# PARADOKSLAR VE MATEMATİKTE ÇELİŞKİ

ALİ NESİN*

## 1. Yamyam Paradoksu:

Bilinen bilmecedir. Yamyamlar bir mantıkçı yakalarlar ve şöyle derler mantıkçıya:

– Biz her yakaladığımız yabancıyı yeriz. Kimini haşlayıp, kimini kızartıp yeriz. Avımıza bir soru sorarız. Avımız soruyu doğru yanıtlarsa haşlarız, yanlış yanıtlarsa kızartırız.

Dedikleri gibi de yaparlar. Mantıkçıya bir soru sorarlar. Mantıkçı bir süre düşündükten sonra soruyu yanıtlar. Yanıtı duyan yamyamlar ne yapacaklarını şaşırırlar. Yanıt öyle bir yanıttır ki yamyamlar mantıkçıyı ne haşlayabilirler, ne de kızartabilirler. Yamyamlar mantıkçıya ne sormuşlardır ve mantıkçı soruya ne yanıt vermiştir?

Yamyamlar mantıkçıya şu soruyu sormuşlardır:

– Seni haşlayıp da mı yiyeceğiz, yoksa kızartıp da mı yiyeceğiz?

Mantıkçı şöyle yanıtlamıştır:

– Kızartacaksınız!

Bu soru ve yanıtla, mantıkçı ne haşlanır, ne de kızartılır.

Bir an, mantıkçının kızartılacağını varsayalım. O zaman mantıkçının yanıtı doğru olur. Ama yanıt doğru olduğundan – yamyamların kendi kurallarına göre – mantıkçının haşlanması gerekmektedir. Demek mantıkçı kızartılamaz.

Şimdi de mantıkçının haşlanacağını varsayalım. O zaman mantıkçının yanıtı yanlış olacak. Yanıt yanlış olduğundan da kızartılması gerekmektedir. Demek mantıkçı haşlanamaz.

Sonuç olarak mantıkçı kurtulur.

Bu gibi durumlar "paradoksal" olarak nitelendirilir. "Saçma" bir durumdur. Çünkü mantıkçı ya kızartılacaktır, ya da haşlanacaktır, bunu önceden biliyoruz, dolayısıyla yamyamların sorduğu soruya yanıt olarak iki seçenek vardır. Böyle bir sorunun yanıtı ya doğru, ya da yanlış olmalıdır. Oysa yukarıdaki sorunun yanıtı ne doğru, ne de yanlıştır; daha doğrusu yanıt doğruysa yanlış, yanlışsa doğrudur. Yani yanıtın doğruluğu ya da yanlışlığı yanıtın kendisine bağlıdır!

Yukarıdaki paradoks nasıl çözülür, yani çelişki nasıl giderilir? Şöyle: Öyküde anlatıldığı gibi bir boy yoktur. Yani, yakaladıkları her yabancıyı yiyen ve yukarıdaki yöntemle yiyen bir boy yoktur.

Bu çözüme kimi okur karşı çıkabilir. Matematikçileri elindeki oyuncağı sevmeyip kıran, bilmecesini çözemeyip yırtan mızıkçı çocuklara benzetebilir. Ama bu doğru olmaz. Şöyle düşünelim: Bilmecede şu, şu özelliklere sahip bir boy vardır diyoruz. Öyle bir boyun olabileceğinden ilk başta kuşku duymayabiliriz, ancak görüyoruz ki böyle bir boyun varlığı bizi çelişkiye götürüyor[1].

## 2. Berber Paradoksu:

Yukarıdaki paradoksa benzer paradoks çoktur. İşte bir tane daha:

Köyün birinde bir berber varmış. Bu berber, o köyde kendini traş etmeyen herkesi traş edermiş, kendini traş edenleriyse traş etmezmiş. Soru şu: Bu berber kendini traş eder mi, etmez mi? Kendini traş etmezse, kendini traş etmeyen herkesi traş ettiğinden, kendini traş etmeli. Kendini traş ederse, kendini traş edenleri traş etmediğinden, kendini traş etmemeli.

Çözüm yukarıdaki gibi: Böyle bir berber olamaz.

## 3. Kataloglar Paradoksu:

Bu yüzyılın başında matematikçileri derin düşüncelere düşüren paradoksa geçmeden önce, günlük dilde bir paradoks daha geçelim:

* California Üniversitesi öğretim üyesi

[1] Eğer mantıkçı, "haşlayacaksınız," diye yanıtlasaydı, yamyamlar mantıkçıyı istedikleri gibi yiyebilirlerdi, ister haşlar, ister kızartırlardı, ve bir çelişki doğmazdı.

Baskı makinasının bulunuşundan sonra kitap sayısı çoğaldı doğal olarak. İlk kez ne zaman kataloglara gereksinildiğini bilmiyorum, ama birgün gereksinildi. Kitaplar çoğalınca, kataloglar da çoğaldı. Kataloglar çoğalınca katalogların da kataloğu yapılmaya başlandı.

Bazı kataloglar kendi adlarını dizelgelerine almıyorlardı, bazı kataloglarsa alıyorlardı (katalog da bir kitap değil midir!). Bir yayımcının aklına "kendi adını içermeyen kataloglar kataloğu" yapmak gelir. Bir sorun çıkar ortaya. Bu hazırlanmakta olan katalog kendi adını içermeli midir, içermemeli midir? Kendi adını içerirse, kataloğun türünden dolayı, adını içermemesi gerekmektedir. Kendi adını içermezse de, yine kataloğun türünden dolayı, kendi adını içermesi gerekmektedir.

Bir paradoks daha! Nasıl çözeceğiz? Hazırlanması bitmemiş bir kataloğun katalog sayılamayacağını önermek bir çözüm müdür? Değildir (ama çözüme yaklaşır), çünkü hazırlanmakta olan kataloğun adını "kendi adını içermeyen, yayımlanmış yada hazırlanmakta olan kataloglar kataloğu" diye değiştirirsek paradoks ortadan kalkmış olmaz.

Biz şu çözümü önereceğiz: Böyle bir katalog yapılamaz. Yukarıdaki çözümlerde de olduğu gibi tanımlanan nesnenin olamayacağını öne sürdük.

## 4. Giritli Epimenides.

M.Ö. 6. yüzyılda yaşamış Giritli düşünür Epimenides'in, "Bütün Giritli'ler yalancıdır," sözleri ünlüdür. Epimenides doğru mu konuşur, yalan mı?Yanıt ne olursa olsun bir çelişki doğar.

Epimenides'in paradoksu, Epimenides'in olmadığı öne sürülerek çözülemez elbet. Bu paradoks iki varsayımdan kaynaklanmaktadır: 1) Her insan ya yalancıdır, ya değildir, ve 2) Yalancılar her zaman yalan söylerler, yalancı olmayanlar hep doğruyu söylerler. Bu varsayımlarımız yanlış. Çünkü bu varsayımlara göre Epimenides ne yalancı olabilir, ne de olmayabilir. Bir kez daha çözdük paradoksu.

## 5. Yukarıdaki Paradoksların Ortak Yönü[2].

Yukarıdaki paradoksların herbirinde özne kendinden sözediyordu. Birinci paradoksta, mantıkçı kızartılacağını ileri sürüyordu. İkinci paradokstaki berber, tüm köylülerle, dolayısıyla kendisiyle de, ilgili bir sav ortaya atıyordu. Üçüncü paradokstaki katalog tüm kataloglarla, dolayısıyla kendisiyle de ilgili. Dördüncü paradokstaki Giritli Epimenides ise tüm Girit-li'lerle, dolayısıyla kendisiyle de, ilgili bir tümce söylüyor.

## 6. Daha ciddi bir paradoks.

Giritli Epimenides'in paradoksuna çok benzer bir paradoks daha vardır: "Bu tümce yanlıştır," tümcesini ele alalım. Tümce kendisinden sözediyor ve çelişki yaratıyor. Bu paradoksu "böyle bir tümce yoktur" diyerek çözümleyemeyiz. Tümce ortada! "Her tümce ya doğru, ya da yanlış değildir" çözümüyse işimize gelmez. Çünkü birazdan matematik yapacağız ve matematikte her tümce ya doğru, yada yanlıştır[3]. Ne yapmalıyız? Konumuz felsefe değil, ve bu paradoksun yarattığı felsefi sorunları düşünürlere bırakalım. Konumuz matematik ve görüldüğü gibi eğer "bu tümce yanlıştır" tümcesine benzer bir tümce matematiksel dilde yazılabilirse matematiğin çelişkili olduğu ortaya çıkar. Neyse ki günümüzün matematikçilerinin çoğunluğu tarafından kabul edilen matematikte, "bu tümce yanlıştır" tümcesine benzer bir tümcenin yazılamayacağı Polonyalı matematikçi Alfred Tarski tarafından kanıtlanmıştır[4]. Bundan matematiğin çelişkisiz olduğu çıkmaz elbet, yalnızca buna benzer bir çelişkinin matematikte raslanmadığı anlaşılır.

## 7. Matematikte çelişki:

"Matematikte çelişki" kavramı tarih boyunca değişmiştir. Yunanlılar, $\sqrt{2}$ sayısının kesirli sayı olmadığını anlayınca, önce çelişkinin doğada var olduğunu sanmışlar, daha sonra omuz silkip kesirli olmayan sayıların varlığını kabul etmek zorunda kalmışlardır.

Dini ve felsefi inançların da matematikçileri çelişkide bıraktığı olmuştur. Örneğin, sonsuz kavramı birçok matematikçiyi "çelişkiye" düşürmüştür. Zeno'nun ünlü paradokslarının her biri "sonsuz" kavramından kaynaklanmıştır.

[2] Yukarıdaki paradoksların benzerlerini okur [5]'da bulabilir

[3] Matematiksel bir tümcenin doğru olmasıyla, kanıtlanabilir olması ayrı anlamlara gelir.

[4] [7, Sayfa 41].

İnanç ve sezgilerle matematiğin çelişmesi, bugünkü anlamıyla, matematikte bir çelişki değildir. Bugünkü anlamıyla matematikte çelişki, matematiksel bir tümcenin hem doğruluğunun, hem de yanlışlığının kanıtlanmasıdır. Örneğin bugün matematikte kabul edilen belit (aksiyom) ve kanıtlama yöntemleriyle $2 \neq 2$ tümcesini kanıtlayabilirseniz o zaman bir çelişki elde etmiş olursunuz (çünkü $2 = 2$ tümcesi matematikte bilinen bir teoremdir!)

Matematikte çelişki var mıdır? Bu soru matematikçileri uzun yıllar zorlamıştır. 1930 yılı dolaylarında Kurt Gödel matematikte çelişkinin olmadığını kanıtlamamızın olanaksız olduğunu kanıtlamıştır[5]. Gödel'in bu teoreminden matematikte çelişki olmadığı sonucu çıkmaz. Gödel yalnızca matematiğin çelişkisiz olduğunun kanıtlanamayacağını kanıtlamıştır.

Yazımızın geri kalan bölümünde – sonradan giderilen – matematiksel bir çelişkiyi (paradoksu) konu edeceğiz[6].

## 8. Russell Paradoksunun Tarihçesi:

Yukarıda sözünü ettiğimiz paradoksların bir benzerini Bertrand Russell (1872-1970) 1901 yılında, daha henüz 28 yaşındayken bulmuştur[7]. O günün matematiğinin çelişkiden yoksun olmadığını gösteren bu paradoks tahmin edileceği gibi matematikçileri sarsmış ve onları matematiğin temelleri üzerine daha derin düşünmeye zorlamıştır[8].

Russell paradoksunun ortaya çıkışı oldukça trajiktir. Yazmadan edemeyeceğim. Modern mantığın kurucularından sayılan Alman matematikçisi ve mantıkçısı Frege (1848-1925) 1893 yılında ünlü **Aritmetiğin Temelleri** adlı yapıtının birinci cildini yayımlamıştır[9]. Bu yapıtında Frege aritmetiği sağlam temellere dayanan bir kümeler kuramına indirgemek istemiştir. İkinci cildin yazılması oldukça zaman alır[10]. Belki de bu gecikmenin nedeni çok karmaşık ve matematikçilerin alışık olmadıkları bir dilde yazılan birinci cildin Frege'in umduğu ve görmesi gereken ilgiyi görmemesidir. 1902 yılında yapıtın ikinci cildinin yazılması tamamlanmış ve baskıya verilmiştir. İşte tam bu sırada, 54 yaşındaki Frege, 30 yaşındaki Bertrand Russell'dan "Sevgili meslektaş" diye başlayan 16 Haziran 1902 tarihli bir mektup alır[11]. Bu mektupta Russell, Aritmetiğin Temelleri'nin birinci cildini okuduğunu, çok yararlandığını, çok sevdiğini belirtir, Frege'i göklere çıkarır, ikinci cildi dört gözle beklediğini söyler. Mektubun ortalarında da bulduğu paradoksu açıklar. Frege mektubu okuduğunda uğradığı düş kırıklığının boyutunu tahmin etmek zor olmasa gerek. Çok emek verdiği baskıdaki yapıtı, düşünceleri, ve yaşamını adadığı, temelini kurduğunu sandığı bilim birden yok olup gitmiştir. Kitabını baskıdan çekip temel değişiklikler yapması için çok geçtir. Bir sonsöz yazmakla yetinmek zorunda kalır. Frege, Russell'ın mektubunu 22 Haziran 1902 günü yanıtlar, yani Russell'ın mektubunu yazdığı günden tam altı gün sonra[12]. Bu çok ilginç mektuptan alıntılar sunmak istiyorum:

"Sevgili meslektaş,

16 Haziran tarihli ilginç mektubunuz için çok teşekkürler. Benimle çoğu konuda aynı düşüncede olmanıza ve çalışmamı ayrıntılarıyla tartışmak istemenize sevindim. İsteğiniz üzerine aşağıda adlarını bulacağınız yayınlarımı yolluyorum [...]

Sizin elinizle yazıldığını sandığım boş bir zarf geldi postadan. Galiba bana birşey göndermek istemiştiniz ve o şey yanlışlıkla kayboldu. Eğer kuşkum doğruysa inceliğiniz için teşekkür ederim. Zarfın ön yüzünü mektubuma iliştiriyorum.

[5] örneğin [7, Chapter 1, §14, Theorem 14.1]'e bakınız.

[6] Matematikte çelişki nasıl giderilir? Matematiği değiştirerek! Yani matematikte kabul edilen belitleri (aksiyomları), ve gerekliyse kanıt yöntemlerini, değiştirerek.

[7] [9, sayfa 101-107].

[8] Aslında matematikte ilk ciddi çelişkiyi bulan Bertrand Russell değildi. 1897 yılında Burali-Forti (1861-1931) adında bir ıtalyan matematikçi birazdan açıklayacağımız Russell paradoksunun bir benzerini bulmuştu [1]. Burali-Forti'nin paradoksundan Russell'ın haberi vardı. Hatta 1903 yılında Russell bu paradoksu ortadan kaldırdığını sanmıştı yanlışlıkla [9, sayfa 43]. Bu yayımından iki yıl sonra, Russell, Burali-Forti paradoksunun kolay kolay giderilmeyecek önemli bir paradoks olduğunu kavramış ve [10]'de paradoksu ortadan kaldırmanın yollarını aramıştır. Russell gerçek çözüme *tipler kuramını* kurarak ulaşmıştır [11]. Yazının sonunda kısaca bu kuramdan söz edeceğiz..

Neden bugün Burali-Forti'nin paradoksunun Russell paradoksu kadar ünlü olmadığını bilmiyorum. Belki de Russell paradoksunun daha kolay anlaşılır olduğundandır.

[9] [3].

[10] [4].

[11] [6, sayfa 124-5].

[12] [6, sayfa 127-8].

[...]

Bulduğunuz çelişki beni çok büyük şaşkınlığa, belki büyük üzüntüye demek daha doğru olur, uğrattı, çünkü, aritmetik kuramını dayandırdığım temeli sarstı. Bana öyle geliyor ki [...] beşinci kuralım yanlış (20. bölüm, sayfa 36), 31. bölümde sunduğum açıklamalar [yeterli değil]. Durum öylesine ciddi ki, 5. kuralın yanlışlığı, salt öne sürdüğüm temeli sarsmakla kalmıyor, galiba aynı zamanda aritmetiğin sağlam bir temele dayandırılamayacağını da gösteriyor. [...] Her durumda buluşunuz çok önemli ve – şimdilik bir müjde niteliğini taşımasa da – ilerde mantıkta büyük ilerlemelere neden olabilir.

[...]

*Grundgesetze*'nin[13] ikinci cildi yakında çıkacak. Kitabın sonuna bulduğunuz çelişkiden sözeden bir ek yazacağım elbet. Keşke doğru görüş açısına zamanında sahip olsaydım[14].

Saygılarımla,

G. Frege"

Frege kitabının sonsözünün başında şöyle yazar:

"Bir bilim insanı için, yapıtı biter bitmez temellerinin yıkılmasından daha korkunç bişey düşünülemez. Yapıt tam baskıya hazırlanırken Bay Bertrand Russell'dan aldığım bir mektup beni işte bu duruma soktu."

## 9. Russell'ın Paradoksu:

Yazının bundan sonrasında Russell'ın bu paradoksunu açıklamaya çalışacağız[15].

Sanıldığının tersine matematikte küme kavramı bu yüzyılda ortaya çıkmamıştır. Bu kavram, açıkça adı söylenmese de, Yunanlılar'dan beri vardı[16]. Yalnız bir nesnenin küme olabilmesi için bir takım koşulların gerektiği bilinmiyordu. Akla gelebilecek tüm nesnelerin bir küme oluşturabileceği sanılıyordu. Hele küme gibi "doğal" bir kavramın günün birinde matematiği çelişkiye düşüreceği akıllara hiç gelmiyordu. 19. yüzyılın sonuna dek, matematikçiler gördükleri, imgeledikleri her matematiksel nesne topluluğuna küme adını vermekten çekinmediler. Tam sayılar kümesi, çift sayılar kümesi, bir düzlemin noktaları kümesi, bir düzlemin eğrileri kümesi, bir düzleme çizilebilen dikdörtgenler kümesi, bu kümelerin bileşimi, bir kümenin alt-kümeleri kümesi... Her topluluk bir küme oluşturabilirdi. Hatta tüm kümeler kümesi de... Küme o zamanların matematikçileri için sezgisel bir kavramdı[17]. Yıllar boyunca matematikçiler bir kümenin oluşması için kısıtlayıcı koşullara gerek görmediler. Biz de kümeyi bu anlamda alalım şimdilik: bir küme öğeler topluluğudur. Eğer $x$, $A$ kümesinin bir öğesiyse, bu matematikte,

$$x \in A$$

olarak gösterilir. Eğer $x$, $A$ kümesinin bir öğesi değilse,

$$x \notin A$$

yazarız. Örneğin, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesiyse, yani

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

ise,

$$5 \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt{4} \in \mathbb{N}$$

dir. Ama

$$1/2 \notin \mathbb{N}$$

$$-3 \notin \mathbb{N}$$

$$\sqrt{3} \notin \mathbb{N}$$

$$\pi \notin \mathbb{N}$$

dir.

Eğer $A$ bir kümeyse, $A$ kümesinin belli bir özelliğe (iyeliğe) sahip öğeleri bir başka küme oluştururlar ($A$ kümesinin bir *altkümesi*dir bu yeni küme). Örneğin, yukarıdaki $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin "çift olma" özelliğini taşıyan öğeleri, $2\mathbb{N}$ olarak simgelenen, çift doğal sayılar kümesini oluştururlar.

[13] [3, 4].

[14] Mektubun aslı Almanca. Yukarıdaki çevirim [6]'deki İngilizce çeviriden. Son tümce İngilizce'ye şöyle çevrilmiş: "If only I had the right point of view for that!" Tam ne anlama geldiğinden emin değilim bu tümcenin. İki anlama gelebilir: Ya Frege kitabını yazarken Russell paradoksunu düşünemediğine hayıflanıyor, yada ek olarak ne yazacağını bilmiyor. Sanıyorum birinci olasılık geçerli.

[15] Russell'ın paradoksu, Russell'dan bağımsız olarak Zermelo (1871-1953) tarafından da bulunmuştur. 1908 yılında yayımlanan bir yazısına [13] Zermelo şöyle bir dipnot düşmüştür: "Bu paradoksu ben de Russell'den bağımsız olarak bulmuş ve 1903 yılında aralarında Profesör Hilbert'in de bulunduğu birkaç matematikçiye bildirmiştim."

[16] Kümeler kuramını ilk olarak Alman Matematikçi Georg Cantor (1845-1918) ortaya atmıştır.

[17] Bugünün matematiğinde de kümenin ne demek olduğu tam bilinmiyorsa da, her nesneler topluluğunun bir küme olmayabileceği biliniyor. Bugün, bazı nesneler topluluklarına "küme" adını vermek belitlerle yasaklanmıştır. Yazının sonunda bu konuya kısaca değineceğiz.

Diyelim tüm kümeler bir küme oluşturuyor. Bu kümeye $A$ adını verelim. $A$ kümesi "evrendeki" tüm kümeleri içeriyor. Yukarıdaki $\mathbb{N}$ kümesini de, $2\mathbb{N}$ kümesini de... Yani "$\mathbb{N} \in A$" ve "$2\mathbb{N} \in A$" matematiksel tümceleri doğru tümceler. Daha genel olarak, eğer $x$ herhangi bir kümeyse, "$x \in A$" matematiksel tümcesi doğrudur. $A$ da bir küme olduğundan, "$A \in A$" matematiksel tümcesi de doğrudur. Demek, $A$ kendi kendisinin bir öğesi. Öte yandan, $\mathbb{N}$ kümesi kendi kendisinin bir öğesi değil, çünkü $\mathbb{N}$ kümesinin öğeleri doğal sayılar ve $\mathbb{N}$ bir doğal sayı değil. Demek ki "$\mathbb{N} \in \mathbb{N}$" matematiksel tümcesi yanlış ve "$\mathbb{N} \notin \mathbb{N}$" matematiksel tümcesi doğru.

Şimdi $A$ kümesinin "kendini içermez" özelliğini taşıyan öğelerinden oluşan altkümeyi ele alalım. Eğer bu kümeye $B$ adını verirsek, $B$ kendini içermeyen kümeler kümesidir. Yani $B$'nin öğeleri kümeler, ve kendini öğe olarak içermeyen kümeler[18]. Yani $x \in B$ ancak ve ancak $x \notin x$ ise. Örneğin, yukarıdaki paragrafa göre, $A \notin B$, ama $\mathbb{N} \in B$. şimdi şu soru üzerine düşünelim: $B$ kümesi, $B$'nin bir öğesi midir? Yani, $B$ kendini öğe olarak içerir mi?

Önce $B$'nin kendi kendisinin bir öğesi olduğunu varsayalım. Yani "$B \in B$" matematiksel tümcesinin doğru olduğunu varsayalım. Eğer $B$, $B$'nin bir öğesiyse, o zaman $B$, $B$'nin bir öğesi olmamalı. Çünkü $B$, bu tür kümeleri, yani kendisinin öğesi olan kümeleri, kapsamıyor.

Şimdi de $B$'nin kendi kendisinin öğesi olmadığını varsayalım. Yani "$B \notin B$" matematiksel tümcesinin doğru olduğunu varsayalım. O zaman – $B$ kümesinin tanımına göre – $B$, $B$'nin bir öğesi olmalı.

Bir çelişki elde ettik[19].

İşte Bertrand Russell'ın paradoksu.

Bu paradoks, kümeler kuramının öbür paradoksları gibi, bugün ortadan kalkmıştır. Kümeler kuramını değiştirmek, daha sağlam temellere oturtmak gerekmiştir bunun için. Bertrand Russell, paradoksunu ortadan kaldırmak amacıyla, 1908 yılında *tipler kuramı* adı verilen bir kuram ortaya atmıştı[20]. Tipler kuramı kümeleri derecelendirir. Örneğin, beşinci dereceden bir kümeyi tanımlamak için ancak birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü dereceden kümeler kullanılabilir. Böylece yukarıda $A$ adını verdiğimiz, "tüm kümeler kümesi" diye bir küme matematikte yasaklanmış olur ve Russell'ın paradoksu paradoks olmaktan çıkar. Yani, Russell akla gelen her nesnenin küme olmasını yasaklayarak, matematiği değiştirmiş, (şimdilik) çelişkisiz bir matematik yaratmıştır.

Ancak, Russell'ın tipler kuramında çalışmak matematikçilere zor gelmiştir. Örneğin bu kuramda iki kümenin eşit olduğunu kanıtlamak için bin dereden su getirmek gerekir. Matematikçiler zor olan hiç birşeyi sevmediklerinden, tipler kuramını daha basit bir kuramla değiştirmişlerdir[21].

Daha önce de dediğimiz gibi bugünkü matematik sisteminde çelişki olmadığını kanıtlayamayız[22]. Gödel kanıtladı bu olanaksızlığı.

[18] Matematiksel olarak $B$'nin tanımı şöyle verilir:

$$B = \{x \in A : x \notin x\}.$$

$A$, tüm kümeler kümesi olduğundan, bunu

$$B = \{x : x \notin x\}$$

olarak da yazabiliriz. Yani

$$x \in B \iff x \notin x$$

matematiksel tümcesi doğrudur.

[19] Bu çelişki matematiksel olarak kolayca anlaşılır: Bir önceki dipnottaki $B$ kümesinin tanımı olan $\forall x\ (x \in B \iff x \notin x)$ matematiksel tümcesinde, $x = B$ alırsak, $B \in B \iff B \notin B$ elde ederiz.

[20] [11]. Tipler kuramına benzer bir kuram [9]'da da vardır. Ancak Russell bu konuda düşüncelerini bir süre terkedip, [10]'de paradoksu çözmenin (yada yok etmenin) başka yollarını aramıştır.

[21] Kümeler kuramının belitlerine *kapsama düzenlemesi* (comprehension scheme) adı verilen bir belit eklenerek yapılmıştır bu değişiklik. Bu belite göre eğer $C$ bir kümeyse ve $\phi(x)$ bir formülse, $C$'nin $\phi$ özelliğini taşıyan öğeleri bir başka küme oluştururlar. Burada önemli olan $\phi$ özelliğini taşıyan "evrendeki" tüm öğelerin değil, yalnız $C$'dekilerin bir küme oluşturmasıdır. Yukarıdaki $A$ nesnesi bu belite göre oluşturulmadığından, $A$'nın küme olup olmadığından hemen emin olamayız, ve bugünün matematiğinde $A$'nın bir küme olamayacağı kanıtlanmıştır. (Bundan $A$'nın bir küme olamayacağını çikarmak yanlış olur. Eğer matematik çelişkiliyse, $A$'nın küme olduğu – çelişki kullanılarak – kolaylıkla kanıtlanabilir)

[22] "Bugünkü matematik sistemi" demekle günümüz matematikçilerinin büyük çoğunluğunun kabul ettiği kümeler kuramı demek istiyorum. ZFC adı verilen bu kuramın ilk belitleri 1908 yılında Zermelo (ZFC'nin Z'si) tarafından bulunmuştur [14]. 1920'lerde Fraenkel [2] (ZFC'nin F'si), Skolem [12] ve Mirimanov [8] birbirinden bağımsız, *yerleştirme beliti* (axiom of replacement) adı verilen bir belitin eklenmesini önermişlerdir. ZFC'nin C'siyse *seçme beliti* (axiom of choice) adı verilen ve büyük kavgalara neden olan çok özel bir beliti simgeler.

Peki, matematikte birgün çelişki bulunursa ne olur? çelişkisine bağlı. Matematikçilerin genel kanısı şu: Gelecekte birgün matematikte bir çelişki bulunursa, bu çelişki belitlerde bir-iki küçük değişiklik yapılarak giderilebilir; olası bir çelişki Matematik'i yıkamayacağı gibi, sarsamaz bile, olsa olsa şöyle biraz titretir.

## KAYNAKÇA


[1] Cesare Burali-Forti, *Una questione sui numeri transfiniti*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo 8 (1897) 154-164. Yazının ıngilizce çevirisi için [6]'ye bakınız.

[2] A.A. Fraenkel, *Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre*, Math. Ann. 86 (1922) 230–237.

[3] Gottlob Frege, **Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet**, 1. cilt, Olms, Hildesheim, Almanya, 1893.

[4] Gottlob Frege, **Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet**, 2. cilt, Olms, Hildesheim, Almanya, 1903.

[5] Martin Gardner, Aha! Gotcha, Paradoxes to puzzles and delight, W.H. Freeman and Company, New york, 1981.

[6] Jean van Heijenoort, **From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic**, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, ABD, 1967.

[7] Kenneth Kunen, **Set Theory, An Introduction to Independence Proofs**, North Holland, Studies in Logic 1980, ikinci baskı 1983.

[8] D. Mirimanov, *Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fondamental de la théorie des ensemble*, Enseig. Math. 19 (1917) 37–52.

[9] Bertrand Russell, **The Principles of Mathematics**, 1. cilt, Cambridge University Press, Cambridge, İngiltere 1903.

[10] Bertrand Russell, *On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types*, Proceedings of the London Mathematical Society 4 (1905) 29–53.

[11] Bertrand Russell, *Mathematical logic as based on the theory of types*, American Journal of Mathematics 30 (1908) 222–262.

[12] T. Skolem, *Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls...*, Skrifter utgit av Videnskappsekkapet i Kristiania, I Klasse, 3 (Oslo 1919).

[13] Ernst Zermelo, *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung*, Mathematische Annalen 65 (1908) 107–128.

[14] *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I*, Math. Ann. 65 (1908) 261–281.


## OLİMPİYAT TAKIMIMIZ BELİRLENDİ

4 Nisan 1993 Pazar günü ODTÜ Matematik Bölümü'nde yapılan bir sınav ile 34. Uluslararası Matematik Olimpiyatı'na katılacak olan takımımız belirlendi. Sınav her biri üçer saatlik iki oturumdan oluşmuştu. Daha önceki çeşitli hazırlık çalışmalarına ve seçmelere katılan 34 öğrenciye herbir oturumda üçer soru soruldu. Yapılan değerlendirme sonunda, ülkemizi temsil etmek üzere:

| | |
|---|---|
| Hüseyin Cahit AKIN | (Eskişehir Anadolu Lisesi, Lise 3) |
| Hasan Fehmi ATEŞ | (Bursa Anadolu Lisesi, Lise 2) |
| Murat ATLAMAZ | (Özel Samanyolu Erkek Fen Lisesi, Lise 2) |
| Tamer KAHVECİ | (Özel Samanyolu Erkek Fen Lisesi, Lise 3) |
| Kerem LİMON | (Robert Lisesi, Lise 3) |
| Itır MOĞULTAY | (Robert Lisesi, Lise 3) |

seçildiler. Arkadaşlarımızı kutlar, kendilerine bu zor görevlerinde başarılar dileriz.