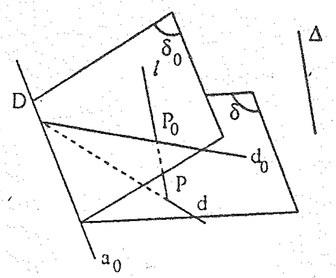
İLGİN* DÜZLEM GEOMETRİ (I)

Hüseyin Demir †

Bu geometriyi aksiyomlu olarak değil, tarihsel ortaya çıkışıyla tanımlamak istiyoruz.

δ_0 ve δ, arakesitleri bir a_0 doğrusu olan iki düzlem olsun (Şekil 1). Bunları kesen bir Δ doğrultusu verildiğinde, Δ ya paralel değişken bir ℓ doğrusu δ_0 ve δ yı P_0 ve P noktalarında kessin.



Şekil 1

δ_0 düzlemini Öklit düzlemi olarak aldığımızda δ_0 dan δ ya sade bir dönüşüm tanımlamış oluyoruz. Bu dönüşüme *ilgin dönüşüm* ve δ düzlemine de *ilgin düzlem* diyeceğiz. Böylece δ_0 daki her $Ş_0$ şekline δ da bir Ş şekli karşılık gelecektir. Ş şekline $Ş_0$ ın ilgin'i, ya da ilgin şekil diyeceğiz.

I. İlgin Bazı Şekiller ve Bağıntılar

Şu soruyu soralım: Öklit düzleminde hangi şekiller ve hangi bağıntılar ilgin dönüşüm altında aynı adlı şekiller ve bağıntılara dönüşür?

Noktalar böyle şekillerdir. (Noktalar noktalara dönüşür). Doğrular da öyle. (Doğrular doğrulara dönüşür). Bunu da şöyle açıklarız. Öklit düzlemindeki bir doğru d_0 ise bunu kesen ve Δ ya paralel olan ℓ doğruları bir düzlem oluşturur. Bu düzlemin δ düzlemiyle arakesiti bir d doğrusudur.

Buna göre doğru parçaları, ışınlar, açılar, çokgenler ilgin birer şekildir.

Doğru ile ilgili bağıntılara gelince paralellik, eşparalellik, kesişme ilgin bağıntılardır.

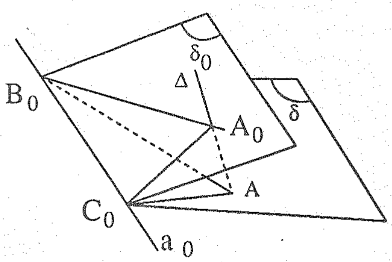
İlgin dönüşüm, doğru parçalarının uzunluklarını ve açıların ölçülerini korumadığından eşlik bağıntısıyla diklik bağıntısı ilgin olamazlar. Buna göre dikdörtgen, kare, çember, dikaçı, eşkenar üçgen, ikizkenar üçgen ilgin olmayan şekiller olur. Bunun gibi üçgenlerde açıortay, yükseklik, orta dikme ilgin olmayan kavramlardır; oysa kenarortay ilgin bir kavramdır.

Sıralama bağıntısı, doğrudaşlık, noktadaşlık, teğetlik, homoteti bağıntıları ilgin birer bağıntıdır.

Öklit düzleminde sonsuzdaki doğrunun ilgin izdüşümle δ nın sonsuzdaki doğrusuna dönüşeceğini kendiniz anlayabilirsiniz.

Teorem 1. Öklit düzlemindeki bir üçgen ilgin düzlemde verilen bir üçgene benzer bir üçgene dönüştürülebilir.

İspat. A_0CB δ_0 düzleminde tabanı $a_0 = \delta_0 \cap \delta$ üzerinde olan bir üçgen olsun. δ düzlemindeki herhangi bir üçgene benzer olan ABC üçgenini çizelim (Şekil 2).



Şekil 2

Sabit doğrultuyu $\Delta = A_0A$ olarak seçtiğimizde dönüşümde $A_0 \to A, B \to B, C \to C$ olup

---

*Başlığın İngilizcesi "Affine Plane Geometry" olup matematikçilerimiz bunu "Afin Düzlem Geometri" olarak Türkçeleştiriveriyorlar ve bana da "Afin" kullanmamı önerdiler. Bu tutuma karşı olduğumuz için "Afin" teriminin Türkçe karşılığını aradığımızda TDK'nun "Matematik Terimleri Sözlüğü"nde "ilgin" karşılığını bulduk ve bunu benimsedik.

†ODTÜ Matematik Bölümü emekli öğretim üyesi.

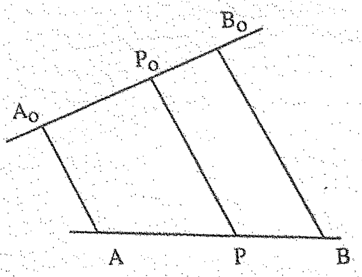
Sabit doğrultuyu $\Delta = A_0A$ olarak seçtiğimizde dönüşümde $A_0 \to A, B \to B, C \to C$ olup $A_0BC \to ABC$ elde olunur. □

Oranlar:

Oran, ilgin düzlem geometride önemli bir kavramdır.

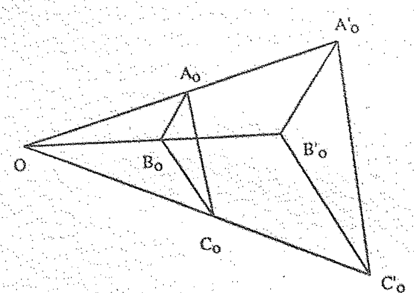
Teorem 2. Bir noktanın bir doğru parçasını bölme oranı ilgin dönüşüm altında korunur.

δ_0 Öklit düzleminde bir C_0 noktası $[A_0B_0]$ doğru parçasını $\lambda_0 = \overline{C_0A_0} : \overline{C_0B_0}$ oranında bölerse C_0 ve $[A_0B_0]$ ın ilginlerinin $\lambda = \overline{CA} : \overline{CB}$ oranı Thales teoreminden λ_0 'a eşit olur.



Şekil 3

Sonuç 1. Homoteti bağıntısı ilgin dönüşüm altında korunur.



Şekil 4

Şekilde homotetik iki üçgen verilmiş olup

$$\frac{\overline{OA'_0}}{\overline{OA_0}} = \frac{\overline{OB'_0}}{\overline{OB_0}} = \frac{\overline{OC'_0}}{\overline{OC_0}}$$

her bir oran ilgin dönüşüm altında korunacağından görüntü $ABC, A'B'C'$ üçgenleri de homotetik olur.

Soru: Üçgenlerde benzerlik bağıntısı ilgin bir bağıntı mıdır?

Genelde hayır! Bu cevabı doğrulayınız.

Sonuç 2. İlgin dönüşüm altında bir üçgenin kenarortayları kenarortaylara dönüşür.

Teorem 3. Öklit düzlemindeki iki bölgenin alanları oranı ilgin dönüşüm altında korunur.

İspat. Ayrıntıya girmemek için ispatı dik izdüşüm ($\Delta \perp \delta$) durumunda vereceğiz.

Bölgelerin alanları S'_0, S''_0 ise dik izdüşüm altındaki bölgelerin S', S'' alanları

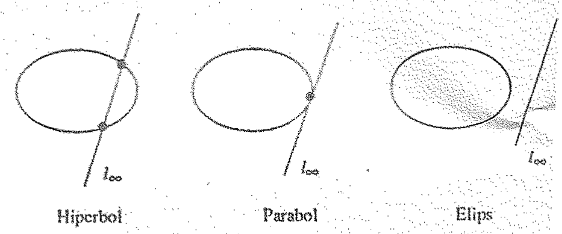
$$S' = S'_0 \cos\alpha, \quad S'' = S''_0 \cos\alpha$$

olup $S' : S'' = S'_0 : S''_0$ elde olunur. Burada α açısı δ_0 ve δ düzlemlerinin ölçek açısıdır. □

Konikler.

Konikler ikinci dereceden eğriler olup herhangi bir doğru bir koniği gerçel 0, 1 ya da 2 noktada keser. Konikler sonsuzdaki doğru ile arakesit noktalarının sayısıyla sınıflanır.

Bir konik sonsuzdaki doğruyu gerçel iki noktada keserse hiperbol, gerçel 1 noktada keserse parabol ve 0 tane gerçel noktada keserse elips adını alır:

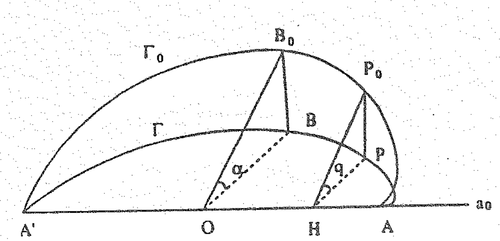


Şekil 5

İlgin dönüşüm altında sonsuzdaki doğru sonsuzdaki doğruya dönüşeceğinden kesişme bağıntısının korunmasından elips, parabol ve hiperbolün her biri ilgin bir eğridir.

Çember-Elips İlginliği

Şekil 1'de $[AA']$ çapı, $a_0 = \delta_0 \cap \delta$ arakesit doğrusu üzerinde bulunan bir Γ_0 çemberini düşünelim. Γ_0 ın $[AA']$ çapına dik çapı $[B_0B'_0]$ ise Γ_0 ın δ üzerindeki Γ dik izdüşümü A, A', B, B' noktalarından geçen kapalı bir Γ eğrisidir (Şekil 6).



Şekil 6

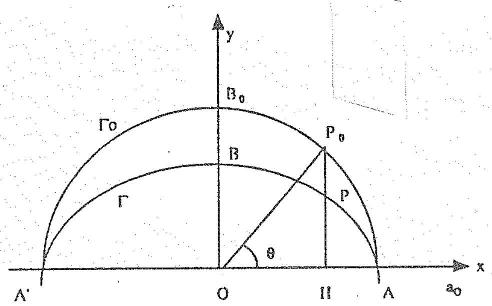
Γ_0 üzerinde alınan değişken bir P_0 noktası çemberi çizdiğinde δ üzerindeki P dik izdüşümü Γ yı çizer. Analitik yolla Γ nın bir elips olduğunu gösterelim.

Şekil 6'da P_0 ın a üzerindeki dik izdüşümü H ile ve δ_0 ile δ nın ölçek açısı α, Γ_0 ın merkezi 0 ile gösterilmiş olup

$$\alpha = \sphericalangle BOB_0 = \sphericalangle PHP_0$$

eşitlikleri geçerlidir.

Şimdi, δ_0 düzlemini a_0 arakesit doğrusu etrafında α kadar döndürerek δ düzlemi ile çakıştırırsak Şekil 7'yi elde ederiz.



Şekil 7

OA yı x ekseni ve OB yi y ekseni olarak seçtiğimizde ve

$$|OA| = a, \quad |OB| = b, \quad P_0(x_0, y_0), \quad \theta = \sphericalangle HOP_0$$

aldığımızda Γ_0 ın denklemi

$$x_0^2 + y_0^2 = a^2 \tag{1}$$

olur ve a ile b ye Γ nın yarıbüyük ve yarıküçük eksenleri denir.

Γ nın denklemine gelince, $P(x, y)$ de $x = x_0$ olup

$$\cos\alpha = \frac{b}{a} = \frac{y}{y_0} \text{ dan } \quad y = \frac{b}{a} y_0$$

olur. $x_0 = x$, $y_0 = \frac{a}{b} y$ değerleri (1) de yerlerine konursa

$$x^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2 = a^2$$

$$\Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2}$$

elde edilir ki (2) elips denklemleridir.

Elipsin Parametrik Denklem İkilisi

$\theta = \sphericalangle AOP_0$ aldığımızda

$$x = |OP_0| \cos\theta = a \cos\theta,$$

$$y = \frac{b}{a} y_0 = \frac{b}{a}(a \sin\theta) = a \sin\theta$$

bulunur ve

$$P \left| \begin{array}{l} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{array} \right. \tag{3}$$

(3)'e elipsin parametrik denklem ikilisi diyoruz. Burada θ açısı x ile y arasında yok edilirse (2) elde edilir.

Elipsin Alanı

Çember-elips ilginliğinden elipsin alanı integral hesabına gerek kalmadan hemen elde edilir.

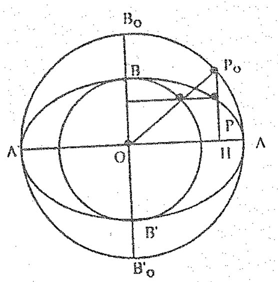
Çemberin alanı S_0 ve ilgin elipsinki S ise

$$S = S_0 \cos\alpha = (\pi a^2)\left(\frac{b}{a}\right) = \pi ab \tag{4}$$

elde edilir.

Elipsin Asal ve Yedek Çemberleri

Büyük ekseni $[AA']$ ve küçük ekseni $[BB']$, merkezi 0 olan bir elipste $[AA']$ çaplı çembere *asal çember* ve $[BB']$ çaplı çembere yedek çember denir (Şekil 8).



Şekil 8

Teorem 4. Eksenleri $[AA'],[BB']$ ve merkezi 0 olan bir elipste ucu 0 da olan bir ışının asal çemberi kestiği P_0 noktasından OA ya, yedek çemberi kestiği Q_0 noktasından OB ye çizilen dikmelerin kesiştiği P noktası elips üzerinde bulunur.

İspat. P_0 ın OA üzerindeki dik izdüşümü H olsun ve Q_0 dan OB ye çizilen dikme P_0H yı P de kessin.

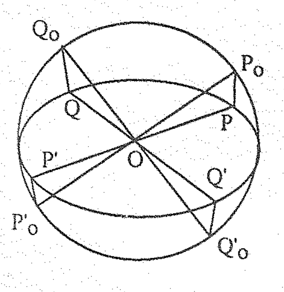
$$|HP|/|HP_0| = |OQ|/|OP_0| = b/a = \cos\alpha$$

olup P noktası P_0 ın ilgini olur. □

Bir Elipste Eşlenik Çaplar

Çember, odakları çakışan bir elipstir ($a = b, c = 0$). Bir elipsin asal çemberinde birbirine dik iki çapa çemberin *eşlenik çapları* denir. Bu çapların uç noktaları bir karenin köşeleri olup bu noktalardan çembere çizilen teğetler bir kare oluşturur.

Bir elipste asal çemberin eşlenik iki çapının ilgin dönüşüm altındaki izdüşümlerine elipsin eşlenik çapları denir. Şekilde asal çembere ve elipse ait birer çift eşlenik çap görülmektedir.



Şekil 9

Elipste eşlenik $[PP'],[QQ']$ çaplarının uçlarından elipse çizilen teğet doğrular bir paralelkenar oluşturur.

Teorem 5. Bir elipste değişken eşlenik iki çapın uzunluklarının kareleri toplamı sabittir.

İspat: Benimsediğimiz harflere göre

$$r_1 = |OP| = |OP'|, \quad r_2 = |OQ| = |OQ'|$$

ise

$$P(a\cos\theta, b\sin\theta),$$
$$Q\left(a\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right), \quad b\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

den

$$\begin{aligned} r_1^2 + r_2^2 &= (a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta) \\ &\quad +(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta) \\ &= a^2 + b^2 = \text{sabit} \end{aligned}$$

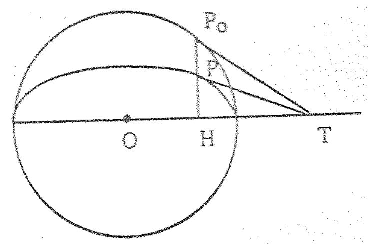
Bir Elipse Üzerindeki Bir Noktadan Teğet Doğru Çizimi

Elips $[AA'],[BB']$ çaplarıyla verilmiş olsun. Bunun üzerindeki bir P noktasından elipse teğet doğru çizmek istiyoruz. P den geçen bir kesen elipsi ayrıca Q da kessin. $Q \to P$ iken PQ nun limiti aranılan teğet doğru olur.

P, Q nun asal çember üzerindeki ilgin karşılıkları P_0, Q_0 ise $Q \to P$ için $Q_0 \to P_0$ olur ve P_0Q_0 keseninin limiti asal çembere P_0 dan çizilen teğet doğru olur. P_0 ve Q_0 ın OA üzerindeki dik izdüşümleri H ve K ise

$$\frac{|HP|}{|HP_0|} = \frac{|KQ|}{|KQ_0|}$$

orantısından P_0Q_0 ve PQ kesenleri OA yı aynı T' noktasında keserler. $Q_0 \to P_0$ için $T' \to T$ ise PT, aranılan teğet doğru olur.



Şekil 10

Sonuç: $P_0(x_0, y_0)$ ve $T(t, 0)$ ise P_0OT dik üçgeninden

$$t = a^2/x_0$$

çıkar.

Bir Elipsin Bir Doğru ile Arakesitleri

Elips, $[AA'],[BB']$ büyük ve küçük eksenleriyle verilmiş olsun. Bunun bir d doğrusu ile arakesit noktalarını çizmek istiyoruz.

Önce özel iki durumu ele alalım: