İLGİN DÜZLEM GEOMETRİ (II)

Hüseyin Demir *

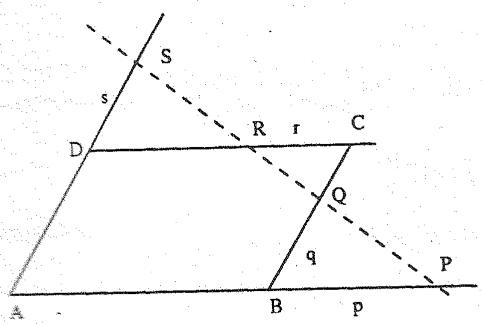
II. İlgin Bazı Teorem ve Problemler

Bu yazının I. kısmını okuduğumuza göre, Öklit düzleminden aldığımız teorem ve problemlerin ilgin olup olmadıklarını hemen anlayabilirsiniz. Örneğin Pisagor teoreminin ilgin bir teorem olmadığını, bir üçgende kenarortayların noktadaşlığını ifade eden teoremin ilgin bir teorem olduğunu söyleyebilirsiniz.

İlgin düzlem geometrisinde adı olan az sayıda, adı olmayan pek çok teorem yer almaktadır. Adı olanlardan Thales, Ceva ve Menelaus teoremleri bu geometride temel üç teoremdir. Bunların bildiğiniz ispatlarını vermeden sadece ifadelerini vermekle yetiniyoruz.

Önce şu sade ilgin problemi ele alalım:

Problem 1. Eklemli (köşelerinde oynak) bir $ABCD$ paralelkenarının kenar doğruları üzerinde doğrudaş olan P, Q, R, S gibi dört noktanın, paralelkenar oynatıldığında doğrudaşlığının bozulmayacağını gösteriniz (Şekil 12).

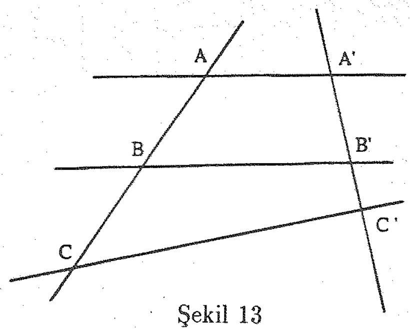


Şekil 12

Şekilde gösterilen sabit uzunlukları kullanarak P, Q, R ve ayrıca Q, R, S üçlülerinin doğrudaşlığını ifade eden orantıları yazdığınızda bu orantıların değişmeyeceğini görürsünüz.

Teorem 6. (Thales.) $a//b$ olmak üzere a, b, c gibi üç doğru p, p' gibi herhangi iki doğruyu sırasıyla $A, A'; B, B'; C, C'$ noktalarında keserse (Şekil 13)

$$a//b//c \Leftrightarrow \overline{CA} : \overline{CB} = \overline{C'A'} : \overline{C'B'}.$$



Şekil 13

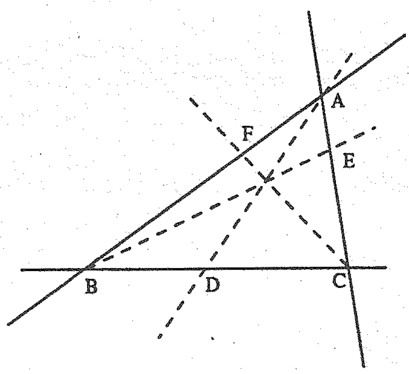
Teorem 7. (Ceva, Menelaus). D, E, F bir ABC tam üçgeninin kenar doğruları üzerinde ve köşelerden farklı noktalar ve bunların, sırasıyla $[BC], [CA], [AB]$ yi bölme oranları

$$\lambda(D) = \overline{DB} : \overline{DC},\ \mu(E) = \overline{EC} : \overline{EA},\ \gamma(F) = \overline{FA} : \overline{FC}$$

ise

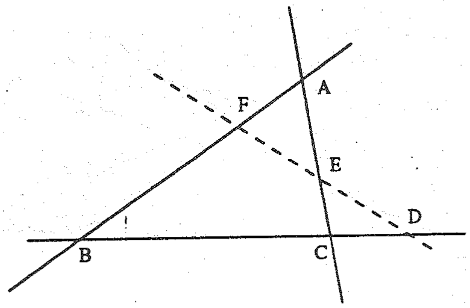
1) AD, BE, CF noktadaş $\Leftrightarrow$ $\lambda\mu\gamma = -1$ (Ceva)

2) D, E, F doğrudaş $\Leftrightarrow \lambda\mu\gamma = 1$ (Menelaus) (Şekil 14, 15).



Şekil 14

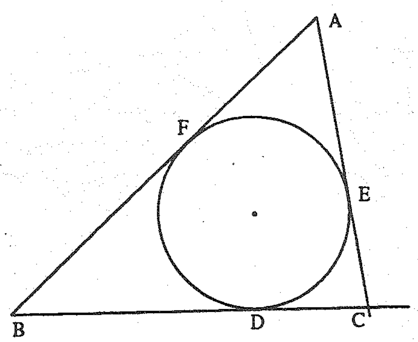
*ODTÜ Matematik Bölümü emekli öğretim üyesi



Şekil 15

Teorem 8. Bir üçgenin içinde kenarlara D, E, F noktalarında teğet olan bir elips çizildiğinde AD, BE, CF doğruları noktadaş olur.

İspat. İlgin bir dönüşümle elips çembere çevrildiğinde (Şekil 16) teorem, üçgen geometrisinde yer alan bir teoreme dönüşür.



Şekil 16

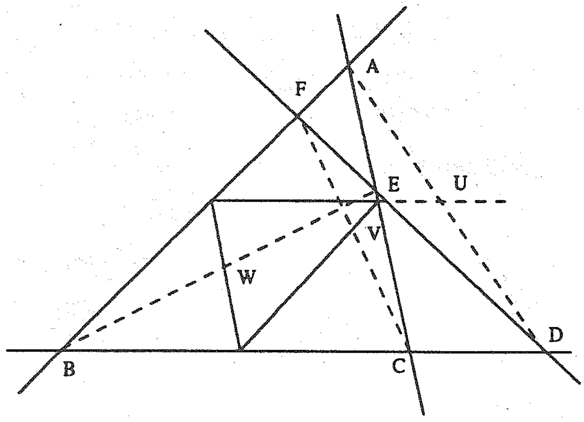
Gerçekten

$$\lambda(D)\mu(E)\gamma(F)$$
$$= (-\frac{u-b}{u-c})(-\frac{u-c}{u-u})(-\frac{u-u}{u-b}) = -1$$

Teorem 9. (Newton). Bir tamdörtgende köşegenlerin ortaları doğrudaştır (Şekil 17).

İspat. Tamdörtgen bir ABC üçgeni ve bir DEF keseniyle oluşturulmuş olsun (Şekil 22). Köşegenlerin U, V, W ortaları ABC nin $A'B'C'$ orta üçgeninin kenarları üzerinde bulunur. Menelaus teoreminden

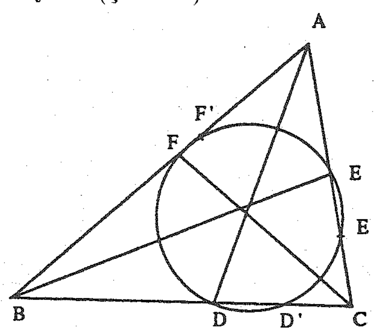
$$\lambda(U)\mu(V\,|\,\gamma(W)$$
$$= \frac{\overline{UB'}}{\overline{UC'}} \cdot \frac{\overline{VC'}}{\overline{VA'}} \cdot \frac{\overline{WA'}}{\overline{WB'}} = \lambda(D)\mu(E\,|\,\gamma(F) = 1.$$



Şekil 17

Teorem 10. Bir elips bir üçgenin $[BC], [CA], [AB]$ kenarlarını $D, D'; E, E'; F, F'$ de kestiğinde AD, BE, CF noktadaş olursa AD', BE', CF' de noktadaş olur.

İspat. Teoremi, elips yerine çember olarak ispatlamak yeter (Şekil 18).



Şekil 18

$$|BD| = a_1,\ |DD'| = a_2,\ |D'D| = a_3$$

ve benzer olarak öteki kenarlar için b_1, b_2, b_3 ve c_1, c_2, c_3 ve bölme oranları pozitif alındığında Ceva teoreminden

$$\frac{a_1}{a-a_1} \cdot \frac{b-b_3}{b_3} \cdot \frac{c-c_3}{c_3} = 1 \qquad (1)$$

olup

$$\frac{a-a_3}{a_3} \cdot \frac{b_1}{b-b_1} \cdot \frac{c_1}{c-c_1} = 1 \qquad (2)$$

yi ispatlamalıyız.

A, B, C nin çevrel çembere göre kuvvetlerinden elde edilen

$$\begin{aligned} b_3(b - b_1) &= c_1(c - c_3) \\ c_3(c - c_1) &= a_1(a - a_3) \\ a_3(a - a_1) &= b_1(b - b_3) \end{aligned}$$

eşitlikleri taraf tarafa çarpıldığında

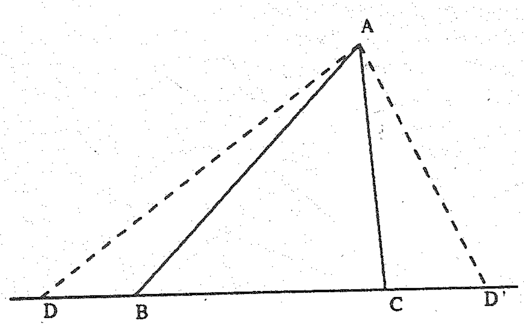
$$\begin{aligned} &a_3b_3c_3(a - a_1)(b - b_1)(c - c_1) \\ &\quad = a_1b_1c_1(a - a_3)(b - b_3)(c - c_3) \end{aligned}$$

bulunur ki (1) kullanıldığında (2) elde edilir.

Eşparçasal Noktalar, Doğrular ve Üçgenler

Bir ABC tamüçgeninin BC kenarı üzerinde eşparçasal noktaları şöyle tanımlayınız:

BC üzerinde olmak üzere ikisi de $[BC]$ nin içinde ya da dışında ve B ile C dan aynı uzaklıkta alınan D ve D' gibi iki noktaya *eşparçasal noktalar* denir (Şekil 19).



Şekil 19

Tanım öteki kenarlar için de geçerlidir.

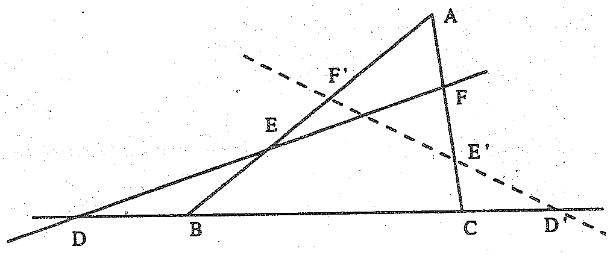
Sonuç. D, D' noktaları bir tamüçgenin BC kenarı üzerinde eşparçasal noktalar ise

$$\lambda(D)\,\lambda(D') = 1$$

eşitliği vardır.

BC üzerindeki eşparçasal D, D' noktaların, karşı A köşesine birleştiren $[AD], [AD']$ doğru parçalarına *eşparçasal köşel doğru parçaları*, AD, AD' ye de *eşparçasal köşel doğrular* denir.

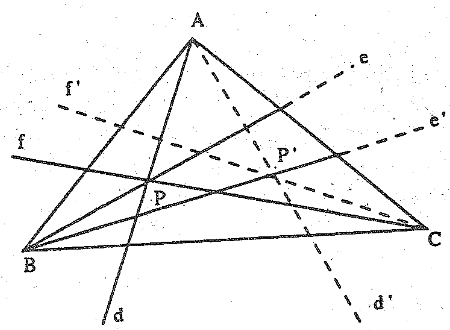
Teorem 11. Bir tümüçgenin kenarları üzerinde alınan D, E, F gibi üç nokta doğrusal ise bunların eşparçasal D', E', F' noktaları da doğrusaldır (Şekil 20).



Şekil 20

Bu doğrulara *eşparçasal doğrular* denir. Bu, (1) ve Menelaus teoreminin bir sonucudur.

Teorem 12. Bir ABC tamüçgeninde d, e, f köşel doğruları noktadaş ise, bunların d', e', f' eşparçasal doğruları da noktadaştır (Şekil 21).



Şekil 21

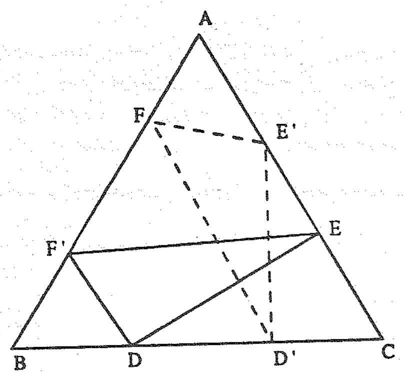
Bu da Ceva teoremi ve (1)'in sonucudur.

Şekil 21'de d, e, f nin kesiştikleri P ve d', e', f' nin kesiştikleri P' noktalarına *eşparçasal noktalar* denir.

Bir üçgende eşparçasal üçgenlere gelince: Üç doğrunun oluşturduğu tamüçgenle bu doğruların eşparçasal doğrularını oluşturduğu üçgene *eşparçasal üçgenler* denir.

Teorem 13. Bir ABC üçgeninde eşparçasal iki üçgenin alanları birbirine eşittir (Şekil 22).

ABC üçgeninde sözü edilen üçgenler, $DEF, D'E'F'$ olsun. Bu üçgen ilgin dönüşümle eşkenar üçgen olarak alınarak Şekil 22 elde edilmiştir.



Şekil 22

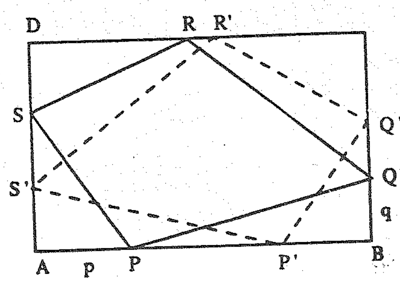
$$|AD| = x,\ |BE| = y,\ |CF| = z$$

koyduğumuzda

$$\begin{aligned}
&|AEF| + |BFD| + |CED| \\
&\quad = \frac{1}{2}\cos 60^\circ[(a-y)z + (b-z)x + (c-x)y] \\
&\quad = \frac{\sqrt{3}}{4}[a(x+y+z) - yz - zx - xy]
\end{aligned}$$

olup benzer toplam $D'E'F'$ için aynı çıkar. □

Teorem 14. Bir paralelkenarın içine çizilmiş eşparçasal iki dörtgenin alanları birbirine eşittir (Şekil 23).

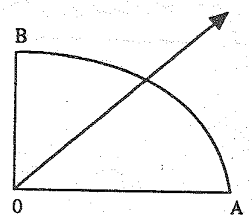


Şekil 23

İlgin dönüşümle şekil, dikdörtgen için de geçerli olup şekildeki uzunluklar kullanılarak Teorem 13'teki yolla yapılabilir.

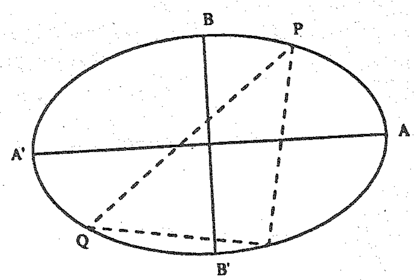
Elipsle ilgili aşağıdaki iki problemi ilgin dönüşümle asal çembere dönüştürerek hemen çözebilirsiniz.

Problem 2. Yarı büyük ve yarı küçük eksenleri $[OA], [OB]$ olan elips yayının altındaki alanı O dan geçen bir ışınla alanca eşit iki bölgeye ayırınız (Şekil 24).



Şekil 24

Problem 3. $[AA']$ büyük ekseni ve $[BB']$ küçük ekseniyle verilen bir elips üzerinde P gibi bir nokta verildiğinde, elipsin içine en büyük alanlı PQR üçgenini çiziniz (Şekil 25).



Şekil 25

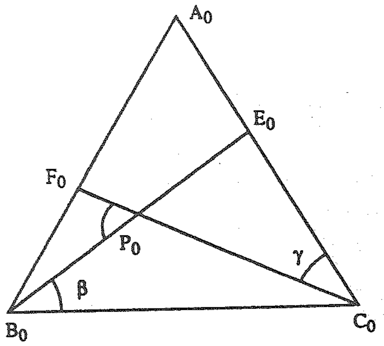
Geometrik bir yer:

Problem 4. Bir ABC üçgeninde bir P iç noktasından geçen $[BE], [CF]$ köşel doğru parçaları çiziliyor. Alanla ilgili olarak

$$|AEPF| = |PBC|$$

ise P nin geometrik yerini bulunuz.

Çözüm: Bu ilgin problem, ilgin dönüşümle Öklid düzleminde eşkenar bir $A_0B_0C_0$ üçgenine dönüştürülebilir (Şekil 26).



Şekil 26

Belirtilen iki alana $|P_0C_0E_0|$ alanı eklenirse $|A_0F_0C_0| = |E_0B_0C_0|$ eşitliği elde edilir ve $\beta = \gamma$ bulunur (Şekil 26).

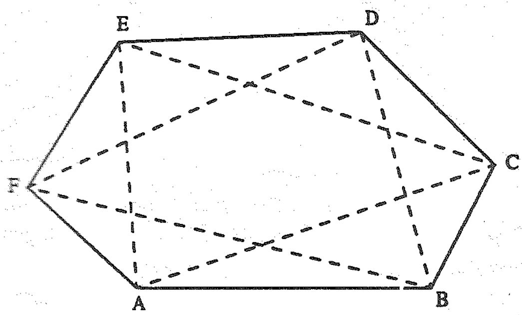
$$\sphericalangle B_0P_0F_0 = (60 - \gamma) = 60°$$

olup P_0 ın geometrik yeri yan kenarlara B_0 ve C_0 da teğet olan çember yayı olur. Bu çemberin G_0 ağırlık merkezinde geçtiği kolayca görülür.

O halde P nin geometrik yeri, ABC nin yan kenarlarına B ve C de teğet ve G ağırlık merkezinden geçen elips yayıdır.

Teorem 15. Bir $ABCDEF$ paraltıgeninde (karşılıklı kenarları birbirine paralel olan dışbükey $ABCDEF$ altıgeninde) alanlar için

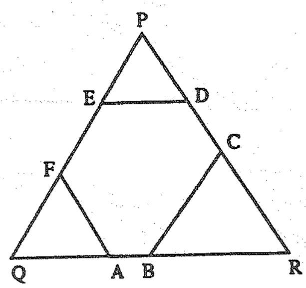
$$|ACE| = |BDF|$$



Şekil 27

eşitliğini ispatlayınız (Şekil 27).

Çözüm: AB, CD, EF nin oluşturduğu PQR üçgenini düşünürsek problem üçgene ilişkin bir problem olur. İlgin dönüşümle PQR eşkenar üçgen olarak düşünülebilir ve şeklimiz şu olur:



Şekil 28

$$|PD| = |PE| = x,$$

$$|QF| = |QA| = y,$$

$$|RB| = |RC| = z$$

ve

$$|QR| = |RP| = |PQ| = a$$

aldığımızda ACE nin alanı şu olur:

$$\begin{aligned} |ACE| &= |PQR| - \\ &\frac{\sqrt{3}}{4}[x(a-z) + y(a-x) + z(a-y)] \\ &= |PQR| - \\ &\frac{\sqrt{3}}{4}[a(x+y+z) - (yz + zx + xy)] \end{aligned}$$

$|BDF|$ hesaplandığında aynı sonuç çıkar.