GEOMETRİ PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Alparslan Ertuğ

Geometri problemleri çözülürken genellikle üç temel yöntem kullanılır: Geometrik, cebirsel ve birleşik yöntem. Geometrik yöntem, bilinen bir dizi teoremden mantıksal önermeler yardımıyla istenen ifadenin çıkarılmasıdır. Cebirsel yöntem ise geometrik büyüklükler arasındaki çeşitli ilişkileri esas alan bir denklem ya da denklem sistemi kurularak, ya istenen büyüklüklerin doğrudan doğruya hesaplanması yada bir ifadenin ispatlanmasıdır. Birleşik yöntemde ise, çözümün bazı adımlarında bir geometrik yöntem, diğer adımlarında ise cebirsel bir yöntem kullanılır.

Hangi çözüm yolu seçilirse seçilsin, bunun başarıyla uygulanması, teoremlerin ve onların kullanımının bilinmesine bağlıdır. Burada düzlem geometrinin bütün teoremlerinden söz etmeyeceğiz.

Geometri problemlerini çözerken sık sık, iki doğru parçasının ya da iki açının birbirine eşit olduğunu kanıtlamamız gerekir. Aşağıda, iki doğru parçasının (uzunlukça) eşit olduğunun kanıtlanmasının üç temel yolu verilmiştir:

1. Doğru parçalarını iki üçgenin kenarları olarak kabul eder ve bu üçgenlerin eşit olduklarını ispatlarız.

2. Doğru parçalarını bir üçgenin kenarları olarak kabul eder ve bu üçgenin ikizkenar olduğunu ispatlarız.

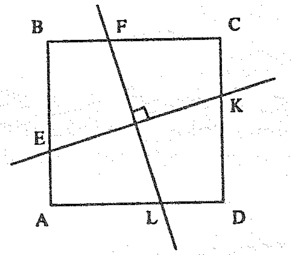
3. Verilen a doğru parçasını kendisine eşit bir a' doğru parçasıyla ve b doğru parçasını kendisine eşit bir b' doğru parçasıyla değiştirir, a' ve b' doğru parçalarının birbirine eşit olduğunu ispatlarız.

Geometri problemlerini çözerken;

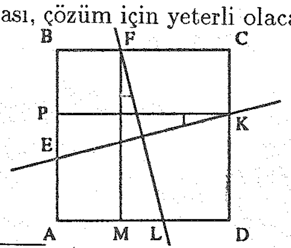
- verilen şekildeki doğruya paralel ya da dik bir doğru çizmek;
- üçgenin kenarortayını kendisi kadar uzatarak üçgeni paralelkenara çevirmek;
- yardımcı bir çember çizmek;
- bir doğrunun çembere teğet olduğu ya da iki çemberin birbirine teğet olduğu noktalardaki yarıçaplarını çizmek;

gibi ek yapılar oluşturmak yoluna da gidebiliriz.

Örnek 1. Birbirine dik iki doğru, $ABCD$ dörtgeninin AB, BC, CD ve AD kenarlarını sırasıyla E, F, K ve L noktalarında kesiyor. $EK = FL$ olduğunu gösteriniz (Şekil 1).

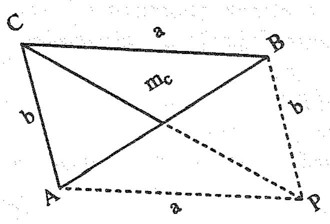


Çözüm. Yukarıda belirtilen yollardan birincisini uygulayarak, CD'ye paralel FM ve AD'ye paralel KP doğru parçalarını çizelim. Böylece EK ve FL doğru parçaları, EKP ve FLM dik üçgenlerinin kenarları haline gelirler (Şekil 2). Bu iki üçgenin eşit olduğunun kanıtlanması, çözüm için yeterli olacaktır.



$\overline{PK} = \overline{FM}$ (verilen karenin yükseklikleri), $\sphericalangle LFM = \sphericalangle EKP$ (kenarları birbirine dik açılar). Bir kenarları ve bir dar açıları eşit olan iki dik üçgen birbirine eşit olduğundan, $\Delta EKP = \Delta FLM$ olacaktır. O halde bu iki dik üçgenin hipotenüsleri de birbirine eşittir. Yani $\overline{EK} = \overline{FL}$ olmaktadır.

Örnek 2. Kenarları a, b ve c olan bir üçgenin c kenarına ait kenarortayının uzunluğunu hesaplayınız.



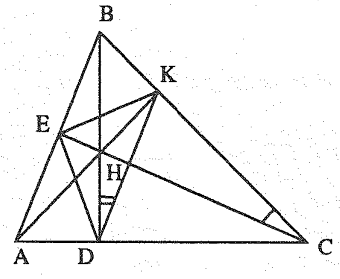
Çözüm. Kenarortayı kendisi kadar uzatıp $ACBP$ paralelkenarını oluşturalım (Şekil 3). Paralelkenarda metrik bağıntıyı uygulayarak $\overline{CP}^2+\overline{AP}^2 = 2\overline{AC}^2+2\overline{BC}^2$ yazabiliriz. Buradan $(2V_c)^2 + c^2 = 2b^2 + 2a^2$ ve

$$V_c = \frac{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}{2}$$

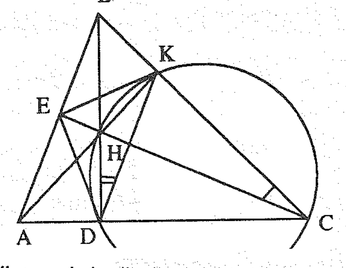
elde edilir.

Örnek 3. Bir dar açılı üçgenin ortosantrının, yüksekliklerin ayaklarının oluşturduğu üçgenin içteğet çemberinin merkeziyle çakıştığını kanıtlayınız.

Çözüm: Bir üçgenin iç teğet çemberinin merkezinin, açıortayların kesim noktası olduğu göz önüne alındığında, problem DH, EH ve KH'nın, DEK üçgeninin açıortayları olduğunun kanıtlanmasına indirgenmiş olur (Şekil 4).



Bunun için de, $\sphericalangle EDH = \sphericalangle HDK$ olduğunun kanıtlanması yeterli olacaktır.



$DHKC$ dörtgenini göz önüne alalım: $\sphericalangle HDC = 90°$ ve $\sphericalangle HKC = 90°$. Buradan $\sphericalangle HDC + \sphericalangle HKC = 180°$ bulunur. O halde $DHKC$ dörtgeninin çevresine bir çember çizilebilir. Bu çemberi çizelim (Şekil 5). HK yayını gören çevre açılar olmaları nedeniyle $\sphericalangle HDK = \sphericalangle EDH$ bulunur. Öte yandan kenarları birbirine dik açılar olmaları nedeniyle $\sphericalangle EAH = \sphericalangle HCK$ yazılabilir, ve buradan da $\sphericalangle EDH = \sphericalangle HDK$ elde edilmiş olur.

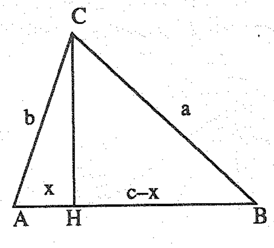
Geometri problemlerini cebirsel yöntemle çözerken gerekli denklemleri kurmak için, Pisagor teoremi, dik üçgende metrik ilişkiler, bir dik üçgenin açıları ve kenarları arasındaki ilişkiler, benzer üçgenlerin kenarları, yükseklikleri ve çevrelerinin orantılılığı, açıortay özellikleri, paralelkenar ve çemberdeki metrik ilişkiler, sinüs ve kosinüs teoremleri ile alan hesabı formüllerinden yararlanılır.

Bir referans elemanı yöntemi ise, geometri problemlerini çözerken denklem kurmak için temel bir yöntemdir. Bu yöntem şöyle özetlenebilir. Bir ve aynı eleman (bilinen ve bilinmeyenler cinsinden) iki farklı yolla ifade edilir ve bu ifadeler birbirine eşitlenir. Referans elemanı olarak alan kullanılırsa, problemin **alanlar yöntemiyle** çözüldüğü söylenir.

Örnek 4. Kenarları a, b ve c olan bir üçgenin h_c yüksekliğini hesaplayın.

Çözüm. Birinci Yöntem. h_c yüksekliği, ACH ve CHB dik üçgenlerinin ortak kenarıdır (Şekil 5). (CH kenarını referans elemanı olarak alıp) Pisagor teorimini uygulayarak, $\overline{CH}^2$'yi hem ACH hem de CHB üçgeni için ifade ederiz.

$\overline{AH} = x$ olsun. $\overline{BH} = c - x$ olacaktır. Eğer ACB üçgeni geniş açılı üçgen ise, $\overline{BH} = c + x$ olacaktır (Şekil 6).



Biz burada yalnızca Şekil 5'teki durumu ele alacağız.

ACH üçgeninden $\overline{CH}^2 = b^2 - x^2$, BCH üçgeninden ise $\overline{CH}^2 = a^2 - (c-x)^2$ olarak bulunur. $\overline{CH}^2$ değerlerini birbirine eşitlersek,, $b^2 - x^2 = a^2 - (c-x)^2$ bulunur. Buradan

$$x = \frac{c^2+b^2-a^2}{2c}$$

elde edilir. ACH üçgeninde Pisagor teoremini uygulayarak aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$\begin{aligned}\overline{CH} &= \sqrt{b^2 - \left(\frac{c^2+b^2-a^2}{2c}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(b - \frac{c^2+b^2-a^2}{2c}\right)\left(b + \frac{c^2+b^2-a^2}{2c}\right)} \\ &= \frac{1}{2c}\sqrt{(a^2-(b-c)^2)((b+c)^2-a^2)} \\ &= \frac{1}{2c}\sqrt{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)(a+b+c)}\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

İkinci Yöntem. Alanlar yöntemini kullanalım. ABC üçgeninin alanı, bir yandan $S = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$ formülünden, öte yandan $S = \frac{1}{2}ch_c$ formülünden hesaplanabilir. Bu ifadelerin eşitlenmesiyle

$$\frac{1}{2}ch_c = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$$

elde edilir, ve buradan da

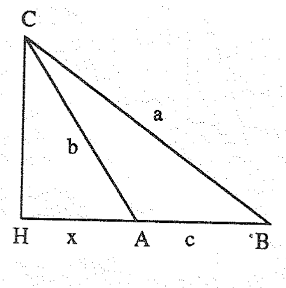
$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$$

bulunur. Bu ifadede $u = \frac{a+b+c}{2}$ değerini yerine koyarsak, aşağıdaki sonuca ulaşırız:

$$h_c = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2c}.$$

Örnek 5. Bir üçgenin kenarları a, b ve c olsun. C açısının açıortayı n_c'yi hesaplayınız.

Çözüm. Birinci Yöntem (Cebirsel). ABC üçgeninin C açısının açıortayı CD olsun (Şekil 7).



Çözüm yolu şöyle olacaktır.

AB ve BD doğru parçalarının uzunluklarını buluruz. ACD ve BCD üçgenlerine kosinüs teoremini uygulayarak ve $\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB$ olduğunu göz önüne alarak CD yi buluruz. (Kolaylık olması açısından $CD = 1$ ve $\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB = t$ olarak alınmıştır.) $AD = x$ ve $BD = y$ olsun. O halde $x + y = c$ olacaktır. Öte yandan açıortay özelliğinden; $x/y = a/b$ olduğu bilinmektedir. Bu iki denklemden $x = bc/(a+b)$ ve $y = ac/(a+b)$ olarak elde edilir. ACD üçgenine kosinüs teoremini uygulayarak

$$x^2 = b^2 + l^2 - 2bl\cos t; \qquad (1)$$

BCD üçgeninde kosinüs teoremini yazarak

$$y^2 = a^2 + l^2 - 2al\cos t \qquad (2)$$

bulunur. (1) eşitliğinin iki tarafını a ile ve (2) eşitliğinin iki tarafını $-b$ ile çarpıp taraf tarafa toplarsak $ax^2 - by^2 = ab^2 - a^2b + al^2 - bl^2$ elde ederiz. Buradan da

$$l^2 = \frac{1}{a-b}(x^2a - y^2b) + ab \qquad (3)$$

bulunur. x ve y için yukarıda bulunan ifadeler (3) eşitliğinde yerlerine konulursa,

$$\begin{aligned}l^2 &= \frac{1}{a-b}\left(\frac{b^2c^2a}{(a+b)^2} - \frac{a^2c^2b}{(a+b)^2}\right) + ab \\ &= ab\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right) \\ &= \frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}\end{aligned}$$

olarak elde edilir, ve buradan da

$$l = \overline{CD} = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}$$

bulunur.

İkinci Yöntem. Bulmak istediğimiz bilinmeyenin yanına bir yardımcı bilinmeyen ekleyelim ve $x = \sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB$ diyelim, ve alanlar yöntemini kullanalım: $S_{ACD} + S_{BCD} = S_{ABC}$. Öte yandan

$$\begin{aligned}S_{ABC} &= \frac{1}{2}ab\sin 2x \\ S_{ACD} &= \frac{1}{2}bl\sin x \\ S_{BCD} &= \frac{1}{2}al\sin x\end{aligned}$$

değerlerini göz önüne alarak;

$$\frac{1}{2}ab\sin 2x = \frac{1}{2}al\sin x + \frac{1}{2}bl\sin x$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan da

$$\begin{aligned} ab\sin x\cos x &= \frac{1}{2}(\ell(a+b)\sin x), \\ \ell &= \frac{2ab\cos x}{(a+b)} \end{aligned}$$

buluruz.

$\cos x$'i bulmak için ABC üçgeninde kosinüs teoremini uygulayalım: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 2x$ ve

$$\cos 2x = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Öte yandan

$$\cos x = \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$$

olduğuna göre, aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$\begin{aligned} \cos x &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab}}. \end{aligned}$$

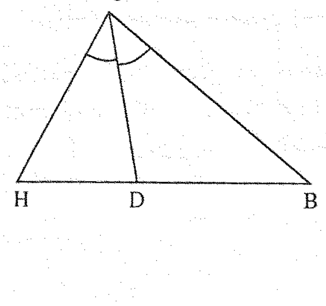
Buradan da

$$\begin{aligned} l &= \frac{2ab\cos x}{a+b} = \frac{ab}{a+b}\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab}} \\ &= \sqrt{\frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{a+b}} \end{aligned}$$

değerini elde ederiz.

Geometri problemlerinin çözümü için denklem kurarken, çözümü kolaylaştırmak için zaman zaman yeni bilinmeyenlerin eklenmesi gerekebilir. Bu durumu aşağıdaki örnekle açıklayalım:

Örnek 6. Bir dik üçgende hipotenüs c ve dar açılardan birinin açıortayının ölçüsü $c\frac{\sqrt{3}}{3}$'tür. Dik kenarları bulun (Şekil 8).



Çözüm. Birinci Yöntem. $\overline{AC} = x$, $\overline{BC} = y$, $\overline{CD} = z$ diyelim. Pisagor teoreminden

$$x^2+y^2=c^2 \quad \text{ve} \quad x^2+z^2=\left(\frac{c\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

yazabiliriz. Öte yandan, açıortay özelliğinden

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}} \Longrightarrow \frac{x}{c} = \frac{z}{y-z}$$

yazabiliriz. Sonuçta aşağıdaki üç bilinmeyenli denklem sistemini elde ederiz:

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= c^2 \\ x^2+z^2 &= \frac{c^2}{3} \\ \frac{x}{c} &= \frac{z}{y-z} \end{aligned}$$

Bu sistemin çözülmesi ise bir hayli zordur.

İkinci Yöntem. $\sphericalangle CAD = \sphericalangle BAD = x$ diyelim. AC doğru parçasını bir referans elemanı olarak kullanarak bir denklem kuralım. ABC üçgeninden $\overline{AC} = c\cos 2x$; ACD üçgeninden ise $\overline{AC} = \frac{c\sqrt{3}}{3}\cos x$ bulunur. Bu ifadeleri eşitleyerek aşağıdaki trigonometrik denklemi elde ederiz:

$$c\cos 2x = \frac{c\sqrt{3}}{3}\cos x.$$

Bu eşitliği çözersek

$$\begin{aligned} \sqrt{3}\cos 2x &= \cos x \\ \sqrt{3}(2\cos^2 x - 1) &= \cos x \\ 2\sqrt{3}\cos^2 x - \cos x - \sqrt{3} &= 0 \end{aligned}$$

buluruz ve buradan da $\cos x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ elde ederiz. Problemin verilişine göre $\cos x > 0$ olmalıdır. O halde,

$$\cos x = \sqrt{\frac{3}{2}} \Longrightarrow \sphericalangle BAD = 30°, \ \sphericalangle BAC = 60°$$

olacaktır. Bunları kullanarak

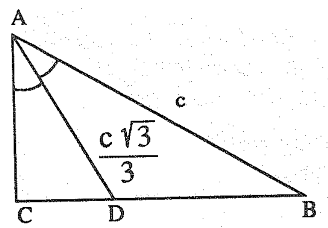
$$\overline{AC} = \frac{c}{2} \quad \text{ve} \quad \overline{BC} = \frac{c\sqrt{3}}{2}$$

sonucunu buluruz.

Eğer bir problemde (uzunluklar ya da alanlar gibi) bazı büyüklüklerin oranının bulunması gerekiyorsa ya da özel olarak bir açının hesaplanması gerekiyorsa (bu durum, o açının bir fonksiyonunun bulunmasına ve dolayısıyla da bir dik üçgenin kenarlarının oranının hesaplanmasına indirgenebilir), genellikle aşağıdaki yolu izleriz:

Doğrusal elemanlardan birini bilinen kabul eder, hesaplanması istenen büyüklükleri bu eleman cinsinden ifade eder ve sonra da bunların oranını oluştururuz. Bu doğrusal elemana yardımcı parametre denir ve bu çözüm yolu **yardımcı parametre kullanılması yöntemi** olarak adlandırılır. Geometrik şekillerin benzerliğinin söz konusu olduğu problemlerin çözümünde kullanılır.

Örnek 7. Bir ABC dik üçgeninin hipotenüsüne ait kenarortayı ile yüksekliği arasındaki açının değeri $\arccos(40/41)$'dir. Dik kenarların oranını bulunuz (Şekil 9).



Çözüm. Önce verilenlerden $\cos\alpha = \frac{40}{41}$, yani $\frac{\overline{CK}}{\overline{CM}} = \frac{40}{41}$ olduğu sonucunun çıkarılabileceğine dikkat edelim. Problemi yardımcı parametre yöntemiyle çözeceğiz.

$\overline{CK} = h$ diyelim. Buna göre $\overline{CM} = \frac{41}{40}h$ ve

$$\overline{KM} = \sqrt{\overline{CM}^2 - \overline{CK}^2} = \frac{9}{40}h$$

olacaktır. Bir dik üçgende kenarortayın hipotenüsün yarısına eşit olduğunu biliyoruz. O halde

$$\overline{AM} = \overline{CM} = \overline{MB} = \frac{41}{40}h$$

olacaktır. Buradan da,,

$$\overline{AK} = \overline{AM} - \overline{KM} = \frac{41}{40}h - \frac{9}{40}h = \frac{4}{5}h$$

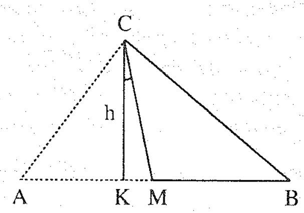
$$\overline{KB} = \overline{KM} + \overline{BM} = \frac{9}{40}h + \frac{41}{40}h = \frac{5}{4}h$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AK}^2 + \overline{CK}^2} = \sqrt{\frac{16}{25}h^2 + h^2} = \frac{h}{5}\sqrt{41}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{BK}^2 + \overline{CK}^2} = \sqrt{\frac{25}{16}h^2 + h^2} = \frac{h}{4}\sqrt{41}$$

bulunur.

Örnek 8. Bir ikizkenar ABC üçgeninin tepe açısı C, $100°$'dir. Başlangıcı A olan ve AB ile $30°$ lik açı yapan bir ışın ile başlangıcı B olan ve AB ile $20°$ lik açı yapan ikinci bir ışın çiziliyor. Bu ışınlar M noktasında kesişiyorlar. $\sphericalangle ACM$ ve $\sphericalangle BCM$ açılarını bulunuz (Şekil 10).



Çözüm. M ve C noktalarını birleştirelim ve ACM açısına x diyelim. Sonra M noktasından üçgenin kenarlarına dikler çizelim:

$$\overline{MC_1} \perp \overline{AB}, \quad \overline{MB_1} \perp \overline{AC}, \quad \overline{MA_1} \perp \overline{BC}.$$

$\overline{CM} = a$ diyerek yardımcı bir parametre kullanır ve $\overline{MC_1}$'i referans elemanı olarak alıp $\overline{MC_1}$'i iki yolla hesaplarız.

CMB_1 üçgeninden $\overline{MB_1} = \overline{MC}\sin x = a\sin x$ buluruz. $\sphericalangle ACB = 100°$ ve üçgen ikizkenar olduğu için, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC = 40°$ ve $\sphericalangle CAM = 10°$ olacaktır. AMB_1 üçgeninden

$$\overline{AM} = \frac{\overline{MB_1}}{\sin 10°} = \frac{a\sin x}{\sin 10°},$$

AMC_1 üçgeninden ise

$$\overline{MC_1} = \overline{AM}\sin 30° = \frac{a\sin x}{2\sin 10°}$$

bulunur.

CMA_1 üçgenini göz önüne alalım: $\sphericalangle MCA_1 = 100° - x$. Dolayısıyla

$$\overline{MA_1} = \overline{CM}\sin(100° - x) = a\sin(100° - x),$$

ve BMC_1 ile BMA_1 üçgenleri eş olduğu için

$$\overline{MC_1} = \overline{MA_1} = a\sin(100° - x).$$

$\overline{MC_1}$ için bulunan ifadeleri eşitleyerek aşağıdaki trigonometrik denklemi elde ederiz:

$$\frac{a\sin x}{2\sin 10°} = a\sin(100° - x).$$

Bu denklemi çözerek sonuca ulaşırız:

$$\begin{aligned} \sin x &= 2\sin(100° - x)\sin 10° \\ \sin x &= \cos(90° - x) - \cos(110° - x) \\ \cos(110° - x) &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$x = 20°$$