

# MOSKOVA BAĞIMSIZ ÜNİVERSİTESİ

## GİRİŞ SINAVI

Derleyen: Şafak Alpay \*

Ünlü Moskova Devlet Üniversitesi'nin işlevini yerine getiremediği düşüncesi ile bazı Moskovalı matematikçiler Bağımsız Moskova Üniversitesi'ne bağlı olarak kurulan Matematik Koleji ile gelecekteki araştırmacıları yetiştirmek için yeni bir okul kurdular. Kurucuları V.I. Arnold ve N.N. Konstantinov olan okul aşağıda sorularını verdiğimiz sınavla Eylül 1991'de sayıları 45 olan ilk öğrencilerini seçti. Haziran 1991 tarihinde yapılan sınav 120 üzerinden değerlendirildi.

### Giriş Sınavı

1. Gerçek  $x$  ve  $y$  için  $f(x) - f(y) \leq (x - y)^2$  eşitsizliğini sağlayan tüm  $f$  fonksiyonlarını bulunuz.

2.  $x^{2n} - 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} - \dots - 2nx + 2n + 1$  çokterimlisinin gerçel kökü olmadığını gösteriniz. ✓

3.  $2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$  sayısının asal çarpanlarının sayısının  $n$ 'den küçük olmadığını gösteriniz. (Asal çarpanlar farklı olmayabilir.)

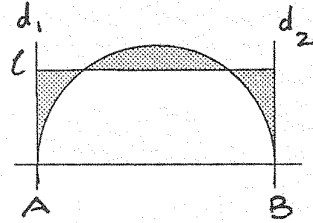
4. Düzgün bir tetrahedronun içine ve dışına çizilen kürelerin hacimlerinin oranını bulunuz.

5. Bir  $ABC$  üçgeninin tüm açılarının dar açı olması için gerekli ve yeterli koşulun,  $AB$ ,  $AC$  ve  $BC$  kenarları üzerinde  $AA'$ ,  $BB'$  ve  $CC'$ 'nin eşit uzunlukta olduğu  $A'$ ,  $B'$  ve  $C'$  noktalarının varlığı olduğunu kanıtlayınız.

6.  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  dizisi  $1, 2, \dots, 100$  sayılarının bir permütasyonu olsun.  $1 \cdot a_1 +$

$2 \cdot a_2 + \dots + 100 \cdot a_{100}$  toplamının minimum değerinin  $100, 99, \dots, 1$  permütasyonu için alındığını gösteriniz.

7. Şekilde,  $AB$  verilen dairenin yarıçapı,  $d_1$  ve  $d_2$ ,  $A$  ve  $B$  noktalarında çizilen teğetler ise taralı alanın minimum olacağı  $\ell$  doğrusunu bulunuz.



8.  $L_1$  ve  $L_2$ , çevresi  $L$  olan dairenin içine ve dışına çizilen düzgün  $n$ -genlerin çevresi olsun.  $S$  dairenin,  $S_1, S_2$  çokgenlerin alanları ise

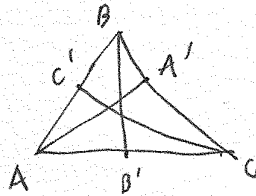
a)  $L^2 < L_1 L_2$  ve

b)  $S_1 S_2 < S^2$

olduğunu gösteriniz.

9. Bir üçgenin kenar uzunlukları oranının alabileceği sayılar neler olabilir?

10. Her alt dizisinin periyodik olmayan bir aritmetik alt dizisi olan, 0 ve 1'lerden oluşmuş bir dizi var mıdır?



Not: Herkes için  $f(x) = f(y) \leq (x-y)^2$  ise aynı  $f$  için  $f'(x) = f'(y) = 0$  olur.  $f(x) = f(y) \leq (x-y)^2$  ise  $f'(x) = f'(y) = 0$  olur.  $f(x) = f(y) \leq (x-y)^2$  ise  $f'(x) = f'(y) = 0$  olur.

\* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi