

CANTOR KÜMELERİ

H. Turgay Kaptanoğlu *

Yazımızın başlığında adı geçen Alman matematikçisi Georg Cantor (1845-1918), modern matematiğin temeli olan kümeler teorisinin kurucusu olarak kabul edilir. Cantor, 19. yüzyılın sonlarında yazdığı makalelerinde, sonsuzluğu ve sonsuz kümeleri matematiksel ciddiyetle inceleyen ilk kişidir. Çeşitli sonsuzlukları birbirleriyle karşılaştırmış ve sonsuz büyüklüklerin de kendi aralarında bir aritmetiği olduğunu fark etmiştir. Sonsuzluklarla ilgilenen okurlara bu derginin daha önceki bir sayısındaki (cilt:2, sayı:5, sayfa:1-9) bir yazıyı öneriyoruz.

Bu yazıda inceleyeceğimiz kümeleri Cantor, konuya oldukça ilgisiz gibi görünen trigonometrik serilerle ilgili bir problemi çözmek için bulmuştur. Bu kümelerin insanın sezgisine çok aykırı gelen özellikleri vardır. Bundan dolayı daha çok, ilk bakışta doğru gibi görünen bazı iddiaların yanlışlığını göstermede örnek olarak kullanılırlar.

A. Cantor'un Üçte Birlik Kümesi

Önce en basit haliyle bir Cantor kümesinin nasıl inşa edildiğini göreceğiz. Reel sayılardaki $[0, 1]$ kapalı aralığını C_0 ile gösterelim. C_0 bizim evrensel kümemiz olacak ve bütün işlemleri onun içinde yapacağız. C_0 'in tam ortasındaki üçte birlik kısım olan

$$J_{1,1} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

açık aralığını çıkartalım. Geriye uzunlukları $\frac{1}{3}$ olan iki kapalı aralık kalır:

$$I_{1,1} = \left[0, \frac{1}{3} \right] \quad \text{ve} \quad I_{1,2} = \left[\frac{2}{3}, 1 \right].$$

Bunların ikisine birden C_1 diyelim; yani $C_1 = I_{1,1} \cup I_{1,2}$. Kümemizin inşasının ilk adımını böylece tamamladık.

Şimdi, $I_{1,1}$ ve $I_{1,2}$ 'den, ortalarındaki üçte

birlik açık aralıklardan meydana gelen

$$V_2 = J_{2,1} \cup J_{2,2} = \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9} \right] \cup \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9} \right]$$

kümesini atalım. Geriye kalan C_2 kümesi uzunlukları $\frac{1}{9}$ olan dört kapalı aralıktan oluşur:

$$C_2 = I_{2,1} \cup I_{2,2} \cup I_{2,3} \cup I_{2,4} \\ = \left[0, \frac{1}{9} \right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3} \right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9} \right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1 \right].$$

Yukarıda $V_1 = J_{1,1}$ de diyebiliriz. Üçüncü aşamada ise atılanlar

$$V_3 = J_{3,1} \cup J_{3,2} \cup J_{3,3} \cup J_{3,4} \\ = \left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27} \right) \cup \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27} \right) \\ \cup \left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27} \right) \cup \left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27} \right)$$

ve kalanlar

$$C_3 = I_{3,1} \cup I_{3,2} \cup I_{3,3} \cup I_{3,4} \\ \cup I_{3,5} \cup I_{3,6} \cup I_{3,7} \cup I_{3,8} \\ = \left[0, \frac{1}{27} \right] \cup \left[\frac{2}{27}, \frac{1}{9} \right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{7}{27} \right] \\ \cup \left[\frac{8}{27}, \frac{1}{3} \right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{19}{27} \right] \cup \left[\frac{20}{27}, \frac{7}{9} \right] \\ \cup \left[\frac{8}{9}, \frac{25}{27} \right] \cup \left[\frac{26}{27}, 1 \right]$$

kümeleridir.

Genel olarak n 'nci aşamada atılan açık aralıklar 2^{n-1} tanedir ve

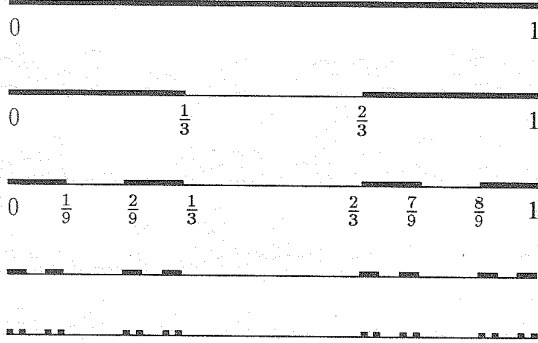
$$V_n = J_{n,1} \cup \dots \cup J_{n,2^{n-1}} = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} J_{n,k}$$

ile gösterilirler. Kalan kapalı aralıklar ise 2^n tanedir ve

$$C_n = I_{n,1} \cup \dots \cup I_{n,2^n} = \bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k}$$

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi.

ile gösterilirler. V_n ve C_n 'yi meydana getiren her bir parçanın uzunluğu $\frac{1}{3^n}$ 'dir ve bu parçalar birbirlerinden ayrıktır. İlk bir kaç aşamada elde edilenler Şekil 1'de görülüyor.



Şekil 1

Okuyucuya düşen görev, burada ve aşağıda sözü edilen bütün kümeleri şekilde bulmak ve verilen eşitlikleri kontrol etmektir. Bu kümeler arasındaki bazı bağıntıları yazalım:

$$V_n \cup C_n = C_{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

bize bir önceki aşamadaki C_{n-1} kümesinin atılan (V_n) ve kalan (C_n) kısımlardan meydana geldiğini söyler.

$$[0, 1] = C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \dots$$

ise bize n 'nci aşamada kalan kısımların, bir önceki aşamada kalan kısımların bir parçası olduğunu belirtir. Dikkatli okurlar, $n = 1, 2, 3, \dots$ ve $k = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$ için

$$I_{n,2k-1} \cup J_{n,k} \cup I_{n,2k} = I_{n-1,k}$$

eşitliğinin de doğru olduğunu da görmüşlerdir. Bu eşitlik, atılan ve kalan parçaların daha ayrıntılı bir hesabını tutar. Bir diğer nokta da, n arttıkça V_n kümelerinin $[0, 1]$ aralığının daha fazla kısmını kapladıkları, C_n kümelerinin de daha fazla köşeye sıkıştığıdır.

Artık atma işlemini elimize geçen her kapalı aralık için yapıp, bu süreci hiç bir sınır tanımadan devam ettirelim; yani n 'yi sonsuza gönderebiliriz. O zaman iki yeni kümemiz daha olur:

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = V_1 \cup V_2 \cup \dots$$

ve

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = C_1 \cap C_2 \cap \dots$$

V atılan kümelerin hepsidir; C de elimizde kalan kısımlardır. Tanım gereği,

$$V \cup C = [0, 1] \quad \text{ve} \quad V \cap C = \emptyset \quad (1)$$

olduğu açıktır.

Tanım. C 'ye Cantor kümesi adı verilir.

Özellik K1. Cantor kümesi, $[0, 1]$ kapalı aralığının bir alt kümesidir.

İlk bakışta C 'de bir şey kalmamış gibi görünse de, C boş küme değildir; örneğin 0 ve 1 noktaları C 'dedir; yani $V \neq [0, 1]$. Hatta, $I_{n,k}$ kapalı aralıklarının her birinin uç noktaları, hep ortadan attığımız için, C 'dedir. Ama sonsuz sayıda $I_{n,k}$ aralığı vardır.

Özellik K2. Cantor kümesi sonsuz sayıda nokta içerir.

Akla gelebilecek bir soru, C 'de uç noktalarından başka noktalar da olup olmadığıdır. Bu sorunun cevabını B kısmında K7 özelliğinde vereceğiz.

Açık küme diye açık aralıkların sonlu veya sonsuz bileşimlerine diyoruz. Açık kümelerin tümleyenlerine de kapalı kümeler denir. C_n kümelerinin her biri kapalıdır, çünkü sonlu sayıda kapalı aralığın bileşimidir. V_n kümelerinin her biri açıktır, çünkü açık kümelerin bileşimidir. V ise açık kümelerin bileşimi olduğundan açıktır. C kapalı kümelerin kesişimidir; dolayısıyla kapalıdır. Bunu görmenin bir başka yolu da, (1) denklemlerini kullanmaktır.

Özellik K3. Cantor kümesi kapalı bir kümedir.

Biraz da elde ettiğimiz kümelerin uzunluklarını hesaplayalım. A kümesinin uzunluğunu $m(A)$ ile göstereyim. Daha önce de söylediğimiz gibi, $1 \leq k \leq 2^n$ ve $1 \leq l \leq 2^{n-1}$ için,

$$m(I_{n,k}) = m(J_{n,l}) = \frac{1}{3^n}$$

doğrudur. Bu kümeler ayrıktır olduğundan, C_n ve V_n 'nin uzunlukları kendilerini meydana getiren eşit uzunluktaki aralıkların uzunluklarının toplamıdır. Hesaplırsak,

$$m(C_n) = \frac{2^n}{3^n} \quad \text{ve} \quad m(V_n) = \frac{2^{n-1}}{3^n}$$

buluruz. V_n 'ler de birbirlerinden ayrık olduklarından,

$$m(V) = m(V_1) + m(V_2) + m(V_3) + \dots \\ = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n}$$

yazarız. Elde ettiğimiz bu toplam bir sonsuz geometrik seridir; ilk terimi $a = \frac{1}{3}$ ve ortak çarpanı $r = \frac{2}{3}$ 'tür. $|\frac{2}{3}| < 1$ olduğundan, bu toplamı aşağıdaki şekilde hesaplayabiliriz:

$$m(V) = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 1.$$

Sonra da $m([0,1]) = 1$ ve (1)'i kullanarak $m(C) = 0$ olduğunu görürüz.

Özellik K4. Cantor kümesinin uzunluğu sıfırdır.

Şimdi $\alpha < \beta$ ve $(\alpha, \beta) \subset [0, 1]$ olmak üzere bir açık aralık alalım. $\frac{1}{3^n} < \beta - \alpha$ olacak şekilde büyük bir n bulabiliriz. O zaman (α, β) aralığı, $I_{n,k}$ aralıklarından daha uzun olur ve onların hiç birinin içinde olmaz. Böyle bir aralığın C 'de olmasına imkân yoktur.

Özellik K5. Cantor kümesi hiç bir açık aralık içermez.

B. Üç Tabanına Göre Yazılım

$[0, 1]$ aralığındaki her x sayısı 10 tabanında, yani her zaman kullandığımız sayı sisteminde, $0.x_1x_2x_3 \dots$ şeklinde yazılabilir. Burada x_n 'lerin her biri $0, 1, \dots, 8, 9$ rakamlarından biridir. x_1 onda birler, x_2 yüzde birler, x_3 binde birler, ... basamağını gösterdiğinden, bu açılımı

$$x = 0.x_1x_2x_3 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{10^n}$$

şeklinde de yazabiliriz. x_n 'ler bir noktadan sonra hep 0 da olabilir, $\frac{9}{16} = 0.5625000 \dots = 0.5625$ örneğinde olduğu gibi. 1 için $0.999 \dots$ açılımını kullanırız. Bu konuda çok daha fazla bilgi, bu dergide daha önce çıkan bir yazıdan (cilt:1, sayı:2, sayfa:2-5) elde edilebilir.

Aynı tip bir açılımı, x_n 'ler için yalnız 0, 1 ve 2 rakamlarını kullanarak, 3 tabanına göre de yapabiliriz. O zaman

$$x = 0.x_1x_2x_3 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$$

olur. x_1 üçte birler, x_2 dokuzda birler, x_3 yirmi yedide birler, ... basamağıdır. Bazı sayılar için bu cinsten biri sonlu, diğeri sonsuz iki açılım vardır; örneğin $\frac{1}{3} = 0.31 = 0.30222 \dots$ ve $\frac{2}{3} = 0.32 = 0.3111 \dots$. Bu belirsizliği ortadan kaldırmak için, x 'in sonlu açılımının son rakamı 2 ise sonlu açılımı, değilse sonsuz açılımı tercih edeceğiz; yani $\frac{1}{3} = 0.30222 \dots$ ve $\frac{2}{3} = 0.32$ alacağız. Ayrıca $0 = 0.30$ ve $1 = 0.3222 \dots$ kullanacağız. Bu kısımdaki bütün açılımlar 3 tabanında olacaktır.

İddiamız, C_n kümesini meydana getiren her kapalı aralığın sol uçnoktasının açılımının ilk n basamağının yalnız 0 ve 2'lerden ibaret olduğu ve $n+1$ 'inci ve sonraki basamakların hepsinin 0 olduğudur. Bu iddiamızı tümevarım ile ispatlayacağız. $n = 1$ iken, C_1 kümesindeki iki aralığın sol uçnoktaları 0 ve $\frac{2}{3}$ 'tür. Önceki paragrafta gösterildiği gibi, birinin ilk basamağı 0, diğerrinin 2'dir; ve sonraki basamakları 0'dır. Böylece tümevarımın ilk adımını bitirdik.

İkinci olarak, C_n kümesi hakkındaki iddiamızdan, C_{n+1} kümesi hakkındaki iddiamızın doğruluğunu elde edelim. C_n 'nin bileşimindeki aralıklardan biri $[a, b] = [0.3a_1a_2 \dots, 0.3b_1b_2 \dots]$ ise, a_1, \dots, a_n 'nin 0 ve 2'lerden meydana geldiğini ve $0 = a_{n+1} = a_{n+2} = \dots$ olduğunu kabul ediyoruz. C_{n+1} 'in aralıklarından biri $[c, d] = [0.3c_1c_2 \dots, 0.3d_1d_2 \dots]$ ise, yukarıdaki $[a, b]$ gibi bir aralığın orta kısmının atılmasıyla ortaya çıkar. Eğer $[c, d]$ sol tarafta kalan kısma, $c = a$ 'dır. O zaman da yukarıdaki kabul gereği, c_1, \dots, c_{n+1} 'in 0 ve 2'lerden oluştuğu (özellikle $c_{n+1} = 0$) ve $0 = c_{n+1} = c_{n+2} = \dots$ olduğu görülür. Eğer $[c, d]$ sağ tarafta kalan kısma, $n+1$ 'inci adımda atılan ve kalan aralıkların uzunlukları $\frac{1}{3^{n+1}}$ olduğundan dolayı, $c = a + \frac{2}{3^{n+1}}$ 'dir. Fakat $\frac{2}{3^{n+1}} = 0.30 \dots 02$ 'dir ve 2 rakamı $n+1$ 'inci basamaktadır. Yani, hem a 'nın, hem de $\frac{2}{3^{n+1}}$ 'in $n+2$ 'nci ve sonraki basamakları hep 0'dır (ayrıca $a_{n+1} = 0$). Bu da $c_{n+1} = 2$ ve $0 = c_{n+2} = c_{n+3} = \dots$ verir. Böylece tümevarım sona erdi ve iddiamızın doğruluğunu ispatladık.

Bu sonucu şöyle kullanacağız: C_n 'nin aralıklarından birine $[a, b] = [0.3a_1 \dots a_n, 0.3b_1b_2 \dots]$ dersek, a hakkında iddiamız geçerlidir ve $b = a + \frac{1}{3^n}$ 'dir. Fakat $\frac{1}{3^n} = 0.30 \dots 0222 \dots$ yazıldığında, 2'lerden önce tam n tane 0 vardır. O zaman da $b = 0.3a_1 \dots a_n + 0.30 \dots 0222 \dots = 0.3a_1 \dots a_n222 \dots$ olur. $2 = b_{n+1} = b_{n+2} = \dots$ olduğu da

buradan çıkan bir başka sonuçtur. Kelimelerle tekrarlırsak, $[a, b]$ aralığında a 'dan b 'ye giderken değişiklik sadece $n + 1$ 'inci ve sonraki basamaklarda olmaktadır. Başka bir deyişle, $x = 0.3x_1x_2\cdots \in [a, b]$ ise, $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n$ 'dir. Buradan çıkaracağımız sonuç, C_n 'de alınan her hangi bir x noktasının 3 tabanına göre açılımında ilk n basamağın 0 ve 2'lerden oluştuğudur.

n 'nci adımda atılan her açık aralığı $(b, b + \frac{1}{3^n})$ şeklinde yazabiliriz. $b = 0.3a_1\dots a_n222\cdots$ açılımında son 0 rakamı k 'nci basamakta olsun; yani $a_k = 0$ ve $a_{k+1} = \dots = a_n = 2$ olsun. Elimizdeki aralıktaki her hangi bir noktayı $t = 0.3t_1t_2\cdots$ ile gösterirsek, $t_k = 1$ olur, çünkü artık k 'nci basamak değişmek zorundadır ve ayrıca aralığın uzunluğu, yukarıda da gösterildiği gibi, sadece $n + 1$ 'inci ve sonraki basamaklarda değişikliğe izin vermektedir. Örneğin, $n = 1$ iken, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ 'te alınan her t sayısının açılımı $0.31\dots$ ile başlamak zorundadır. $0.31222\cdots$ olduğunda bunu 0.32 diye yazar ve $[\frac{2}{3}, 1]$ 'e girmiş oluruz.

Cantor kümesinde alacağımız bir $x = 0.3x_1x_2\cdots$ noktası bütün C_n 'lerin içinde olacaktır. Bu da bize $n = 1, 2, \dots$ için $x_n = 0$ veya $x_n = 2$ olduğunu söyler. Eğer $t \notin C$ ise, t bir aşamada atılan açık aralıkların birinde olacağından, t 'nin açılımında mutlaka 1 vardır. Şimdi bu ifadeleri birleştirelim:

Özellik K6. *Cantor kümesi tamı tamına $[0, 1]$ aralığındaki, 3 tabanına göre açılımlarında yalnız 0 ve 2 rakamları bulunan sayılardan oluşur.*

Bu sonucu kullanarak, Cantor kümesinde $I_{n,k}$ aralıklarının uçnoktalarından başka eleman bulunup bulunmadığını görebiliriz. Bu uçnoktaların her biri k ve m negatif olmayan birer tamsayı olmak üzere, $\frac{k}{3^m}$ şeklinde yazılabilir. $\frac{1}{4}$ 'ün ise böyle yazılamayacağı açıktır. Fakat,

$$\frac{1}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2n}} = 0.3020202\dots$$

açılımından görüleceği gibi, $\frac{1}{4}$ Cantor kümesindedir. Geometrik seri toplamlarını kullanarak, C 'de bu cinsten diğer sayılar bulmayı okuyuculara bırakıyoruz.

Özellik K7. *Cantor kümesinde $I_{n,k}$ kapalı aralıklarının uçnoktalarından başka noktalar da vardır.*

Bu uçnoktalar gene de C 'nin önemli elemanlarıdır. Verilen bir n için, $k \neq l$ ise, $I_{n,k}$ ve

$I_{n,l}$ birbirlerinden ayrık olduğundan, $x \in C$ ise, x bu tip yalnız bir tek aralıktadır. Diyelim ki $x \in [a_n, b_n]$. Cantor kümesinin elde edilmesinden, n arttıkça, a_n 'lerin arttığını ve b_n 'lerin azaldığını anlarız. Üstelik,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m([a_n, b_n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} = 0$$

olduğundan,

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

sonucunu elde ederiz. Bu yöntemi kullanarak, $x = \frac{1}{4}$ 'e yakınsayan dizilerin

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\} = \{0., 0.302, 0.30202, 0.3020202, \dots\}$$

ve

$$\{b_1, b_2, b_3, \dots\} = \{0.30222\dots, 0.3020222\dots, 0.302020222\dots, \dots\}$$

olduğunu görürüz. x uçnoktalardan biri değilse, a_n 'lerin ve b_n 'lerin hiç biri x 'e eşit değildir.

Özellik K8. *Cantor kümesinin her elemanı, $I_{n,k}$ kapalı aralıklarının uçnoktalarından oluşan, biri artan, diğeri azalan iki tekdüze dizinin limitidir.*

Kapalı ve her noktası, diğer noktalarının bir limiti olarak elde edilebilen kümeler yetkin (veya mükemmel) kümeler denir. Yetkin bir kümenin hiç bir noktası diğerlerinden yalıtık olmaz. Diğer bir deyişle, böyle bir kümenin her noktasının her komşuluğunda gene bu kümeden sonsuz çoklukta nokta vardır. Hatırlanacağı gibi C de kapalı bir kümedir.

Özellik K9. *Cantor kümesi yetkin bir kümedir.*

Okuyucuyu (ve de yazarı) tümevarım ispatlarıyla daha fazla sıkmamak için aşağıdaki özelliği ifade etmekte yetineceğiz.

Özellik K10. *$x \in C$ ise, $\frac{x}{3} \in C$ ve $\frac{2}{3} + \frac{x}{3} \in C$ olur. Ayrıca, $y \in V$ ise, $\frac{y}{3} \in V$ ve $\frac{2}{3} + \frac{y}{3} \in V$ olur. Hatta, $y \in J_{n,k}$ ise, $\frac{y}{3} \in J_{n+1,k}$ ve $\frac{2}{3} + \frac{y}{3} \in J_{n+1,2^k+k}$ de doğrudur.*

Bu kısmı C 'nin çok şartlı bir özelliğiyle kapatalım. Önce bir tanım:

$$C + C = \{x + y : x \in C, y \in C\}.$$

$z = x + y \in C + C$ ise, z 'nin $[0, 2]$ aralığında olacağı açıktır. Ama z hangi noktalara erişebilir?

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n + y_n}{3^n}$$

yazdığımızda, x_n ve y_n yalnız 0 ve 2 değerlerini alırlar; dolayısıyla, $x_n + y_n$ ya 0'dır, ya 2'dir, ya da 4'tür. $x_n + y_n = 2z_n$ dersek, z_n , 0, 1 veya 2 olmalıdır. O halde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{3^n}$$

açılımında $[0, 1]$ aralığındaki her hangi bir sayı çıkabilir. Dolayısıyla

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z_n}{3^n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{3^n},$$

$[0, 2]$ aralığındaki her hangi bir sayı olabilir. Başka bir deyişle, Cantor kümesi $[0, 1]$ aralığına son derece seyrek dağılmış bir küme olmasına ve hiç bir aralık içermemesine rağmen, iki tanesinin küme toplamı bir aralık edebilmektedir.

Özellik K11. $C + C = [0, 2]$.

C. Cantor Kümesinde Kaç Nokta Vardır?

B kısmının başında 10 ve 3 tabanı için yaptığımızı şimdi de 2 tabanında yapalım. $[0, 1]$ aralığında aldığımız bir x sayısını, bilgisayarların yaptığı gibi, x_n 'ler için yalnızca 0 ve 1 değerlerini kullanarak,

$$x = 0.2x_1x_2x_3 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$$

şeklinde yazabiliriz. Gene bazı sayıların iki açılımı vardır; $\frac{1}{2} = 0.21 = 0.20111\dots$ gibi. $1 = 0.2111\dots$ sayısının birinci cinsten açılımı yoktur. 0'ı da ilgi alanımızdan çıkartalım. Eğer ikinci cinsten açılmaları kullanmamayı kabul edersek, $(0, 1)$ açık aralığındaki her sayının bir tek açılımı olur. Bunun faydası, 2 tabanına göre açılımlarda aynı sayıyı iki kere saymamamızdır.

Şimdi Cantor kümesinden 0'ı ve 3 tabanındaki açılımlarında bir basamaktan sonra hep 2'ler olan sonsuz çoklukta noktaları çıkartalım ve kalan noktalara B kümesi diyelim. $\frac{2}{3} = 0.2 \in B$, fakat $1 = 0.222\dots \notin B$ ve $\frac{1}{3} = 0.0222\dots \notin B$ olur.

B 'de alacağımız her x noktasına karşılık, $(0, 1)$ 'de bir y sayısı bulabiliriz; bu işlemin tersini de yapabiliriz. Verilen bir x 'in 3 tabanında açılımındaki 2'leri 1'lere çeviririz ve yeni sayıyı 2 tabanında okuruz; bu y olur. Örneğin, $x = \frac{20}{27} = 0.202$ 'in karşılığı $y = 0.2101 = \frac{5}{8}$ 'dir. Daha açık olarak yazarsak,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$$

noktası

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n/2}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}}$$

sayısına karşılık gelir. Diğer yöndeki gönderim de bu işlemi tersine çeviririz. Kabullenişlerimiz sayesinde, B 'deki her elemanın 3 tabanında ve $(0, 1)$ 'deki her noktanın 2 tabanında tek bir açılımı olduğu için, her iki yöndeki gönderim bire birdir. İlk bakışta $(0, 1)$ 'de $0.20111\dots$ gibi noktalar elde edilmez gibi görünse de, bunlar değişik şekilde de, 0.21 gibi, yazılabilirler ve B 'deki 0.23 gibi sayılardan elde edilirler. Böylece B ile $(0, 1)$ arasında bire bir eşleme kurmuş olduk.

Reel sayılar kümesini \mathbf{R} ile gösterelim ve $f : (0, 1) \rightarrow \mathbf{R}$ olmak üzere

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x(1 - x)} \quad (x \in (0, 1))$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Okurlara, f 'nin $(0, 1)$ üzerindeki grafiğini çizmeyi öneriyoruz.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \in (0, 1)}} f(x) = +\infty \quad \text{ile} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in (0, 1)}} f(x) = -\infty$$

olduğundan ve f de $(0, 1)$ üzerinde sürekli olduğundan, f 'nin değerleri her gerçel sayıyı alır; yani f örtendir. Ayrıca,

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x - x^2)^2} \quad (x \in (0, 1)).$$

Paydaki polinomun kökleri karmaşık sayılar olduğundan, polinom $(0, 1)$ üzerinde ya hep eksi, ya da hep artı işaretlidir. $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} > 0$ olduğundan dolayı, $(0, 1)$ aralığında pay hep pozitif olur. Payda zaten pozitifdir. Dolayısıyla, aralığımızda $f(x) > 0$ 'dir. Bu da f 'nin tekdüze artan ve bunun sonucu olarak da bire bir olduğunu verir. Özetlersek, f fonksiyonu $(0, 1)$ ile \mathbf{R} arasında bire bir eşlemedir.

Böylece B ile \mathbf{R} arasında bire bir eşleme kurabileceğimizi gösterdik. Bu, her ikisinin aynı çoklukta elemanı olduğu anlamına gelir. Cantor kümesi B 'den büyüktür, fakat \mathbf{R} 'nin içindedir. Sonuç olarak, C ile \mathbf{R} 'nin aynı çoklukta eleman içerdiğini anlarız.

Özellik K12. Cantor kümesinde, reel sayılarda olduğu kadar, yani sayılamayacak çoklukta nokta vardır.

D. Lebesgue'in Tekil Fonksiyonu

Henri Lebesgue (1875–1941), modern integral teorisini başlatan Fransız matematikçisidir. 1902'de yayımladığı doktora tezinde, o zamana dek bilinen integral anlayışını genişleterek integrali, sonsuzluklarla daha iyi iş gören ve limit alma işlemi altında daha iyi davranış gösteren hale getirmiştir. Bugün de matematikte en çok kullandığımız integral, Lebesgue integralidir. Bu kısımda tanımlayacağımız fonksiyon, Cantor kümesi üzerinde ilginç özellikleri olan ve türevinin sonsuz sayıda tekil noktası olan bir fonksiyondur.

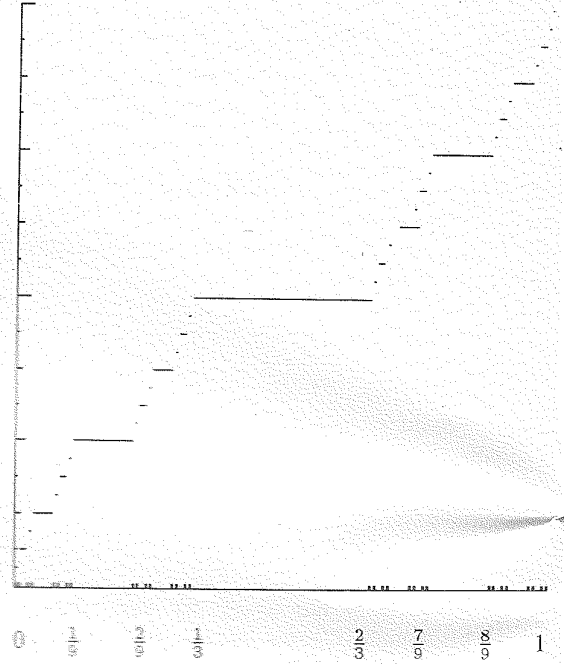
Cantor kümesini inşa ederken attığımız açık aralıklara değişik isimler vererek başlayalım. Her aşamanın sonunda, o ana kadar attığımız (daha önceki aşamalarda attıklarımız dahil) aralıklara $L_{n,k}$ diyeceğiz; burada $k = 1, \dots, 2^n - 1$ değerlerini alır. Örneğin, $L_{1,1} = J_{1,1}$, $L_{2,1} = J_{2,1}$, $L_{2,2} = J_{1,1}$, $L_{2,3} = J_{2,2}$, $L_{3,1} = J_{3,1}$, $L_{3,2} = J_{2,1}$, $L_{3,3} = J_{3,2}$, $L_{3,4} = J_{1,1}$, $L_{3,5} = J_{3,3}$, $L_{3,6} = J_{2,2}$, $L_{3,7} = J_{3,4}$, ... Böylece her aralığın $L_{n,k}$ 'ler cinsinden birden fazla ismi olur. $J_{n,k}$ 'lerin olduğu gibi, $L_{n,k}$ 'lerin de hepsinin bileşimi V kümesidir:

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{2^n-1} L_{n,k} \right).$$

Artık fonksiyonumuzu V üzerinde tanımlayabiliriz:

$$F(x) = \frac{k}{2^n} = c_{n,k} \quad (x \in L_{n,k}) \quad (2)$$

deriz; bu F 'yi her $L_{n,k}$ aralığı üzerinde sabit yapar. Aslında F her aşamada, daha önceki aşamalarda atılan aralıklar üzerinde tekrar tanımlanmaktadır; ama bu önceki tanımları değiştirmeyecek şekildedir, çünkü, $1 \leq k \leq 2^{n-1}$ için, $L_{n+1,2k} = L_{n,k}$ ve $c_{n+1,2k} = c_{n,k}$ 'dir. F 'nin tanımı gereği V üzerinde artan bir fonksiyon olduğu kolayca görülür; yani $x < y$ ise $F(x) \leq F(y)$ 'dir. Ayrıca, $F(0) = 0$ ve $F(1) = 1$ diyelim; şimdi her $x \in V$ için, $0 \leq F(x) \leq 1$ sağlanır. Şekil 2, F 'nin grafiğinin bir kısmını gösteriyor.



Şekil 2

$x \in L_{n-1,k}$ ve $y \in L_{n,k}$ ise,

$$F(y) - F(x) = \frac{k}{2^n} - \frac{k-1}{2^n} = \frac{1}{2^n}$$

olur. $L_{n,k-1}$ ve $L_{n,k}$ aralıkları arasında uzunluğu $\frac{1}{3^n}$ olan $I_{n,k}$ kapalı aralığı vardır. Bu yüzden, $x, y \in V$ ve $y - x < \frac{1}{3^n}$ ise, x ve y artık $n+1$ 'inci ve daha sonraki aşamalardaki açık aralıklardadır; F 'nin artan olma özelliğinden

$$F(y) - F(x) \leq \frac{1}{2^n}$$

elde ederiz. Bu son eşitsizlikten, x ve y 'nin birbirlerine yaklaştıklarında, $F(x)$ ve $F(y)$ 'nin de birbirlerine yaklaştıkları sonucu çıkar. Bu da F 'nin V üzerinde sürekli olduğunu söyler.

Biz F fonksiyonunu, artan olma ve süreklilik özelliklerini bozmadan, bütün $[0, 1]$ aralığı üzerinde tanımlamak istiyoruz. Bunun için F 'yi C üzerinde uygun biçimde tanımlamak yeter. Önce $I_{n,k}$ aralıklarının uç noktalarında, bitişik oldukları $L_{n,k-1}$ ve $L_{n,k}$ 'deki değerleri alacak şekilde tanımlayalım F 'yi. Eğer $I_{n,k} = [a, b]$ ise,

$$F(a) = \frac{k-1}{2^n} \quad \text{ve} \quad F(b) = \frac{k}{2^n} \quad (3)$$

olsun. $x \in C$ bir uçnokta değilse, **K8** özelliğini kullanarak, x 'e yakınsayan tekdüze $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$

KAPTANOĞLU

dizilerini buluruz. F artan olduğundan, $\{F(a_n)\}$ ve $\{F(b_n)\}$ dizileri de tekdüzedir. Üstelik F 'nin değerleri alttan 0 ve üstten 1 ile sınırlı olduğundan, bu son iki dizinin limitleri vardır. Limitlere sırasıyla c ve d diyelim.

$$\begin{aligned} d - c &= \lim_{n \rightarrow \infty} (F(b_n) - F(a_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{2^n} - \frac{k-1}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0 \end{aligned}$$

bize $c = d$ verir ve $0 \leq c \leq 1$. x 'e yakınsayan her dizi, $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizileri arasında kalmak zorundadır. Böyle bir dizinin F altındaki görüntüsü de c 'ye yakınsar. Artık $F(x) = c$ diye tanımlayabiliriz. Böylece F bütün $[0, 1]$ aralığı üzerinde tanımlanmış olur. Böyle bir tanımın F 'nin artanlığını koruyacağı açıktır.

Özellik F1. $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ artan bir fonksiyondur.

Eğer elimizde bir g fonksiyonu varsa ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

olan her $\{x_n\}$ dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x)$$

eşitliği sağlanıyorsa, g fonksiyonu x noktasında sürekli olur. Yukarıdaki F , V üzerinde sürekliydi. C üzerindeki tanımını da sürekli olacak şekilde yaptık.

Özellik F2. $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ sürekli bir fonksiyondur.

$F(0) = 0$ ve $F(1) = 1$ olduğunu hatırlayalım. F 'nin sürekli olmasını Ara Değer Teoremi ile birleştirirsek, F 'nin 0 ile 1 arasında her değeri aldığını görürüz.

Özellik F3. $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ örten bir fonksiyondur.

Şimdi bu fonksiyonun Cantor kümesi üzerinde aldığı değerlere biraz daha yakından göz atalım. $x = 0,3x_1x_2 \dots \in C$ alalım ve **K6** özelliğini hatırlayalım. Göstermek istediğimiz

$$F(x) = F\left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{x_l}{3^l}\right) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{x_l}{2^{l+1}} \quad (4)$$

eşitliğidir. $x = 0$ ve $x = 1$ 'de yapacak bir şey yoktur. **K8** özelliğinden ve F 'nin C üzerindeki

tanımından dolayı, bu eşitliğin doğru olduğunu sadece $I_{n,k}$ 'lerin uçnoktalarında göstermek yeter.

Bir kez daha tümevarım kullanacağız. $n = 1$ halinde, (3)'ten $F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$ ve $F\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}$ 'dir. Aynı zamanda, geometrik dizi toplamı formülü sayesinde,

$$F\left(\frac{1}{3}\right) = F\left(\sum_{l=2}^{\infty} \frac{2}{3^l}\right) = \sum_{l=2}^{\infty} \frac{2}{2^{l+1}} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

ve

$$F\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}$$

olur. (4)'ün, n 'nci aşamadaki bütün kapalı aralıkların uçnoktaları için doğru olduğunu varsayalım. Bunlardan biri $I_{n,k} = [a, b]$ olsun. Uçnoktaların 3 tabanındaki açılımlarının nasıl olduğunu **B** kısmından hatırlayalım. (2)'den ve varsayımımızdan

$$F(a) = F\left(\sum_{l=1}^n \frac{a_l}{3^l}\right) = \sum_{l=1}^n \frac{a_l}{2^{l+1}} = \frac{k-1}{2^n}.$$

$n + 1$ 'inci aşamada $[a, b]$ 'nin ortasından $L_{n+1,2k-1} = (c, d)$ aralığımızı atarız.

$$d = a + \frac{2}{3^n} \quad \text{ve} \quad c = a + \frac{1}{3^n} = a + \sum_{l=n+2}^{\infty} \frac{2}{3^l}$$

olduğundan, $0,3d_1 \dots d_n d_{n+1} = 0,3a_1 \dots a_n 2$ ve $0,3c_1 \dots c_n c_{n+1} c_{n+2} \dots = 0,3a_1 \dots a_n 022 \dots$ olur. (3) ise $F(c) = F(d) = \frac{2k-1}{2^{n+1}}$ verir. Fakat

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{n+1} \frac{d_l}{2^{l+1}} &= \sum_{l=1}^n \frac{a_l}{2^{l+1}} + \frac{2}{2^{n+2}} = F(a) + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{k-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2k-1}{2^{n+1}} = F(d) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{c_l}{2^{l+1}} &= \sum_{l=1}^n \frac{a_l}{2^{l+1}} + \sum_{l=n+2}^{\infty} \frac{c_l}{2^{l+1}} \\ &= F(a) + \sum_{l=n+2}^{\infty} \frac{2}{2^{l+1}} = \frac{k-1}{2^n} + \frac{\frac{1}{2^{n+2}}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{2k-1}{2^{n+1}} = F(c), \end{aligned}$$

(4)'ün doğruluğunu ispatlar.

Özellik F4. $x = 0., x_1 x_2 \dots$ Cantor kümesinde ise,

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}}.$$

F 'nin sağladığı bazı denklemleri görelim şimdi de. $x \in C$ ise

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} + \frac{x}{3} &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^{n+1}} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{x_1}{9} + \frac{x_2}{27} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{3^{n+1}} \end{aligned}$$

olur; son ifadede $x_0 = 2$ diye yazdık. Buradan da, **K10** ve **F4** özelliklerini kullanarak,

$$\begin{aligned} 2F\left(\frac{x}{3}\right) &= 2F\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^{n+1}}\right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+2}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} = F(x) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} 2F\left(\frac{2}{3} + \frac{x}{3}\right) - 1 &= 2F\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{3^{n+1}}\right) - 1 \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+2}} - 1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} - 1 \\ &= \frac{2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} - 1 = F(x) \end{aligned}$$

özdeşliklerini elde ederiz.

$x \in J_{n,k} \subset V$ ise, **K10** özelliğini ve (2)'yi kullanarak,

$$2F\left(\frac{x}{3}\right) = 2\left(\frac{k}{2^{n+2}}\right) = \frac{k}{2^{n+1}} = F(x)$$

ve

$$\begin{aligned} 2F\left(\frac{2}{3} + \frac{x}{3}\right) - 1 &= 2\left(\frac{2^n + k}{2^{n+1}}\right) - 1 \\ &= \frac{2^n + k}{2^n} - \frac{2^n}{2^n} \\ &= \frac{k}{2^n} = F(x) \end{aligned}$$

olduğunu görürüz.

Özellik F5. Lebesgue fonksiyonu, $x \in [0, 1]$ için, aşağıdaki denklemleri sağlar:

$$2F\left(\frac{x}{3}\right) = F(x) \quad \text{ve} \quad 2F\left(\frac{2}{3} + \frac{x}{3}\right) - 1 = F(x).$$

Bunlar gibi, bir fonksiyonun bazı noktalardaki değerlerini başka noktalardaki değerleri cinsinden veren denklemlere fonksiyonel denklemler denir. Bu konuda bir yazı bu dergide daha önce (cilt:2, sayı:4, sayfa:22-25) çıkmıştı. Şimdi okuyuculara (ve de o yazının yazarına) bir kaç sorumuz var: **F5** özelliğindeki denklemleri sağlayan ve F 'nin bazı özelliklerine sahip F 'den başka fonksiyon bulunabilir mi? F 'nin başka hangi özellikleri (sürekli, artan, örten, ...) çözümün sadece F olmasını sağlar?

Fonksiyonumuz V 'nin her bir parçasında sabit değerli ve $m(V) = 1$ olduğundan, $[0, 1]$ üzerinde hemen her yerde, yani uzunluğu 0 olan bir parça dışında, F 'nin türevi $F'(x) = 0$ olur. Böyle fonksiyonlara tekil fonksiyon diyoruz. Bu bize F 'nin yalnız C üzerinde arttığını söyler. $m(C) = 0$ nedeniyle, $\int_0^1 F'(x) dx$ integralini, sadece V üzerinde integral olarak hesaplayabiliriz; tabii Lebesgue integrali kullanarak.

$$\begin{aligned} \int_0^1 F'(x) dx &= \int_V F'(x) dx = \int_V 0 dx \\ &= 0 \cdot m(V) = 0 \cdot 1 = 0 < 1 \\ &= 1 - 0 = F(1) - F(0). \end{aligned}$$

Bu eşitsizlik, klasik

$$\int_a^b g'(x) dx = g(b) - g(a)$$

teoremine aykırı gibi görünür. Fakat bu teorem, g 'nin (a, b) aralığının her noktasında (hemen her yerde olması yetmez) türevli olmasını gerektirdiğinden, çelişki yoktur.

E. Genel Cantor Kümeleri

Yazımızın başlığında birden fazla Cantor kümesinden bahsetmişitk. Son olarak, Cantor kümelerinin genel olarak nasıl elde edilebileceğine kısaca değinelim. Gene $[0, 1]$ 'de kapalı aralıkların tam ortasından parçalar atarız; fakat kalan $I_{n,k}$ kapalı aralıklarının uzunluklarını $\frac{1}{3^n}$ yerine t_n gibi $0 < 2t_n < t_{n-1}$ eşitsizliklerini sağlayan sayılardan seçeriz; o zaman atılan $J_{n,k}$ açık aralıklarının uzunlukları $r_n = t_{n-1} - 2t_n$ olur.