b_2 bağıntılı değil. $\mathcal{R}'$ çizgesinde öyle bir a'_n noktası bulacağız ki a'_n noktası b'_1 ile bağıntılı olacak ama b'_2 ile bağıntılı olmayacak. Eğer öyle bir a'_n bulabilirsek, $\{b_1, b_2, b_3\}$ altçizgesiyle $\{b'_1, b'_2, a'_n\}$ altçizgesi, noktalarının adları dışında, aynı çizge olacaklar. Böyle bir a'_n noktası bulabilir miyiz? Evet! Biri olmazsa, bir başkası olmak zorunda. Çünkü $a'_3, a'_4, \ldots, a'_{m+3}$ noktalarından hiçbirinin dilediğimiz gibi bir nokta olmama olasılığı $(3/4)^m$, ve m sonsuza gittiğinde bu olasılık sıfıra gidiyor. Demek ki dilediğimiz gibi bir a'_n noktası bulma olasılığımız 1. Diyelim a'_6 noktası işimizi görüyor. a'_6 noktasının adı bundan böyle b'_3 olsun. Çizgelerimizin noktaları şimdi şöyle:

$$\begin{array}{lllllllll} \mathcal{R}: & b_1 & b_2 & b3 & a_3 & a_5 & a_6 & a_7 & \ldots \\ \mathcal{R}': & b'_1 & b'_2 & b'_3 & a'_3 & a'_4 & a'_5 & a'_7 & \ldots \end{array}$$

Dördüncü Adım. Bu kez $\mathcal{R}'$ çizgesinden işe başlayacağız. Adını değiştirmediğimiz ilk nokta a'_3. Bu noktaya b'_4 adını verelim. Şimdi $\mathcal{R}$ çizgesinde öyle bir a_n noktası bulalım ki, $\{b'_1, b'_2, b'_3, b'_4\}$ altçizgesiyle $\{b_1, b_2, b_3, a_n\}$ altçizgesi – noktaların adlarını dikkate almazsak – aynı çizge olsunlar. Öyle bir a_n noktası 1 olasılıkla bulunabilir. Nasıl bulunur? Yukarıdaki gibi. Hiçbir a_n noktasının istediğimiz gibi bir nokta olmaması olasılığı sıfırdır. Demek ki birinin dilediğimiz gibi bir nokta olma olasılığı birdir.

Böylece sürdürürüz. Tek sayılı adımlarda $\mathcal{R}$ çizgesinden, çift sayılı adımlarda $\mathcal{R}'$ çizgesinden başlarız. Bu yöntemle ne benim çizgemden ne de sizin çizgenizden nokta unutulmaz. Sonsuza dek sürdürdüğümüzde noktalarımız b ve b' harfleriyle yazılmış olur, ve her n için

$$\{b_1, \ldots, b_n\}$$

altçizgesiyle

$$\{b'_1, \ldots, b'_n\}$$

altçizgesi, adları dışında, birbirinin aynısıdır. Dolayısıyla,

$$\{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$$

çizgesiyle

$$\{b'_1, b'_2, b'_3, \ldots\}$$

çizgesi arasında – noktalarının adları dışında – hiç ama hiç bir ayrım yoktur.

Ne kanıtladık? Sizin rasgele çizgenizle benim rasgele çizgem birbirinin eşidir. Bir (1) olasılıkla!

ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYADI

Albert Erkip *

TÜBİTAK 1993'te Biyoloji, Enformatik (Bilgisayar), Fizik, Kimya ve Matematik dallarında Ulusal Bilim Olimpiyatları programını başlattı. Programa göre bu dallarda her yıl iki aşamalı olarak Ulusal Olimpiyat yarışmaları yapılacak. Tüm liselerin dalına göre 5–6 öğrenci ile katılabildiği I. Aşama sınavı sonunda en başarılı öğrenciler II. Aşamaya katılmaya hak kazanacaklar, II. Aşama sınavı Uluslararası Olimpiyatlar niteliğinde bir yarışma olacak. Programın amacı lise öğrencilerini temel bilimlere yöneltmek, ilgi ve becerilerini geliştirmelerine olanak sağlamak olduğu kadar, Uluslararası Olimpiyatlar için de bir basamak oluşturmak.

I. Ulusal Matematik Olimpiyadının ilk aşama sınavı 9 Mayıs 1993 Pazar günü bir çok merkezde yapıldı. Çoktan seçmeli olan bu sınavın sorularının bir bölümünü Matematik Dünyası'nın Haziran 1993 sayısında vermiştik. Bu sınav sonucu en başarılı olan 38 öğrenci 17 ve 18 Aralık 1993 günleri II. Aşama sınavına girdiler. II. Aşama Uluslararası Olimpiyat niteliğinde olacak demiştik; gerçekten de 16–20 Aralık günleri 300'e yakın öğrenci 5 dalda yarışmak üzere Ankara'ya geldiler; sınavların yanısıra sosyal ve kültürel etkinliklerle dolu bir kaç gün bir arada kaldılar; 20 Aralık günü madalya ve ödüllerini de kazanıp evlerine döndüler. Umudumuz gelecek yıllarda da tekrarlanacak bu günlerin bir bilim şölenine dönüşmesi.

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

I. ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYADI

I Ulusal Matematik Olimpiyadı sonucunda alfabetik sırayla Muhammed Altun ve Murat Atlamaz altın; Rıza Ertuğrul, Zafer Şimşek, Bayram Yenikaya ve Bilal Yurdakul gümüş; Halil Bayrak, Murat Kaval, Z. Fatih Oktay, Barış Pekerten, Utku Tülümen ve Nazım Utku da bronz madalya kazandılar.

Ulusal Olimpiyatların, Uluslararası Olimpiyat için bir basamak oluşturacağını söylemiştik. Daha önceki yazılarda da değindiğimiz gibi Uluslararası Matematik Olimpiyatına çeşitli seçmeler ve kamplardan oluşan, iki yıla kadar uzayabilen bir programla hazırlanıyoruz. Olimpiyat komitelerinde alınan karar uyarınca artık Ulusal Olimpiyatlar bu kamplar için bir seçme sınavı niteliği taşıyacak. Ancak daha önceki hazırlık çalışmalarına katılıp, çeşitli nedenlerle 1993'te I. Aşama sınavına giremeyen, dolayısıyla da II. Aşamaya katılma hakkı olmayan bazı öğrencilerimiz vardı. Bu durumdaki 13 öğrenci, 17–18 Aralık sınavlarına madalya değerlendirmesi dışında kalmak koşuluyla çağırıldılar. Böylece Ulusal Olimpiyata paralel olarak, 38 + 13 = 51 öğrenci aynı sınavı "seçme" niteliğinde aldıklar; en başarılı 24 öğrenci 24 Ocak – 4 Şubat 1994'te Side'de yapılan hazırlık kampına çağırıldılar. 1994 Olimpiyat takımımız bu grup içinden Nisan–Mayıs aylarında yapılacak son seçme sınavı ile belirlenecek.

Aşağıda 17–18 Aralık sınavını sorularına yer veriyoruz. Gerek I. Aşamanın, gerekse de bu sınavın yanıtları, puan dağılımları, vb. bilgiler TÜBİTAK'ın I. Ulusal Bilim Olimpiyatları ile ilgili yayınlayacağı bir kitapta bulunacak; o nedenle yanıtları vermeyeceğiz. Sınav sorularını çeşitli üniversitelerden matematikçiler önerdi.

Sınav sonuçlarına kısaca göz atalım. Her soru 7 puan değerinde olup, 51 öğrencinin puan ortalamaları, 1. soru için 3.80, 2. soru için 5.18, 3. soru için 0.43, 4. soru için 0.44, 5. soru için 3.74 ve 6. soru için 0.94'tü. Görüldüğü gibi özellikle 3 ve 4. sorular oldukça zordu; 3. soruyu ancak 2 kişi tam yaparken 4 soruyu tam yapan çıkmadı. Aslında bu sonuçlar Uluslararası Olimpiyatlardaki sonuçlarımıza benziyor; geometri problemlerinde özellikle başarılıyız, ancak 3. ve 4. problem tipi "varlık gösterme" türü soruları iyi yapamıyoruz. İlerideki Olimpiyatlara hazırlanan öğrencilerimiz bu tür problemlere ağırlık verirlerse genel başarımız da yükselecektir.

Birinci Gün, 17 Aralık 1993

Süre: 4.5 saat

1. On tabanına göre yazılışı 1994 ile biten ve bir $n \geq 1$ tamsayısı için $1994 \cdot 1993^n$ şeklinde olan bir tamsayının varlığını gösteriniz.

2. Bir ABC $(m\hat{B} = 90°)$ üçgeninin I merkezli iç teğet çemberi, $[BC]$, $[CA]$ ve $[AB]$ kenarlarına sırası ile D, E ve F noktalarında değiyor. $[CI] \cap [EF] = \{L\}$ ve $[DL] \cap [AB] = \{N\}$ olduğuna göre $|AI| = |ND|$ olduğunu gösteriniz.

3. n pozitif bir tamsayı ve $A = \{1, \ldots, n\}$ olsun. $f : A \to A$ ve $\sigma : A \to A$ gibi iki permütasyon için, eğer $(f \circ \sigma)(1), \ldots, (f \circ \sigma)(k)$ artan ve $(f \circ \sigma)(k), \ldots, (f \circ \sigma)(n)$ azalan bir dizi olacak şekilde bir $k \in A$ var ise, f, σ'ya göre "tek tepeli"dir diyeceğiz. S_σ ile σ'ya göre tek tepeli permütasyonların kümesini gösterelim. $n \geq 4$ ise, $S_\sigma \cap S_\pi = \phi$ olacak şekilde σ ve π permütasyonlarının var olduğunu gösteriniz.

İkinci Gün, 18 Aralık 1993

Süre: 4.5 saat

4. Her $n \geq 1$ için $0 < a_{n+1} - a_n < \sqrt{a_n}$ koşulunu sağlayan bir (a_n) pozitif tamsayılar dizisi veriliyor. $0 < x < y < 1$ koşulunu sağlayan her hangi x, y reel sayıları için

$$x < \frac{a_k}{a_m} < y$$

olacak şekilde a_k ve a_m terimleri bulunduğunu gösteriniz.

5. Dışbükey bir dörtgeni alanca iki eşit bölgeye ayıran ve dörtgenin bir köşesinden geçen doğrunun pergel ve cetvelle nasıl çizilebileceğini belirleyiniz.

6. Aşağıdaki koşulları sağlayan $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ve a pozitif tamsayıları veriliyor.

i) Her $i \neq j$ için $(n_i, n_j) = 1$.

ii) Her i için $a^{n_i} \equiv 1 \pmod{n_i}$.

iii) Her i için $n_i \nmid a - 1$.

Bu durumda $a^x \equiv 1 \pmod{x}$ denkliğinin gerçekleştiği en az $2^{k+1} - 2$ tane $x > 1$ tamsayısının bulunduğunu gösteriniz.