RINGEL'İN EŞALAN DÜZLEMSEL KÜBİK GRAF PROBLEMİ ÜZERİNE*

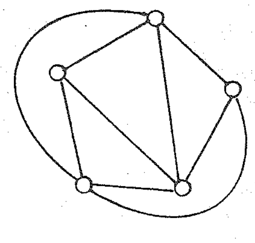
İbrahim Cahit Arkut †

Euler (1707-1782) 1936 yılında zamanının çözümü bilinmeyen Königsberg Köprüsü problemini çözerek yalnız topolojinin değil, aynı zamanda bugünkü anlamda graf teorisinin de babası sayılmaya hak kazandı [1]. Fakat graf teorisi bu yüzyılın ilk yarısında 1930'da Kuratowski [2] düzlemsel grafları karakterize eden ünlü teoremi kanıtlayıncaya kadar matematikçiler arasında daha çok topolojinin bir uzantısı olarak ele alındı. Fakat son 60 yıl içerisinde graf teorisi ve uygulamaları üzerine yoğun çalışmalar yapılmakta ve bu gelişim artan hızlarda devam etmektedir. Bu yazımızın amacı graf teorisinin ne etraflı gelişmelerinden ne de, ne olduğu hakkında özet vermek olacaktır. Amaç özellikle matematiğin diğer dallarında uğraşan Türk matematikçilerine ve matematiğe ilgi duyan herkese graf teorisinde, yeni ve anlaşılması kolay, fakat çözümünün var olduğu iddia edilen bir graf teorisi problemi ile davetiye sunmak olacaktır. Bu davetiye çıkarılırken graf teorisinin geometri ile ilişkili olan Gerhard Ringel'in bir problemini özellikle seçtiğimizi burada belirtmek istiyoruz [6].

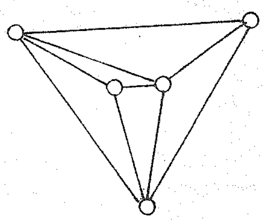
Düzlemsel grafların bazı geometrik şekillerle ilişkisini ortaya koyan ve birbirlerinden bağımsız Wagner (1936) [3], Fary (1948) [4] ve Stein (1951) [5] tarafından kanıtlanan şu teoremi verelim:

Teorem (Wagner, 1936). Her düzlemsel graf düzlemde kirişleri doğru parçaları şeklinde çizilebilir.

Yukarıdaki teoreme örnek olarak, Şekil 1'deki graf Şekil 2'de eğrisel kirişler yerine doğru parçaları kullanılarak tekrar çizilmiştir.



Şekil 1



Şekil 2

1990 yılında Wagner'in 80. yıldönümü onuruna Bodendiek tarafından toplanan graf teorisi çalışmaları içerisinde tanınmış graf teorici Gerhard Ringel'in şu problemine rastlıyoruz.

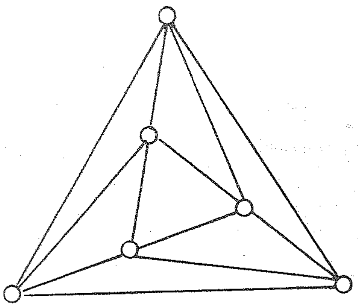
Ringel Eşalanlı düzlemsel Grafları: Doğal olarak düzleme çizilen her düzlemsel graf birbirleri ile değişik komşuluk ilişkileri içerisinde kapalı çevrimler (graf teorisi deyimi ile yüzler veya bölgeler) oluştururlar. Örneğin Şekil 1 ve 2'deki düzlemsel graflar 5 tane iç yüz ve bir tane de tüm grafı çepeçevre çevreleyen dış yüzden oluşmaktadır. Burada düzlemsel graf çiziminde bu yüzlerin alanları üzerine hiç bir sınırlama getirilmemiştir. Ringel verilen bir düzlemsel grafın dış yüzü hariç tüm iç yüzlerinin birbirlerine eş alanlı olarak çizilip çizilemeyeceğini incelemiş

---

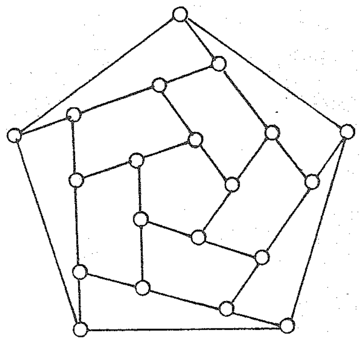
*Düzlemsel grafların geometrik özelliklerini ele alan bu yazıdaki tanımları hatırlamak için Matematik Dünyası, Cilt 3, Sayı 1 ve Sayı 2'de yayınlanan "Graf Teorisi I" ve "Graf Teorisi II" başlıklı yazılara bakılabilir.

†Doğu Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü öğretim üyesi

ve Şekil 3 ve 4'deki eşalanlı düzlemsel grafları vermiştir.

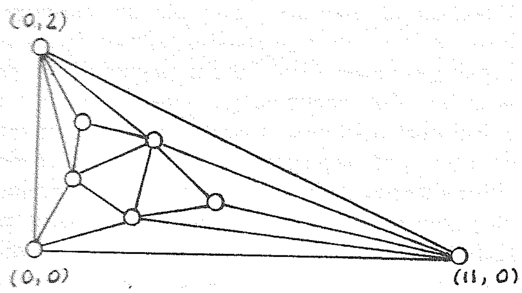


Şekil 3



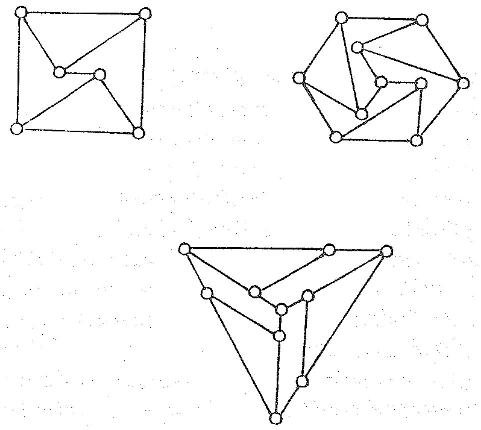
Şekil 4

Daha sonra Şekil 5'deki düzlemsel grafın eş alanlı olarak çiziminin imkansız olduğunu uygun bir transformasyon ile düzlemsel grafın dış yüz düğümlerini (0, 2), (0, 0) ve (11, 0) koordinatlarına yerleştirip üçgen şeklindeki yüzlerinin alanlarını determinantlarla ifade ederek ortaya çıkan denklem sistemini sağlayan köklerin bazılarının kompleks olduğunu ortaya koymuştur.



Şekil 5

Bu ise bazı düzlemsel grafların eşalanlı çizilemeyeceğini göstermektedir. Fakat Ringel tüm düzlemsel kübik grafların eşalanlı olarak çizilebileceğini iddia etmektedir. Her düğümüne tam olarak üç dal bağlanmış olan graflara (yani 3-lü düzgün graflara) kübik graf denildiğini burada belirtelim. Eşalan kübik düzlemsel konjektürü Ringel'in önerdiği cebirsel yöntemle kanıtlanmasının kübik grafların düğüm sayıları artması ile orantılı olarak çok zorlaşacağı açıktır. Bu nedenle yazar konuyu bir geometri problemi şeklinde ele alarak genel olarak kübik düzlemsel grafların eşalanlı olarak çizilebileceğini göstermiştir [7].

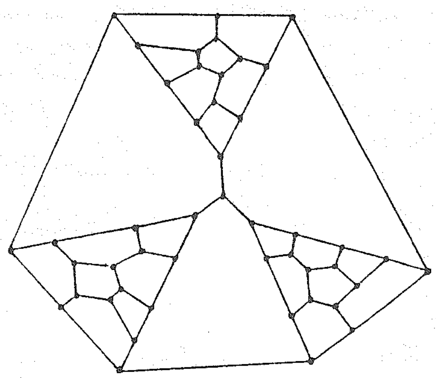


Şekil 6

Şekil 6'da geometrik kriterler kullanılarak çizilen eşalanlı bazı kübik düzlemsel graflara yer verilmiştir. Bu konuda yazarın çalışmaları devam etmekte olup aşağıdaki problemi okuyucunun dikkatine sunmaktadır.

Problem 1. Herhangi bir düzlemsel grafın eşalanlı olması için gerek ve yeter koşullar nelerdir?

Problem 2. Şekil 7'de graf teorisinde çok iyi bilinen Tutte'ın kübik grafı bilinen biçimi ile eşalan özelliği dikkate alınmadan çizilmiştir. Okuyucuyu konuya daha fazla çekme düşüncesi ile bu düzlemsel grafın eşalanlı olarak bir çizimini bulmaya davet ediyoruz.



Şekil 7

KAYNAKCA

[1] F. Harary: *Graph Theory*, Addison-Wesley, 1972.

[2] K. Kuratowski: Ser le probleme des courbes gauches en topolgie, **15**, 271-283, 1930.

[3] K. Wagner: Bemerkungen zum Vierferbenproblem, *Jber. Deutsch. Math. Verein*, **46**, 26-32, 1936.

[4] I. Fary: On the straight line representation of planar graphs, *Acta. Sci. Math. Szged*, **11**, 229-233, 1948.

[5] S.K. Stein: Convex Maps, *Proc. Amer. Math.*, **2**, 464-466, 1951.

[6] G. Ringel: *Equiareal Graphs, Contemporary Methods in Graph Theory*, (Ed. R. Bodendiek), Wissenchaftsverlag, Mannhiem, 1990.

[7] İ. Cahit: *Equiareal qubic planar graphs*, Ars Combinatoria, 1993.

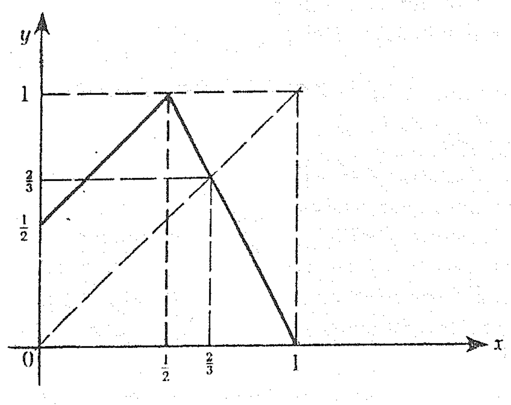
ARA DEĞER TEOREMİ VE PERİYODİK NOKTALAR

Bünyamin Demir *

Yazımıza $h : [0,1] \to [0,1]$,

$$h(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

fonksiyonu ile başlayalım.



Grafikten de görüldüğü gibi $h(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$ olduğundan $\frac{2}{3}, h$ nin bir sabit noktasıdır. "Sabit nokta ne demek?" diye bir soru akla gelebilir.

Bir f fonksiyonunun (eğer varsa) $f(x) = x$ biçimindeki bir noktasına f 'nin sabit bir noktası denir. (Bir fonksiyonun sabit noktalarını, bu fonksiyonun grafiğini $y = x$ doğrusu ile kestirmek suretiyle bulabilirsiniz.) Diğer taraftan

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f \circ f(x), \\ f^n(x) &= \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ tane}}(x) \end{aligned}$$

gösterimi kullanılırsa,

$$\begin{cases} f^n(x_0) = x_0, \\ f^k(x_0) \ne x_0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1, \end{cases}$$

biçimindeki bir x_0 noktasına f 'nin periyodik ve n periyodlu bir noktası denir.

$$h^2\left(\frac{1}{3}\right) = h\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{1}{3}$$

ve

$$h^3\left(\frac{1}{2}\right) = h^2(1) = h(0) = \frac{1}{2}$$

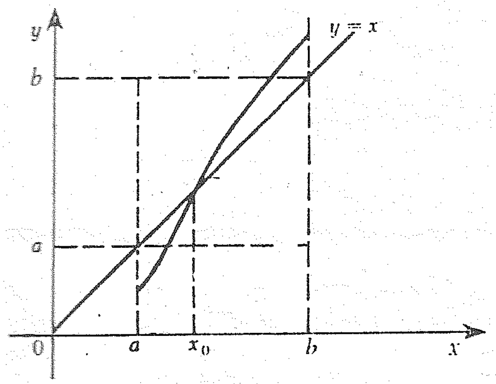
* Anadolu Üniversitesi, Matematik Bölümü öğretim elemanı.

olduğundan $\frac{1}{3}$, 2 periyodlu bir nokta, $\frac{1}{2}$ ise 3 periyodlu bir noktadır. Peki ya diğer periyodik noktalar? Acaba h 'nin periyodu 1993 olan bir noktası var mıdır? İsterseniz yazımızın devamını okumadan bu soruya yanıt arayabilirsiniz. Teorem ve önermelerin kanıtında (belirterek ya da belirtmeden) sık sık Ara Değer Teoremine ve bir fonksiyonun süreklilliği kavramına başvuracağız. Bunların dışında fazla bir *malzemeye* ihtiyacımız olmayacak.

Ara Değer Teoremi: Eğer $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $y_0, f(a)$ ile $f(b)$ arasında herhangi bir sayı ise, $f(x_0) = y_0$ olacak biçimde bir $x_0 \in [a,b]$ sayısı vardır.

Önerme 1. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $f([a,b]) \supset [a,b]$ ise f nin en az bir sabit noktası vardır.

Kanıt. $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - f(x)$ fonksiyonunun sürekli olduğu açıktır.



$f(a)$ değeri için 3 durum söz konusudur.

1. $f(a) = a$ ise a sabit noktadır.

2. $f(a) > a$ ise $f([a,b]) \supset [a,b]$ olduğundan en az bir $c \in (a,b]$ için $f(c) = a$ 'dır.

$$\begin{aligned} g(a) &= a - f(a) < 0 \\ g(c) &= c - f(c) = c - a > 0 \end{aligned}$$

olduğundan Ara Değer Teoremi gereğince $g(x_0) = 0$ eşitliğini sağlayan bir $x_0 \in (a,c) \subset [a,b]$ vardır. Dolayısıyla x_0, f nin sabit noktasıdır.

3. $f(a) < a$ ise en az bir $c \in (a,b]$ için $f(c) = b$ 'dir. $c \neq b$ ise,

$$\begin{aligned} g(a) &= a - f(a) > 0, \\ g(c) &= c - f(c) = c - b < 0 \end{aligned}$$

olduğundan Ara Değer Teoremi'nden $g(x_0) = 0$ eşitliğini sağlayan bir $x_0 \in (a,c)$ vardır. Bu da x_0 'ın f 'nin sabit noktası olması demektir.

Önerme 2. $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subset \mathbb{R})$ sürekli bir fonksiyon ve $g(x) = -f(-x)$ olsun. $x \in A$ iken $f^n(x) = x$ olması için gerek ve yeter koşul $g^n(-x) = -x$ olmasıdır. Ayrıca $x < f^2(x) < f(x)$ ise, $g(-x) < g^2(-x) < -x$ olur.

Bu önermenin kanıtı çok basit olup meraklı okuyuculara bırakılmıştır.

Önerme 3. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve $[c,d] \subset f([a,b])$ olsun. Bu durumda $f([u,v]) = [c,d]$ olacak biçimde bir $[u,v] \subset [a,b]$ aralığı vardır.

Kanıt. $[c,d] \subset f([a,b])$ verildiğinden $f(x) = c$ ve $f(y) = d$ biçiminde $x, y \in [a,b]$ sayıları vardır. $x < y$ olduğunu varsayalım. ($x > y$ olması durumunda benzer yöntem uygulanır.)

$$A = \{z \mid f(z) = c, \quad z < y\}$$

kümesi üstten sınırlıdır. $\mathbb{R}$ nin tamlığından A kümesinin supremumu vardır. Bu supremuma u diyelim. $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in A$ olmak üzere $n \to \infty$ iken $x_n \to u$ biçimindeki bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisini gözönüne alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f(x_n) = c$ olduğundan $n \to \infty$ için $f(x_n) \to c$ dir. f 'nin sürekliliğinden $f(u) = c$ elde edilir. Dolayısıyla $u \in A$ sayısı A 'nın maksimumudur. Diğer taraftan

$$B = \{z \mid f(z) = d, \quad z > u\}$$

kümesi alttan sınırlı olup bir infimuma sahiptir. Bu infimuma v diyelim. Yukarıdaki kanıta benzer bir yöntemle v 'nin B 'nin minimumu olduğu gösterilebilir. Ara Değer Teoreminden

$$[c,d] \subset f([u,v])$$

elde edilir.

Şimdi $f([u,v]) = [c,d]$ olduğunu gösterelim. Varsayalım ki $f([u,v]) \neq [c,d]$ olsun. Bu durumda $f(k) \notin [c,d]$ biçiminde bir $k \in [u,v]$ sayısı vardır. $f(k) < c$ olsun. ($f(k) > d$ olması durumunda benzer yöntem uygulanır.) Ara Değer Teoremi'nden $f(l) = c$ olacak biçimde bir $l \in (k,v)$ vardır. Bu da u 'nun tanımı ile çelişir.

Artık tüm hazırlıkları tamamladığımıza göre asıl teoreme geçebiliriz.

Teorem. $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer f nin periyodu 3 olan bir noktası varsa her periyoddan noktası vardır.

Kanıt. x, f 'nin 3 periyodlu bir noktası olsun. $x, f(x), f^2(x)$ sayılarından en küçüğüne a diyelim. a 'nın da 3 periyodlu bir nokta olduğu açıktır. $b = f(a)$ ve $c = f(b)$ olsun. Bu durumda

$$\text{ya} \quad a < b < c \quad \text{ya da} \quad a < c < b$$

olur. $a < b < c$ olduğunu varsayalım. (Aksi halde $g(x) = -f(-x)$ fonksiyonu için aynı yöntem uygulanır. Bkz. Önerme 2)

$c = f(b)$ ve $a = f(c)$ olduğundan Ara Değer Teoremi gereğince

$$f([b, c]) \supset [a, c] \supset [b, c]$$

olur. Önerme 1'den f 'nin $[b, c]$ 'de bir sabit noktası vardır. Diğer taraftan

$$[a, b] \subset [a, c] \subset f^2([a, b])$$

olduğundan f^2 'nin $[a, b]$ 'de bir sabit noktası vardır. f^2 'nin $[a, b]$ 'deki sabit noktası f 'nin sabit noktası değilse bu nokta f 'nin periyodu 2 olan bir noktasıdır. f^2 'nin $[a, b]$ 'deki sabit noktasının f 'nin de sabit noktası olması durumunda, $f(b) = c$ ve f sürekli olduğundan f 'in $[a, b]$ aralığında bir $z_0 < b$ maksimum sabit noktası da vardır. Bu durumda eğer $x \in [a, b]$ bir sabit nokta ise $x \leq z_0 < b$ 'dir. f 'nin sürekliliğinden dolayı, yeterince küçük bir $\epsilon > 0$ sayısı ve $z_1 = z_0 + \epsilon$ için $a < f(z_1) < b$ olur. Üstelik f 'nin $[z_1, b]$ 'de sabit noktası yoktur. $f(z_1) = a_1$ olsun.

$$f([z_1, b]) \supset [a_1, c] \supset [b, c] \quad \text{ve} \quad f([b, c]) \supset [a, c]$$

olduğundan

$$f^2([z_1, b]) \supset [a, c] \supset [z_1, b]$$

olur. O halde f^2 'nin $[z_1, b]$ 'de bir x_1 sabit noktası vardır ve bu nokta için $f(x_1) \neq x_1$ 'dir. O halde x_1 noktası f 'nin 2 periyodlu noktasından başka bir şey değildir. Şimdi f 'nin $n > 3$ için n periyodlu noktasının varlığını gösterelim. Ara Değer Teoremi ve Önerme 3'ten $f([b, c]) \supset [a, c] \supset [a, b]$ olduğundan $f(I_1) = [a, b]$ biçiminde bir $I_1 \subset [b, c]$ aralığı, $f([b, c]) \supset [a, c] \supset I_1$ olduğundan $f(I_2) = I_1$ biçiminde $I_2 \subset [b, c]$ aralığı ve $f([b, c]) \supset [a, c] \supset I_i$ olduğundan $f(I_{i+1}) = I_i$ biçiminde bir $I_{i+1} \subset [b, c]$ aralığı vardır. Bu yolla elde edilen $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ aralık dizisi için,

$$\begin{aligned} f(I_1) &= [a, b], \\ &\vdots \\ f^n(I_n) &= [a, b], \end{aligned}$$

olup, $n = 2, 3, 4, \ldots$ için,

$$f^n(I_{n-1}) = f([a, b]) \supset [b, c] \supset I_{n-1}$$

sağlanır. Önerme 1'den, f^n 'nin I_{n-1} 'de bir p sabit noktası vardır. Yani $f^n(p) = p$ dir. $n > 3$ için

$$f(p), f^2(p), f^3(p), \ldots, f^{n-2}(p) \in [b, c], f^{n-1}(p) \in [a, b]$$

ve $f^n(p) = p \in [b, c]$ olduğundan, eğer $f^{n-1}(p), [a, b]$ 'nin bir iç noktası ise p, f 'nin n periyodlu bir noktasıdır. ($f^{n-1}(p)$ 'nin a 'ya da b 'ye eşit olması durumunda $p = f^n(p) = b$ ya da c 'dir. Buradan $f(p) \notin [b, c]$ veya $f^2(p) \notin [b, c]$ elde edilir. Bu ise $n > 3$ olması ile çelişir.)

Bu teoremden sonra $h : [0, 1] \to [0, 1]$

$$h(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

fonksiyonunun bırakın 1993 periyodlu noktasının varlığını, her periyoddan noktasının var olduğunu söyleyebiliriz. Bir başka fonksiyon olarak

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$f(x) = ax(1 - x), \quad a \in \mathbb{R},$$

fonksiyonunun periyodik noktaları hakkında ne söyleyebilirsiniz? (Fazla bir şey söyleyemezseniz üzülmeyin. Çünkü bu masum görünüşlü fonksiyon size karşı kaosun bütün tuzaklarını kurabilir!)

KAYNAKCA

[1] Marysia T. Weiss: An Early Introduction to Dynamics, *Amer. Math. Montly*, **98**, 635-641 (1991).

[2] Xun-Cheng Huang: From Intermediate Value Theorem to Chaos, *Mathematics Magazine*, **65**, 91-103 (1992).