

## LİMİTLER, LİMİTLER

Yusuf Avcı & Nurettin Ergun \*

Akıllı insan zehir sunsa al iç  
Nobran bal şerbeti uzatsa sakın ha!  
Ömer Hayyam

Gerçel sayı dizilerine ilişkin limit bilgisi çok önemlidir. Kendi başına çok önemli olmanın ötesinde, gerçel değişkenli ve gerçel değerli fonksiyonların sürekliliklerini açıklama, kavrama ve kanıtlamada belki daha da önemlidir. Biz bu yazıda, hepsi de kendi başlarına yeterince ilginç olan dört ünlü limit probleminin çözümleri ile ilgileneceğiz. Supremum ve infimum kavramlarını ve bir gerçel sayıya yakınsamanın ne demek olduğunu az çok bilen herkesin, kanıtlamalara katılma çabası gösterdiğinde, anlatılanları kavrayacağını umuyoruz. Yalnızca gerçel sayı dizileri ile ilgileneceğiz.

Boş olmayan bir  $A \subseteq \mathbb{R}$  alt kümesinin bir *üst sınırı*,  $\forall a \in A$  için  $a \leq \alpha$  eşitsizliğini gerçekleyen  $\alpha$  gerçel sayısıdır; *en küçük üst sınırı* yani *supremumu* ise  $A$ 'nın bu nitelemeye uyan özel üst sınırır, yani kendisinden kesin küçük kalan hiç bir gerçel sayının  $A$ 'nın bir üst sınırı olmadığını üst sınırır; başka bir yazıyla,  $A$ nın  $\alpha$  üst sınırına ancak ve yalnız

$$\forall \epsilon > 0 \text{ için } \exists a_\epsilon \in A, \alpha - \epsilon < a_\epsilon$$

koşulu gerçekleştiğinde  $A$  kümesinin supremumu denir ve  $\alpha = \sup A$  ya da  $\alpha = \text{eküs } A$  yazılır. Alt sınır ve *en büyük alt sınır* yani *infimum* kavramları benzer biçimde tanımlanır.

**Ana Teorem.** i) Üstten sınırlı ve boş olmayan herhangi bir  $A \subseteq \mathbb{R}$  alt kümesinin tek bir supremumu vardır.

ii) Alttan sınırlı ve boş olmayan herhangi bir  $A \subseteq \mathbb{R}$  alt kümesinin tek bir infimumu vardır.

**Problem 1.** Bir  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  gerçel sayı dizisinin, yakınsak bir alt dizisinin yakınsadığı gerçel sayıya  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  dizisinin bir *yığılma noktası* denir. Hatırlatma: İndisleri yani numaraları, kesinlikle artan  $n_1 < n_2 < \dots < n_m < n_{m+1} < \dots$  doğal sayıları olan terimlerin oluşturduğu

$\{a_{n_m}\}_{m=1}^\infty$  dizisine,  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  dizisinin bir *alt dizisi* denir.

$$\{a_{2n-1}\}_{n=1}^\infty, \{a_{3n+2}\}_{n=1}^\infty, \{a_{2^n}\}_{n=1}^\infty$$

dizileri  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  dizisinin alt dizi örnekleridir. Örneğin ilkinde  $n_m = 2m - 1$  dir.  $a_{n_m}$  teriminin esas dizideki numarasının  $n_m$  buna karşılık alt dizideki numarasının  $m$  olduğuna dikkat edilmelidir. Sonlu tane yığılma noktası olan bir kaç diziyi anımsayalım:

$$a_n = (-1)^n,$$

$$b_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} + \frac{1}{n},$$

$$c_n = \begin{cases} (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + \frac{1}{n}, & n \text{ tek}; \\ \frac{1}{\log n}, & n \text{ çift}. \end{cases}$$

$\{a_n\}_{n=1}^\infty$  dizisinin yığılma noktaları yalnızca  $x = -1$  ve  $x = 1$ 'dir.  $\{b_n\}_{n=1}^\infty$  dizisinin yalnızca  $x = 0$  ve  $x = 1$  yığılma noktalarına yakınsayan alt dizileri vardır.  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  dizisinin yığılma noktaları ise  $-1, 0$  ve  $1$ 'dir. Şimdi şuna dikkat edelim:

$$1 + \frac{1}{1}, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{3}, \dots;$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{1}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \dots, \dots;$$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{1}, \frac{1}{m} + \frac{1}{2}, \frac{1}{m} + \frac{1}{3}, \dots, \dots$$

rasyonel sayıları "sayılabilir tanedir", yani doğal sayılarla indislenebilirler (numaralanabilirler). Böyle bir numaralama ile bir  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  dizisi tanımlanmış olur. Bu dizinin tüm yığılma noktalarının

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{m}, \dots, 0$$

olduğunu okuyucu görebilmelidir. Demek ki sonsuz tane yığılma noktası olan gerçel sayı dizileri tanımlanabilir. Dahası, bütün pozitif rasyonel sayıları, ki sayılabilir tanedirler, numaralayarak tanımlanan  $\{r_n\}_{n=1}^\infty$  dizisinin tüm yığılma noktaları kümesi ise  $[0, \infty)$  aralığıdır, neden? Herhangi

\* İstanbul Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyeleri

bir  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  gerçel sayı dizisinin tüm yığılma noktaları kümesinin infimumu  $\underline{\lim} x_n$  ya da  $\liminf_n x_n$  işareti ile gösterilir. Sözü edilen infimum yoksa  $\underline{\lim} x_n = -\infty$  yazılır.  $\overline{\lim} x_n$  ya da  $\limsup_n x_n$  işareti ile de sözü edilen dizinin tüm yığılma noktalarının supremumu gösterilir. Şu bilgileri ekleyelim: i) Bir  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi yakınsak ise tüm alt dizileri de aynı limite yakınsak; ii)  $\underline{\lim} x_n$  ister bir gerçel sayı ister  $-\infty$  olsun, daima  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisinin bir yığılma noktasıdır, yani  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisinin uygun bir alt dizisi  $\underline{\lim} x_n$  değerine yakınsak; iii) Benzer gerçekler  $\overline{\lim} x_n$  için geçerlidir. Bu ilk bölümde şu problemle uğraşacağız: *Sonlu tane yığılma noktası olan öyle sınırlı bir  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  gerçel sayı dizisi bulalım ki, bu dizinin aritmetik ortalamalar dizisinin sonsuz tane yığılma noktası olsun.*  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisinin aritmetik ortalamalar dizisi, terimleri  $\sigma_n = \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$  olan  $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisidir. Önce gerekli temel bilgileri görelim:

**1.1.**  $\underline{\lim} a_n = \sup_n \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$  ve  $\overline{\lim} a_n = \inf_n \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$  eşitlikleri herhangi bir  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi için daima geçerlidir. Bunları, yazıyı uzatmamak için göstermiyoruz. O halde şu çok önemli sonuca ulaşılır:  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi sınırlı ise, yani her bir  $n \in \mathbb{N}$  için  $a \leq a_n \leq b$  gerçekleşiyorsa,  $a \leq \underline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} a_n \leq b$  kolayca elde edileceğinden,  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisinin  $[a, b]$  aralığındaki en az bir gerçel sayıya yakınsayan yakınsak bir alt dizisi vardır, neden?

**1.2.** Herhangi bir  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  gerçel sayı dizisi ve bu dizinin herhangi bir  $\{a_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$  alt dizisi için daima  $\underline{\lim} a_n \leq \underline{\lim} a_{n_m}$  geçerlidir. Elbette, çünkü  $\{a_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$  alt dizisinin yakınsak herhangi bir alt dizisi,  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisinin yakınsak bir alt dizisidir, neden? Dolayısı ile  $\{a_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$  dizisinin herhangi bir yığılma noktası olan  $\ell$  için  $\underline{\lim} a_n \leq \ell$  geçerlidir. İstenen eşitsizlik hemen elde edilir.

**1.3.**  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  bir gerçel sayıya yakınsıyorsa, herhangi bir  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi için  $\underline{\lim} (a_n + b_n) = \underline{\lim} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  geçerlidir. Gerçekten  $\ell_1 = \underline{\lim} a_n$  bir gerçel sayı ise,  $\ell_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{n_m}$  gerçekleyen  $\{a_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$  alt dizisini belirleyen  $n_1 < n_2 < \dots < n_m < \dots$  numaraları yardımı ile önce  $\ell_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{m \rightarrow \infty} b_{n_m}$  ve sonuçta  $\ell_1 + \ell_2 = \lim_{m \rightarrow \infty} (a_{n_m} + b_{n_m})$  gerçekleşeceğinden, tanım gereği hemen,  $\underline{\lim} (a_n + b_n) \leq \ell_1 + \ell_2$  bulunur.  $\underline{\lim} (a_n + b_n) < \ell_1 + \ell_2$  gerçekleşmeyeceği kolayca görülür, çünkü aksi halde,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (a_{N_m} + b_{N_m}) = \underline{\lim} (a_n + b_n)$$

gerçekleyen yakınsak bir  $\{a_{N_m} + b_{N_m}\}_{m=1}^{\infty}$  dizisi var olurdu ve sonuçta

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} a_{N_m} &= \lim_{m \rightarrow \infty} ((a_{N_m} + b_{N_m}) - b_{N_m}) \\ &= \underline{\lim} (a_n + b_n) - \lim_{m \rightarrow \infty} b_{N_m} \\ &= \underline{\lim} (a_n + b_n) - \ell_2 \\ &< \ell_1 \leq \lim_{m \rightarrow \infty} a_{N_m} \end{aligned}$$

çelişkisi doğardı.  $\underline{\lim} a_n = -\infty$  halini okuyucuya bırakıyoruz.

**1.4.** Herhangi bir  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi ve herhangi  $0 < \epsilon$  verildiğinde,  $\forall n \geq N$  için  $\underline{\lim} a_n - \epsilon < a_n$  gerçekleşir. Elbette, yine  $\underline{\lim} a_n = -\infty$  halini apaçık olduğundan irdelemeden geçiyoruz. Şimdi  $\underline{\lim} a_n = \ell$  bir gerçel sayı iken, sözü edilen nitelikte bir  $N$  doğal sayısı tanımlanamazdı, öncelikle öyle bir  $1 < n_1$  doğal sayısı var olurdu ki  $a_{n_1} \leq \ell - \epsilon$  geçerli olurdu. O halde yine öyle bir  $2n_1 < n_2$  vardır ki  $a_{n_2} \leq \ell - \epsilon$  olurdu, vb. Tümevarım ve bu düşünceler yardımı ile öyle bir  $\{a_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$  alt dizisi tanımlanabilirdi ki her bir  $m \in \mathbb{N}$  için  $a_{n_m} \leq \ell - \epsilon$  ve sonuçta

$$\inf\{a_{n_m}, a_{n_{m+1}}, a_{n_{m+2}}, \dots\} \leq \ell - \epsilon$$

geçerli olurdu. Sonuçta

$$\begin{aligned} \underline{\lim} a_{n_m} &= \sup_m \inf\{a_{n_m}, a_{n_{m+1}}, a_{n_{m+2}}, \dots\} \\ &\leq \ell - \epsilon < \ell \leq \underline{\lim} a_{n_m} \end{aligned}$$

çelişkisi doğardı.

**1.5.** Herhangi bir  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi için daima

$$\underline{\lim} a_n \leq \underline{\lim} \sigma_n \leq \overline{\lim} \sigma_n \leq \overline{\lim} a_n$$

geçerlidir. Biz yalnızca  $\underline{\lim} a_n \leq \underline{\lim} \sigma_n$  eşitsizliğini gösterelim.  $\underline{\lim} a_n = -\infty$  hali apaçıktır. Şimdi  $\ell = \underline{\lim} a_n$  bir gerçel sayı olsun.  $0 < \epsilon$  yeterince küçük olsun. **1.4.** nedeniyle, uygun bir  $N$  sabit doğal sayısı sayesinde,  $\forall n > N$  için  $\ell - \epsilon < a_n$  geçerli olduğundan, sonuçta  $n > N$  için

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{n} \\ &\quad + \frac{a_{N+1} + a_{N+2} + \dots + a_n}{n} \\ &> \frac{A}{n} + \frac{(n-N)(\ell - \epsilon)}{n} \\ &= \frac{A}{n} + (\ell - \epsilon)\left(1 - \frac{N}{n}\right) \end{aligned}$$

geçerli olur ve dolayısı ile **1.3.** yardımı ile, kolayca

$$\underline{\lim} \sigma_n \geq \underline{\lim} \left( \frac{A}{n} + (\ell - \epsilon) \left( 1 - \frac{N}{n} \right) \right) = \ell - \epsilon$$

bulunur; burada  $A = a_1 + a_2 + \dots + a_N$  yazılmıştır. Okuyucu, çok zorlanmadan

$$\forall n \geq N, \quad \alpha_n \leq \beta_n \quad \text{ise} \quad \underline{\lim} \alpha_n \leq \underline{\lim} \beta_n$$

olduğunu gösterebilir ve bunu yapmalıdır. O halde her bir pozitif  $\epsilon$  için  $\ell - \epsilon \leq \underline{\lim} \sigma_n$  olacaktır. Bu ise,  $\ell \leq \underline{\lim} \sigma_n$  demektir; aksi halde kaçınılmaz olarak  $\underline{\lim} \sigma_n + \epsilon_0 < \ell - \epsilon_0$  gerçekleyen bir pozitif  $\epsilon_0$  var olurdu, neden?

**1.6.** Şimdi problemimizi çözelim. Şu diziyi tanımlayalım.  $a_1 = 1, a_2 = -1$  ve her  $m$  doğal sayısı için

$$(*) \quad a_n = \begin{cases} 1, & 2^m < n \leq 2^m + 2^{m-1}; \\ -1, & 2^m + 2^{m-1} < n \leq 2^{m+1}. \end{cases}$$

Demek ki,  $a_3 = 1, a_4 = -1, a_5 = a_6 = 1, a_7 = a_8 = -1, \dots$  olmaktadır. Bu dizinin tastamam iki yığılma noktası olduğu halde, aritmetik ortalamalar dizisi  $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$  şunları gerçekler. Önce her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\sigma_{2^n} = 0$  olur, çünkü dikkat edilirse burada pay, yani  $a_1 + a_2 + \dots + a_{2^n}$ , önce  $a_3 + a_4 + \dots + a_{2^n}$  dir ve dolayısı ile

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n-1} ((a_{2^k+1} + \dots + a_{2^k+2^{k-1}}) \\ & \quad + (a_{2^k+2^{k-1}+1} + \dots + a_{2^k+1})) \\ & = \sum_{k=1}^{n-1} (2^{k-1} - 2^{k-1}), \end{aligned}$$

yani sıfırdır. Şimdi  $k$  sabit doğal sayısını alalım. Her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\begin{aligned} \sigma_{2^n+2^{n-k}} & = \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_{2^n})}{2^n + 2^{n-k}} \\ & \quad + \frac{(a_{2^n+1} + a_{2^n+2} + \dots + a_{2^n+2^{n-k}})}{2^n + 2^{n-k}} \\ & = \frac{2^{n-k}}{2^{n-k}(1+2^k)} = \frac{1}{2^k+1} \end{aligned}$$

olur, çünkü pay ifadesinde yer alan ilk parantez sıfırdır. İkinci parantez içinde toplam  $2^{n-k}$  tane  $+1$  vardır, çünkü bu ikinci parantezdeki tüm terimlerin numaraları apaçiktır ki  $> 2^n$  ve üstelik  $\leq 2^n + 2^{n-1}$  gerçeklerler. Demek ki (\*) dizisinin aritmetik ortalamalar dizisinin,

$$0, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{2^k+1}, \dots$$

değerlerini alan (ve dolayısı ile bu değerlere yakınsayan) birer sabit alt dizisi vardır. Peki  $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisinin başka yığılma noktası var mıdır?

**Problem 2.** Şimdi de şu diziyi araştıralım: *Öyle sınırlı bir  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  gerçel sayı dizisi tanımlayalım ki kendisi ve aritmetik ortalamalar dizisi arasında*

$$\underline{\lim} a_n < \underline{\lim} \sigma_n < \overline{\lim} \sigma_n < \overline{\lim} a_n$$

eşitsizlikleri geçerli olsun. İstenen nitelikte bir örneğin, yukarıda tanımlanan  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi olduğunu okuyucu kolayca görecektir.

**Problem 3.**  $[0, 1)$  aralığındaki tüm  $x$  gerçel sayılarının tam kısımları  $[x] = 0$  gerçekler. Bu sayıların herhangi birisinin  $x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots$  şeklinde, bir ve bir tek türlü belirlenmiş bir *2-tabanlı açılımı* vardır. Burada  $x_1, x_2, \dots$  tamsayıları, ya 0 ya 1 tamsayılarıdır; bunların belirli bir adımdan sonra hep 1 gitmelerini genelliği bozmaksızın yasaklayabiliriz. Vietoris 1921'de şu ilginç örneği önerdi:

$$f(0, x_1 x_2 x_3 \dots) = \overline{\lim} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

şeklinde tanımlanan  $f : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$  fonksiyonu,  $0 < \epsilon < \delta < 1$  sayıları ne olursa olsun  $f([\epsilon, \delta]) = [0, 1[$  gerçekler; kısacası bu fonksiyon, tanım aralığındaki herhangi bir alt aralıkta, inanılmaz ve grafiği çizilemez bir biçimde süreksiz sahnımlar yapmaktadır. Kanıtlamayı yine adım adım yapalım.

**3.1.** Herhangi bir  $0 \leq r_0 = \frac{m_0}{n_0} < 1$  rasyonel sayısına karşılık  $x_0 = 0,000\dots011\dots1 \in [0, 1)$  şeklinde tanımlanan  $x_0$  gerçel sayısı  $f(x_0) = r_0$  gerçekler; burada virgülden sonraki ilk  $n_0 - m_0$  tane basamağın tümü 0, son  $m_0$  tane basamağın tümü ise 1'dir ve  $x_0$  sayısı,  $n_0$  uzunluğundaki bu kalıbı sürekli tekrarlamaktadır. Dikkat edilirse basamakların aritmetik ortalamalar dizisinin

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n_0}}{n_0}, \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2n_0}}{2n_0}, \dots$$

terimlerinden oluşan alt dizisi  $r_0$  rasyonel sayısına yakınsar, çünkü bu alt dizinin tüm terimleri zaten  $\frac{m_0}{n_0} = r_0$  'dır. Şimdi, doğal sayıların herhangi bir  $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$  artışı ile belirlenen  $\{\sigma_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  alt dizisine bakalım. Her bir  $n_k$  için,  $N_k n_0 \leq n_k < (N_k + 1)n_0$  gerçekleyen ve

tek türlü belirlenebilen bir  $N_k$  doğal sayısı vardır ve elbette

$$\begin{aligned} \sigma_{n_k} &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n_k}}{n_k} \\ &\leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{(N_k+1)n_0}}{N_k \cdot n_0} \\ &= \frac{(N_k + 1)m_0}{N_k \cdot n_0} = r_0 \left(1 + \frac{1}{N_k}\right) \end{aligned}$$

nedeniyle, aritmetik ortalamalar dizisinin tüm diğer yakınsak alt dizilerinin limitleri  $\leq r_0$  ve hatta  $= r_0$  gerçekler, neden? Bu nedenle  $f(x_0) = r_0$  olur.

**3.2.** Herhangi bir  $0 < q < 1$  irrasyonel sayısına monoton artarak yakınsayan bir  $r_k = \frac{m_k}{n_k}$  pozitif rasyonel sayılar dizisi vardır. Önce  $0 < r_1 < q$  gerçekleyen  $r_1$  rasyonel sayısını, sonra  $\max\{r_1, (q - \frac{1}{2})\} < r_2 < q$  gerçekleyen  $r_2$  rasyonel sayısını, sonra  $\max\{r_2, (q - \frac{1}{3})\} < r_3 < q$  gerçekleyen  $r_3$  sayısını, v.b., belirleriz. İstenen  $\{r_k\}_{k=1}^\infty$  dizisi tümevarımla tanımlanır. Bu dizinin paydalarında yer alan  $n_k$  doğal sayıları sonsuz tanedir. Sonlu tane olsalardı, sonsuz tane  $r_{k_1}, r_{k_2}, \dots$  rasyonel sayısının paydasında aynı bir  $N$  doğal sayısı kullanılmış olurdu ki bu olanaksızdır, neden? Demek ki genelliği bozmaksızın, yukarıdaki dizinin paydalarının  $n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$  gerçeklediğini varsayabiliriz, neden? O halde

$$m_k = n_k r_k < n_{k+1} r_k < n_{k+1} r_{k+1} = m_{k+1}$$

nedeniyle paylar da kesin bir monoton artış gösterirler. Şimdi  $m_k - m_1 < n_k - n_1$  olacak şekilde bir  $k$  doğal sayısı bulalım. Tüm  $k$  indisi-leri için  $n_k - n_1 \leq m_k - m_1$  olsaydı,

$$f - \frac{n_1}{n_k} \leq r_k - \frac{m_1}{n_k}$$

eşitsizlikleri bize  $1 \leq q$  çelişkisini verirdi, neden? Bundan sonra  $m_k - m_1 < n_k - n_1$  gerçekleyen  $k$  doğal sayılarının en küçüğüne  $k_2$  ve sonra  $m_k - m_{k_2} < n_k - n_{k_2}$  gerçekleyen  $k$  doğal sayılarının en küçüğüne  $k_3$  diyelim v.b.. Tümevarımla öyle yeni bir  $R_k = \frac{M_k}{N_k}$  pozitif rasyonel sayı dizisi tanımlayabiliriz ki, kesin monoton artarak  $q$  irrasyonel sayısına yakınsar; hem paylar, hem de paydalar kesin artarlar ve üstelik  $M_k - M_{k-1} < N_k - N_{k-1}$  eşitsizlikleri her bir  $k$  indisi için geçerlidir. Şimdi

$$x_q = 0, \underbrace{000..011..1}_{000..011..1}..1 \dots$$

şeklinde tanımlanan  $x_q$  gerçel sayısını göz önüne alalım. İlk  $N_1$  tane basamağın ilk  $N_1 - M_1$  tanesi 0, son  $M_1$  tanesi 1 dir, hemen ardından gelen  $N_2 - N_1$  tane basamağın ilk  $(N_2 - N_1) - (M_2 - M_1)$  tanesi 0 ve son  $M_2 - M_1$  tanesi 1'dir, ardı sıra gelen  $N_3 - N_2$  tane basamağın ilk  $(N_3 - N_2) - (M_3 - M_2)$  tanesi 0 ve son  $M_3 - M_2$  tanesi 1 dir v.b.. Okuyucu artık  $f(x_q) = q$  gerçekleştiğini, tıpkı **3.1.**'deki gibi gösterebilir.

**3.3.**  $(0, 1)$  aralığındaki 2-açılımlı herhangi bir  $x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots$  sayısı ve herhangi bir sabit  $N$  doğal sayısı verilsin.  $a_1, a_2, \dots, a_N$  tam sayıları geliş güzel 0 ve 1'ler olmak üzere

$$f(0, a_1 a_2 \dots a_N x_1 x_2 x_3 \dots) = f(x)$$

geçerli olur, çünkü her bir  $n > N$  için, yeni tanımlanan gerçel sayının basamak ortalamaları

$$\begin{aligned} &\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-N}}{n} \\ &= \frac{A}{n} + \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \\ &\quad \frac{x_{n-N+1} + x_{n-N+2} + \dots + x_n}{n} \end{aligned}$$

gerçekler; burada  $A = a_1 + a_2 + \dots + a_N$  yazılmıştır ve

$$0 \leq x_{n-N+1} + x_{n-N+2} + \dots + x_n \leq N$$

gerçeklendiğinden (neden?),

$$\xi_n = \frac{A}{n} - \frac{x_{n-N+1} + x_{n-N+2} + \dots + x_n}{n}$$

dizisi sıfıra yakınsar. Sonuçta  $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$  yakınsak bir dizi olmak üzere, **1.3.**'ün benzeri olan

$$\overline{\lim}(\alpha_n + \beta_n) = \overline{\lim} \alpha_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$$

bilgisi kullanılarak istenen iddia elde edilir.

**3.4.**  $(0, 1)$  aralığında, 2-tabanlı açılımları

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots \quad \text{ve} \quad y = 0, y_1 y_2 y_3 \dots$$

olan her hangi iki gerçel sayının  $x < y$  gerçekleyebilmesi için gerek ve yeter koşul, ilk farklı basamaklar olan  $x_m \neq y_m$  için  $x_m < y_m$  gerçekleşmesidir. Örneğin

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_{m-1} = y_{m-1}$$

ve

$$x_m = 0 < 1 = y_m$$

ise,

$$\begin{aligned}
x_k &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} = \sum_{k < m} \frac{y_k}{2^k} + \frac{0}{2^m} + \sum_{k > m} \frac{x_k}{2^k} \\
&< \sum_{k < m} \frac{y_k}{2^k} + \left( \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+2}} + \dots \right) \\
&= \sum_{k < m} \frac{y_k}{2^k} + \frac{1}{2^m} = \sum_{k < m} \frac{y_k}{2^k} + \frac{y_m}{2^m} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{2^n} = y
\end{aligned}$$

elde edilir. Hem gerek, hem yeter koşul gösterilmiş oldu, neden? Burada  $x$ 'in  $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots$  basamaklarının tümünün 1 olmadığını söyleyen bilginin kullanıldığına dikkat ediyor muyuz? Bu sonuç bir bakıma, *göstergebilim* sözcüğünün, sözlükte *göstergesiz* sözcüğünden önce gelmesine benzemektedir; ilk farkedene harf de (basamakta) alfabetik sıralama gözönüne alındığında  $b < s$  olmaktadır.

**3.5.** Şimdi yeterince küçük pozitif  $\epsilon < \delta$  sayıları verilsin.  $\frac{1}{2^m} < \frac{\delta - \epsilon}{2}$  gerçekleyen bir  $m$  doğal sayısı belirlensin.

$$\frac{0}{2^m}, \frac{1}{2^m}, \dots, \frac{k}{2^m}, \dots, \frac{2^m - 1}{2^m}, \frac{2^m}{2^m}$$

kesirli sayılarından ardışık iki tanesi

$$\epsilon < \frac{k}{2^m} < \frac{k+1}{2^m} < \delta$$

gerçekler, çünkü dikkat edilirse,

$$\frac{k-1}{2^m} \leq \epsilon < \frac{k}{2^m}$$

gerçeklenecek biçimde tek bir  $k < 2^m$  vardır (neden?) ve üstelik  $\delta \leq \frac{k+1}{2^m}$  olamaz, neden? O halde

$$f\left(\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]\right) = [0, 1)$$

gösterebilirsek,  $f([\epsilon, \delta]) = [0, 1)$  sonucu kolayca elde edilir. Bu sonuncuyu göstermek ise çok kolaydır.  $k$  tam sayısının,  $a_0, a_1, \dots, a_m$  tam sayıları 0 ya da 1 olmak üzere,

$$k = a_0 2^0 + a_1 2^1 + \dots + a_m 2^m$$

biçiminde tek türlü yazılabildiğini bildiğimizden,  $\frac{k}{2^m}$  kesirli sayısının 2-tabanlı açılımı

$$\frac{k}{2^m} = 0, a_m a_{m-1} a_{m-2} \dots a_0 000 \dots$$

olur. Benzer biçimde

$$\frac{k+1}{2^m} = 0, b_m b_{m-1} \dots b_0 000 \dots$$

ve üstelik

$$0, a_m a_{m-1} \dots a_0 00 \dots < 0, b_m b_{m-1} \dots b_0 00 \dots$$

geçerlidir. Şimdi **3.1.**'de tanımlanan  $x_0$  gerçel sayısının açılımı  $x_0 = 0, x_{01} x_{02} x_{03} \dots$  olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\frac{k}{2^m} &< x^* = 0, a_m a_{m-1} \dots a_0 1 x_{01} x_{02} x_{03} \dots \\
&< \frac{k+1}{2^m}
\end{aligned}$$

ve üstelik **3.3.** nedeniyle  $f(x^*) = r_0$  olacağı açıktır. Aynen,  $f(x_q^*) = q$  ve

$$\frac{k}{2^m} < x_q^* < \frac{k+1}{2^m}$$

gerçekleyen  $x_q^*$  gerçel sayısı da **3.2.**'deki  $x_q$  yardımıyla tanımlanır. Bitti!

**Problem 4.** Şu iddia kuşkusuz çok şartlıdır: *Herhangi bir pozitif terimli  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi için*

$$\overline{\lim} \left( \frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n} \right)^n \geq e$$

*gerçeklenir.* Dikkat:  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi bir gerçel sayıya yakınsarsa bu üst limit  $+\infty$ 'dur. Örneğin  $\lim a_n = a > 0$  ise, uygun bir  $N_1 \in \mathbb{N}$  sayesinde,  $n \geq N_1$  için

$$(1 + \epsilon)^n < (A - \epsilon)^n < \left( \frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n} \right)^n$$

gerçeklenir, çünkü  $a_1 > 0$  ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_1 + a}{a} = A > 1$$

nedeniyle uygun bir  $0 < \epsilon$  sayesinde  $1 + \epsilon < A - \epsilon$  olur. Eğer  $\lim a_n = 0$  ise,  $n \geq N_2$  için bu kez

$$2 < \frac{a_1}{a_n} < \frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n}$$

olur. Şimdi okuyucu, genel halde bu problem yerine, onun eşdeğeri olan

$$\begin{aligned}
\overline{\lim} \left( \frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n} \right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \\
= \overline{\lim} \left( \frac{n(a_1 + a_{n+1})}{(n+1)a_n} \right)^n \geq 1
\end{aligned}$$

eşitsizliğini göstermeye çalışmalıdır. Bu problemin güzel bir çözümü için, Türk Matematik Derneği yayınlardan No:29, *Matematikte Endüksiyon ve Benzetme*, G. Polya, Cilt 1, 1966, (Çeviren: Orhan İcen) s.131'e başvurulabilir.