{2n-2}(1-x)^{2n-2} + \dots + x^n(1-x)^n \end{aligned}$$

polinomunda x^{2n} nin katsayısıdır. Bu polinomu rahat çalışabileceğimiz bir hale getirmek için

$$x^{n-1}(1-x)^{n-1} + x^{n-2}(1-x)^{n-2} + \dots + x(1-x) + 1$$

toplamını da bu polinoma ekleyelim. Kolayca görüleceği gibi bu ekleme x^{2n} nin katsayısını değiştirmez. Elde edilen toplam

$$(x-x^2)^{2n} + (x-x^2)^{2n-1} + \dots + (x-x^2) + 1 =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1 - (x-x^2)^{2n+1}}{1 - (x-x^2)} \\ &= \frac{1 - x^{2n+1}(1-x)^{2n+1}}{x^2 - x + 1} \end{aligned}$$

Bu eşitliğin pay ve paydasını $1+x$ ile çarparak

$$\begin{aligned} [1 - x^{2n+1}(1-x)^{2n+1}] \cdot \frac{1+x}{1+x^3} = \\ \frac{1+x}{1+x^3} - x^{2n+1}(1-x)^{2n+1} \frac{1+x}{1+x^3} \end{aligned}$$

polinomuna eşit olduğunu görürüz.

$x^{2n+1} \cdot (1-x)^{2n+1} \cdot \frac{1+x}{1+x^3}$ ifadesinde bütün terimlerin derecesi $2n$ den büyük olduğu için x^{2n} nin katsayısı sadece $\frac{1+x}{1+x^3}$ den gelecektir.

Şimdi tekrar

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

ifadesine dönelim. x yerine $-x^3$ koyarsak

$$\frac{1}{1+x^3} = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + x^{12} \dots$$

elde ederiz. (Bu eşitlik doğal olarak sadece x in mutlak değeri 1'den küçük iken doğrudur. Biz sadece katsayılarla ilgilendiğimiz için bu kısıtlama bir sorun yaratmaz.)

Böylece

$$\frac{1+x}{1+x^3} = (1+x)(1-x^3+x^6-x^9+x^{12}-\dots)$$

elde ederiz. Bu çarpımda x^{2n} in katsayısı

$$= \begin{cases} 1 & 2n \equiv 0 \pmod{6} \quad \text{yani} \quad n \equiv 0 \pmod{3} \\ 0 & 2n \equiv 2 \pmod{6} \quad \text{yani} \quad n \equiv 1 \pmod{3} \\ -1 & 2n \equiv 4 \pmod{6} \quad \text{yani} \quad n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

olarak elde edilir. Bu formül, istediğimiz n ye bağlı toplamdır.

Son olarak

$$\binom{2n}{n} + 2 \binom{2n-1}{n} + 4 \binom{2n-2}{n} + \dots + 2^n \binom{n}{n}$$

toplamını bulalım. Bu ifade

$$(1+x)^{2n} + 2(1+x)^{2n-1} + 2^2(1+x)^{2n-2} + \dots + 2^n(1+x)^n$$

polinomunda x^n in katsayısıdır. Yine geometrik seriler için toplam formülünü de kullanarak bu polinomu dönüştürelim.

$$\begin{aligned} & (1+x)^{2n} + 2(1+x)^{2n-1} + \dots + 2^n(1+x)^n \\ &= (1+x)^{2n} \left[1 + \frac{2}{1+x} + \frac{2^2}{(1+x)^2} + \dots \right. \\ & \quad \left. \frac{2^n}{(1+x)^n} \right] \\ &= (1+x)^{2n} \frac{\frac{2^{n+1}}{(1+x)^{n+1}} - 1}{\frac{2}{1+x} - 1} \\ &= (1+x)^{2n} \frac{\frac{2^{n+1}}{(1+x)^n} - (1+x)}{2 - (1+x)} \\ &= [2^{n+1}(1+x)^n - (1+x)^{2n+1}] \cdot \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

Yine $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$ eşitliğini kullanarak polinomumuzu

$$2^{n+1}(1+x)^n(1+x+x^2+\dots) - (1+x)^{2n+1} \frac{1}{1-x}$$

şekline getirebiliriz. Şimdi bu ifadedeki x^n in katsayısını bulalım.

$$(1+x)^n \cdot (1+x+x^2+\dots) =$$

$$\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n \right] \frac{1}{1-x}$$

ifadesinde x^n içeren terimlerin katsayılarının toplamı

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

olduğu görülür. Öte yandan

$$(1+x)^{2n+1}(1+x+x^2+\dots)$$

$$= \left[\binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1}x + \binom{2n+1}{2}x^2 \right.$$

$$\left. x^2 + \dots + \binom{2n+1}{2n+1}x^{2n+1} \right] \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

ifadesinde x^n içeren terimlerin toplamı

$$\binom{2n+1}{0}x^n + \binom{2n+1}{1}xx^{n-1} +$$

$$\binom{2n+1}{2}x^2x^{n-2} + \dots + \binom{2n+1}{n}x^n$$

olacağından x^n nin katsayısı

$$\binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \binom{2n+1}{2} + \dots + \binom{2n+1}{n}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \binom{2n+1}{2} + \dots + \binom{2n+1}{2n+1} \right] = \frac{1}{2} 2^{2n+1} = 2^{2n}$$

olarak bulunur. Buradan x^n nin

$$2^{n+1}(1+x)^n(1+x+x^2+\dots) - (1+x)^{2n+1} \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

ifadesindeki katsayısı

$$2^{n+1} \cdot 2^n - 2^{2n} = 2^{2n+1} - 2^{2n} = 2^{2n}$$

olarak elde edilir.

Sayma yöntemi ile elde edilmesi zor olan pek çok eşitlik bu yöntemle bulunabilir. Bu yöntemle doğuran fonksiyonlar yönteminin bir uygulaması olarak da bakılabilir.