

## PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Geçen sayıdaki problemlerin numaraları **A76–A80** ve **Y76–Y80** olarak alınmıştır. Bundan böyle bu numaralama sistemi devam ettirilecektir.

### ALİŞTİRMA PROBLEMLERİ

**A81.** Birbirine eş olan dört çemberden üçünün her biri, verilen bir  $ABC$  üçgeninin içinde olup açılardan birinin iki kenarına teğettir. Dördüncü çember bu üç çembere teğet ise bu çemberlerin cetvel ve pergelle çizilebileceğini gösteriniz.

**A82.** Tabanı  $[BC]$  ve  $A$  açısı geniş olan bir  $ABC$  üçgeninin  $A$  köşesi ve yan kenarlarının birer kısmı çizim kağıdının dışına taşmıştır. Bu üçgenin  $[AD]$  kenarortayını,  $[AE]$  iç açıortayını ve  $[AF]$  yüksekliğini belirleyiniz.

**A83.**  $O$  kesişme noktası çizim kağıdının dışına düşen  $a$  ve  $b$  doğruları ve bunların dışında bir  $C$  noktası veriliyor.  $CO$  doğrusunu cetvel ve pergelle belirleyiniz. (*Hüseyin Demir*)

**A84.** İki ve üç basamaklı sayılarla ilgili olarak

$$\begin{aligned} ABC &= (DE)^2 \\ CBA &= (ED)^2 \end{aligned}$$

sistemini çözünüz. (*Hüseyin Demir*)

**A85.**  $\sqrt{13 + 30\sqrt{2} + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}$  sayısının  $n, m$  tamsayı olmak üzere  $n + m\sqrt{2}$  şeklinde ifade ediniz.

### YARIŞMA PROBLEMLERİ

**Y81.**  $F$  odağı ve  $d$  doğrultmanı ile belirli parabol ile bir  $m$  uzunluğu verildiğinde, parabolün odağından geçen  $m$  uzunluktaki bir kirişin pergel ve cetvelle çizilebileceğini gösteriniz. (*Hüseyin Demir*)

**Y82.** Eşkenar bir  $ABC$  üçgeninin içinde ya da üzerinde alınan değişken bir  $P$  noktasına göre ayak üçgeni  $DEF$ , ve  $AD, BE, CF$  doğruları noktadaş ise  $P$ 'nin geometrik yerini belirleyiniz. (*Hüseyin Demir*)

**Y83.**  $1, 2, \dots, n$  tamsayılarını rastgele  $a_1, a_2, \dots, a_n$  şeklinde sıralayıp  $T = |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - a_1|$  toplamını

hesaplarsak elde edebileceğimiz en büyük  $T$  değerini bulunuz.

**Y84.** Her  $x \in [-1, 1]$  için  $f(f(x)) = -x$  koşulunu sağlayan bir  $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  fonksiyonu var mıdır? (*H. Turgay Kaptanoğlu*)

**Y85.** Bir  $X$  kümesinin  $h$  elemanlı  $k$  tane alt kümesi  $X_1, X_2, \dots, X_k$  veriliyor:  $X_i \subseteq X$ ,  $|X_i| = h$ ,  $i = 1, \dots, k$ .  $\min |X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k|$ 'nin,  $k \leq C(m, h)$  özelliğine sahip en küçük  $m$  sayısına eşit olduğunu gösteriniz.

### ÇÖZÜMLER

**A71.** Bir teğetler dörtgeninde karşılıklı iki kenar birbirine eşitse, içteğet çember merkezinin diğer iki kenarın orta noktalarından eşit uzaklıkta olduğunu gösteriniz.

**Çözüm.** Bir  $ABCD$  teğetler dörtgeninde  $a = |AB|$ ,  $b = |BC|$ ,  $c = |CD|$ ,  $d = |DA|$  yazalım ve  $a \geq c$ ,  $b = d$  varsayalım.  $[AB]$  ve  $[CD]$ 'nin orta noktalarını  $E$  ve  $F$  ile, içteğet çemberin merkezini de  $I$  ile gösterelim.  $C$  ve  $D$  noktalarının  $BI$  ve  $AI$  doğrularında yansımaları sırasıyla  $C'$  ve  $D'$  olsun. Tabii ki  $C'$  ve  $D'$ ,  $AB$  doğrusu üzerinde kalmalıdır.  $[C'D']$ 'nin orta noktası  $E'$ 'dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} |C'D'| &= |BC'| + |AD'| - |AB| \\ &= b + d - a = a + c - a = c = |CD| \end{aligned}$$

olup,  $ICD$  ve  $IC'D'$  üçgenleri eşittir. Bu üçgenlerin ortak  $I$  köşesine ait kenarortayların uzunlukları olan  $|IE|$  ve  $|IF|$  eşit olmalıdır.

(**Çözenler:** *Ataşın Baykal, Ergün Yereneri, Suat Namlı, Burhan Biçer, Ruhi Tabur, Alaatin Aktaş, Ali Tombak, Emre Alkan.*)

**A72.**  $A, B, C$  köşeleri karşısındaki dışteğet çemberlerin yarıçapları sırasıyla  $r_a, r_b, r_c$  olan bir  $ABC$  üçgeninin içindeki bir  $P$  noktasından  $BC, CA, AB$  kenarlarına indirilen dikmelerin ayakları sırasıyla  $D, E, F$  olsun.

$$|AE| + |AF| = |BF| + |BD| = |CD| + |CE|$$

olması için gerek ve yeter şartın

$$|PD| : |PE| : |PF| = r_b + r_c - r_a : r_c + r_a - r_b : r_a + r_b - r_c$$

olduğunu gösteriniz. (Hüseyin Demir)

**Çözüm.**  $a = |BC|$ ,  $b = |CA|$ ,  $c = |AB|$ ,  $2s = a + b + c$  olsun.  $ABC$ 'nin içteğet çemberinin yarıçapını da  $r$  ile gösterelim.  $x = |PD|$ ,  $y = |PE|$ ,  $z = |PF|$  koyarak  $|AE|$  ve  $|AF|$ 'yi hesaplayalım:  $P$ 'den  $AE$ 'ye çizilen paralel  $AB$ 'yi  $L$ 'de kessin,  $AC$  üzerinde  $PEML$  bir dikdörtgen teşkil edecek şekilde bir  $M$  noktası alalım.

$$|LM| = |PE| = y$$

olup,

$$\begin{aligned} |AE| &= |AM| + |ME| \\ &= y \cot A + |PL| = y \cot A + z \csc A \end{aligned}$$

dır. Aynı yöntemle

$$|AF| = |AL| + |LF| = y \csc A + z \cot A$$

olup,

$$\begin{aligned} |AE| + |AF| &= \frac{y(1 + \cos A) + z(1 + \cos A)}{\sin A} \\ &= \frac{(y + z)(1 + \cos A)}{\sin A} \\ &= \cot \frac{A}{2} (y + z) = \frac{s - a}{r} (y + z) \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde de

$$|BF| + |BD| = \frac{s - b}{r} (z + x)$$

ve

$$|CD| + |CE| = \frac{s - c}{r} (x + y)$$

elde edilir. Bu miktarların eşit olması için gerek ve yeter şart olarak

$$(s - a)(y + z) = (s - b)(z + x) = (s - c)(x + y),$$

veya bu üç miktarın da üçgenin alanına bölünmesi suretiyle

$$\frac{y + z}{r_a} = \frac{z + x}{r_b} = \frac{x + y}{r_c},$$

ve nihayet bunlara eşdeğer olarak

$$x : y : z = r_b + r_c - r_a : r_c + r_a - r_b : r_a + r_b - r_c$$

bulunur.

(Çözenler: Atasağun Baykal, Emre Alkan.)

**A73.**  $[AB]$  doğru parçasını çap kabul eden  $\gamma$  çemberi ile aynı doğru parçasını büyük çap kabul eden  $\varphi$  elipsi göz önüne alınsın.  $\gamma$  üzerinde değişken bir  $P$  noktasından  $AB$ 'ye indirilen dikmenin  $\varphi$ 'yi kestiği noktalardan  $P$ 'ye yakın olanı  $Q$  olsun.  $P$  noktasından  $\gamma$ 'ya çizilen normalle,  $Q$  noktasından  $\varphi$ 'ye çizilen normalin kesim noktasının geometrik yeri nedir? (Hüseyin Demir)

**Çözüm.**  $\gamma$  çemberini ve  $\varphi$  elipsini  $a > b > 0$  olmak üzere sırasıyla

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{ve} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

denklemleriyle gösterebiliriz. Bir  $\theta$  değişkeni ithal edilmek suretiyle  $P = (a \cos \theta, a \sin \theta)$  ve  $Q = (a \cos \theta, b \sin \theta)$  yazabiliriz. Küçük birer hesapla,  $P$ 'den  $\gamma$ 'ya çizilen normalle,  $Q$ 'dan  $\varphi$ 'ye çizilen normalin denklemlerinin,  $c^2 = a^2 - b^2$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \sin \theta x - \cos \theta y &= 0 \\ a \sin \theta x - b \cos \theta y &= c^2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

olduğu, bunların kesim noktasının koordinatlarının da

$$x = \frac{c^2}{a - b} \cos \theta \quad \text{ve} \quad y = \frac{c^2}{a - b} \sin \theta$$

olduğu görülür. Böyle noktalar

$$x^2 + y^2 = \left( \frac{c^2}{a - b} \right)^2 = (a + b)^2$$

denklemini sağlayacaklardır. Yani geometrik yer, verilen çember ve elipsle merkezdeş bir çemberdir.

(Çözenler: Ruhi Tabur, Alaattin Aktaş, Atasağun Baykal, Ali Tombak.)

**A74.** Toplamı 19 olan artı tamsayıların çarpımı en fazla kaç olabilir?

**Çözüm.** Toplamı 19 olan artı tamsayıların çarpımıyla elde edilebilecek en büyük sayı  $N$  olsun. Yani

$$N = A_1 A_2 \cdots A_k$$

olup

$$19 = A_1 + A_2 + \cdots + A_k$$

dir. Herhangi bir  $i = 1, 2, \dots, k$  için  $A_i \geq 4$  halinde, toplamı değiştirmeden  $A_i$  kaldırılıp yerine  $A_i$ 'den daha büyük olan  $2(A_i - 2)$  koyulabileceğinden  $A_i = 2$  veya  $A_i = 3$  olmalıdır. 19 sayısını, 3'lerin adedi mümkün olduğu kadar büyük olacak şekilde 2'lerin ve 3'lerin toplamı olarak yazmak için, 5 tane 3 ve 2 tane 2 kullanmak gerekeceğinden, toplamı 19 olan artı tamsayılarn çarpımıyla elde edilebilecek en büyük sayı,  $2^2 3^5 = 972$ 'dir.

(Çözenler: *Emre Alkan.*)

**A75.** Her hangi bir  $p$  asal sayısı için,  $p$ ,  $2^{m+1} + 3^m - 17$ 'yi bölecek şekilde sonsuz tane  $m$  artı tamsayısının bulunduğunu gösteriniz.

**Çözüm.**  $p = 2$  ve  $p = 3$  hallerinde çözüm kolay olduğu için (neden?),  $p \neq 2, 3$  farzedelim. Her  $n$  artı tamsayısı için  $m = p^n + 1$  koyularak

$$\begin{aligned} 2^{m+1} + 3^m - 17 &= 2^{p^n+2} + 3^{p^n+1} - 17 \\ &= 4(2^{p^n} - 2) + 3(3^{p^n} - 3) \end{aligned}$$

elde edilir ki, küçük Fermat teoremine göre  $p$  asal sayısı hem  $2^p - 2$ 'yi hem de  $3^p - 3$ 'ü, dolayısıyla da (dikkat!)  $2^{p^n} - 2$ 'yi ve  $3^{p^n} - 3$ 'ü, böylece de  $2^{m+1} + 3^m - 17$ 'yi bölecektir.

(Çözenler: *Atasağun Baykal, Emre Alkan.*)

**Y71.**  $ab = cd$  eşitliğini sağlayan  $a, b, c, d > 0$  tamsayıları verildiğinde  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ 'nin hiç bir zaman asal olamayacağını gösteriniz.

**Çözüm.**  $ab = cd$  olduğuna göre,  $a = pq$ ,  $b = rs$ ,  $c = pr$ ,  $d = qs$  olacak şekilde  $p, q, r, s \geq 1$  tamsayıları bulunabilir. (Neden?) Böylece

$$\begin{aligned} N &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \\ &= p^2q^2 + r^2s^2 + p^2r^2 + q^2s^2 \\ &= (p^2 + s^2)(q^2 + r^2) \end{aligned}$$

olup,  $N$  asal olamaz.

(Çözenler: *Selçuk Alsan, Ali Tombak, Fırat Aydın, Metin Bekil, Atasağun Baykal, Namık Gök, Ercan Şahin, Cengiz Yılmaz, Çağatay Candan.*)

**Y72.**  $p^2, q$ 'nun bir katı olacak şekilde  $p, q$  tamsayıları verildiğinde,  $x^2 + px + q = 0$  denkleminin çözümleri  $\alpha, \beta$  olsun. Her  $n \geq 2$  tamsayısı için  $(\alpha^n + \beta^n)/q$ 'nun bir tamsayı olduğunu ispat ediniz.

**Çözüm.**  $\alpha + \beta = -p$  ve  $\alpha\beta = q$  olduğundan, herhangi bir  $n \geq 2$  tamsayısı için

$$\begin{aligned} \alpha^n &= -p\alpha^{n-1} - q\alpha^{n-2} \\ \beta^n &= -p\beta^{n-1} - q\beta^{n-2} \end{aligned}$$

olup,

$$\alpha^n + \beta^n = -p(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) - q(\alpha^{n-2} + \beta^{n-2}) \quad (*)$$

dir.  $n = 2$  halinde

$$\alpha^2 + \beta^2 = p^2 - 2q$$

olup,  $p^2, q$ 'nun katı olduğundan  $(\alpha^2 + \beta^2)/q$  tamsayı olmalıdır. Şimdi,  $k \leq n$  için  $(\alpha^k + \beta^k)/q$ 'nun tamsayı olduğunu varsayarsak, (\*) eşitliğinden  $(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})/q$ 'nun da bir tamsayı olduğu görülür. Böylece tümevarımla her  $n \geq 2$  için  $(\alpha^n + \beta^n)/q$  bir tamsayı olmalıdır.

(Çözenler: *Atasağun Baykal, Tamer Adanır, Fırat Aydın, Ali Tombak, Suat Namlı, Ruhi Tabur, Emre Alkan.*)

**Y73.** Hem  $x > 1$ , hem de  $x^{1/(1-x)}$ 'in rasyonel sayı olabilmesi için gerek ve yeter şartın,  $n \geq 1$  bir tamsayı olmak üzere,  $x = 1 + 1/n$  olduğunu gösteriniz. (Dikkat: Rasyonel bir  $x > 1$  sayısı için  $x^{1/(1-x)}$  ile gösterilmesi mümkün olan sayılardan artı ve gerçel olanını kastediyoruz.)

**Çözüm.**  $x > 1$  ve  $x^{1/(1-x)}$  sayılarının rasyonel olduklarını varsayalım.  $x = m/n$  ve  $m > n$  olacak şekilde, aralarında asal  $m$  ve  $n$  artı tamsayıları vardır.

$$y = x^{1/(1-x)} = x^{n/(m-n)}$$

olup,

$$(xy)^n = (xx^{n/(m-n)})^n = y^m$$

dir.  $m, n$  aralarında asal olduklarından,

$$sm + tn = 1$$

olacak şekilde  $s$  ve  $t$  tamsayıları bulunabilir. Böylece

$$y = ((xy)^s y^t)^n$$

olup,

$$x^{1/(m-n)} = y^{1/n} = (xy)^s y^t$$

sayısı da rasyoneldir. Demek ki,

$$x^{1/(m-n)} = \frac{a}{b}$$

olacak şekilde aralarında asal  $a, b \geq 1$  tamsayıları bulunabilir. O zaman da

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{m-n} = x = \frac{m}{n}$$

olup,

$$mb^{m-n} = na^{m-n}$$

dir.  $m$  ve  $n$  aralarında asal olduklarından

$$m = a^{m-n} \quad \text{ve} \quad n = b^{m-n}$$

ve buradan da

$$\begin{aligned} m-n &= a^{m-n} - b^{m-n} \\ &= (a-b)(a^{m-n-1} + a^{m-n-2} + \dots + b^{m-n}) \end{aligned}$$

bulunur ki, bu ancak

$$m-n = a-b = 1$$

veyahut da  $m = n+1$ , yani

$$x = \frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

halinde mümkündür. Diğer taraftan

$$x = 1 + \frac{1}{n}$$

ise

$$x^{1/(1-x)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/(1-(1+1/n))} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

olup, hem  $x > 1$ , hem de  $x^{1/(1-x)}$  rasyoneldir.

(Çözenler: *Namık Gök, Emre Alkan, Atasağın Baykal.*)

**Y74.** Bir  $ABC$  üçgeninde  $[CA]$ ,  $[AB]$ ,  $[BC]$  kenarları üzerine ilk ikisi dışı, sonuncusu içe doğru  $CAB'$ ,  $ABC'$ ,  $BCA'$  eşkenar üçgenleri kurulsun.  $A'$  noktasının  $[B'C']$  doğru parçasının orta noktası olması için  $ABC$  üçgeninin eşkenar olmasının gerek ve yeter olduğunu gösteriniz. (*Hüseyin Demir*)

**Çözüm.** Eğer  $ABC$  eşkenar olsa,  $A'$  noktasının  $[B'C']$  doğru parçasının orta noktası olacağı aşikârdır. Tersine olarak,  $A'$ 'nin  $[B'C']$  doğru parçasının orta noktası olduğunu farz edelim.  $\sphericalangle C'BA' = \sphericalangle ABC$  (neden?), ve  $|BA'| = |BC|$ ,  $|BC'| = |BA|$  olduğundan,  $C'BA'$  ve  $ABC$  üçgenleri eşittir. Böylece

$$|A'C'| = |AC|,$$

benzer şekilde de

$$|A'B'| = |AB|$$

dir.  $A'$ ,  $[B'C']$ 'nin orta noktası olduğundan

$$|AB| = |A'B'| = |A'C'| = |AC|,$$

diğer taraftan da  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  doğruduş olduğundan  $\sphericalangle BAC = 60^\circ$  olmalıdır. Demek ki  $ABC$  eşkenardır.

(Çözenler: *Ergün Yaraneri, Tamer Adanır, Atasağın Baykal, Alaattin Aktaş, Emre Alkan.*)

**Y75.** Bir  $ABCD$  karesinin içinde  $|PA| = 1$ ,  $|PB| = 2$ ,  $|PC| = 3$  olacak şekilde bir  $P$  noktası varsa, bu karenin kenar uzunluğu ne olmalıdır?

**Çözüm.**  $\alpha = \sphericalangle ABP$  ve  $a = |AB| = |BC| = |CD| = |DA|$  yazalım.  $PAB$  ve  $PBC$  üçgenlerinde kosinüs teoremi uygulanarak,

$$a^2 + 4 - 4a \cos \alpha = 1$$

$$a^2 + 4 - 4a \sin \alpha = 9,$$

veya

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + 3}{4a} \quad \text{ve} \quad \sin \alpha = \frac{a^2 - 5}{4a}$$

elde edilir. Bu denklemlerin karelerini taraf tarafa toplamak suretiyle

$$(a^2 + 3)^2 + (a^2 - 5)^2 = 16a^2,$$

veya

$$a^4 - 10a^2 + 17 = 0;$$

buradan da  $a = \sqrt{5 + \sqrt{8}}$  bulunur. ( $a = \sqrt{5 - \sqrt{8}}$  karenin dışında bir  $P$  noktası haline tekabül eder.)

(Çözenler: *Emre Alkan.*)