

DİNAMİK SİSTEMLER, GARİP ÇEKERLER VE KAOS

H. Turgay Kaptanoğlu *

A. Dinamik Sistem Nedir?

Hesap makineniz var mı? Varsa hemen şimdi açın ve sizinle kolay bir deney yapalım. Aklınıza gelen ilk sayıyı yazın ve üzerinde \sin , \cos , x^2 , e^x yazılı düğmelerden birine üst üste basın. Bir ayrık dinamik sistem elde ettiniz. Seçtiğiniz düğme e^x ise ve yazdığınız sayıyı x ile gösterirsek, elde edeceğimiz sayılar

$$x, e^x, e^{e^x}, e^{e^{e^x}}, \dots$$

olacaktır. (Bilindiği gibi e doğal logaritmanın tabanı olan yaklaşık 2.718281828459045... sayıdır.) Yapılan, e tabanlı üstel fonksiyon $u(x) = e^x$ 'i yinelemektir; diğer bir deyişle u 'nun kendisiyle bileşkesini tekrar tekrar almaktır. Yeteri kadar tekrarlandığında, hangi x ile başlanırsa başlansın, bu deney hesap makinesinin kapasitesinin aşılması ile son bulacaktır; yani e^x fonksiyonunun yinelemeleri sonsuza gider. Elde ettiğiniz sayıları

$$x, u(x), u(u(x)), u(u(u(x))), \dots$$

diye de yazabilirsiniz. Bu diziyeye x 'in u altındaki *yörüngesi* adı verilir. Hesap makineniz dört işlemden fazlasını yapamıyorsa, seçtiğiniz x 'i hep aynı sayıyla tekrar tekrar çarpmayı deneyebilirsiniz; sonuç değişmeyecektir.

e^x yerine \sin düğmesini kullanırsanız, hangi sayıyla başlarsanız başlayın, elde edilen değerlerin hızla sifira doğru gittiğini göreceksiniz. \cos kullanırsanız, değerler radyan ölçüsüyle 0.73909...'a, derece ölçüsüyle 0.99985...'e yakınsayacaktır. Bu örnekler belki size, hangi fonksiyonu ve hangi başlangıç sayısını ele alırsak alalım, yinelemelerinin her defasında düzenli bir şekilde bir sayıya (veya sonsuza) yakınsadığı fikrini verebilir. Neyse ki durum hep böyle değildir. (Aksi halde bu yazıyı yazmaya gerek kalmazdı.) e^x veya \sin 'den çok daha basit fonksiyonlar, örneğin bir ikinci derece polinom olan

$$F_\mu(x) = \mu x(1 - x),$$

çok daha ilginç davranış gösterir yineleme altında. Bunu görmek için $\mu = 4$ koyup 0 ile 1 arasında rastgele x 'ler seçerek fonksiyonu tekrar tekrar uygulayın. (Programlı bir hesap makinesi veya bir bilgisayar işinizi çabuklaştıracaktır.) Pek çok x 'in yörüngesinin anlaşılır hiç bir kurala bağlı kalmadan $[0, 1]$ aralığında rastgele dolandığını göreceksiniz. Şimdi 4 yerine 3.835 koyarak F_μ 'yu yineleyin. Bu sefer, 0 ile 1 arasındaki pek çok x 'in yörüngesinin, ama hepsinin değil, bir-biri ardından tekrarlanan üç sayılık bir çevrime, 0.15207..., 0.49451..., 0.95863...'a ulaştığını göreceksiniz.

e^x ile F_μ 'nun davranışları arasındaki farkın nedenini görmenin en kolay yolu grafiklerini göz önüne getirmektir. e^x tekdüze artandır ve her başlangıç değerinin yörüngesi eninde sonunda sonsuza kaçır. Fakat F_μ 'nun $[0, 1]$ aralığında önce artan ve sonra azalan olması, bu aralıktaki noktaların yörüngelerinin sınırsız büyümesini önler. Tabii grafiği bu tip olan tek fonksiyon F_μ değildir, ama F_μ 'nun gerçekten ilginç olduğu aşağıda görülecektir. Gene de bazı özellikler için önemli olan fonksiyonun ne olduğu değil, bu aralıktaki maksimum değeridir.

Dergimizin bu sayısındaki problemlerden biri (Y84) x ve $g(x)$ reel sayılar olmak üzere, $g(g(x)) = -x$ denklemini sağlayan bir g fonksiyonu olup olmadığını soruyor. Burada işi zorlaştıran $g(x)$ 'in reel sayı olması şartıdır. Bu şart olmadan, sanal $i = \sqrt{-1}$ sayısını kullanan $g(x) = ix$ işi görür. Benzer şekilde, $h(h(x)) = \frac{1}{x}$ denklemini sağlayan reel değerli bir h fonksiyonu bulunabilir mi? Her iki fonksiyonun dört kere yinelenmesi, her x için bize tekrar x 'i verir. Bir başka deyişle, g ve h her noktada periyodu 4 olan bir çevrim meydana getirir.

B. Neden Biyologlar da Matematik Bilmeli?

Şimdi F_μ 'nun biyolojideki bir uygulamasına bakarak dinamik sistemlerin başka bilim

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

dallarında da ortaya çıktığını görelim. Bir bölgedeki bir yaban hayvanı türünün nüfusunu incelemek istiyoruz. Bu pek çok etmene bağlıdır: yiyecek miktarı, iklimin sertliği, bu türü avlayan diğer türlerin varlığı, ... Bu etmenler altında ele aldığımız türün nüfusu azalabilir, hatta tür o bölgede yok olabilir; kontrolsüz şekilde artabilir; veya iniş-çıkışlar gösterebilir. Bizim amacımız, bir başlangıç nüfusu verildiğinde uzun vadede olabilecekleri tahmin edebilmek.

Şimdi bu isteğimizi matematiksel bir model haline getirelim. N_0 başlangıçtaki hayvan sayısı, N_n ise n nesil sonraki sayı olsun. En basit şekilde, ne kadar çok hayvan varsa, türün o derece hızlı çoğalacağını kabul edebiliriz. Yani

$$\begin{aligned} N_1 &= \mu N_0 \\ N_2 &= \mu N_1 = \mu^2 N_0 \\ &\vdots \\ N_n &= \mu N_{n-1} = \mu^n N_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

diyebiliriz. Burada μ , türün yavrulama oranı ile bağlantılı pozitif bir sabittir. Eğer $\mu > 1$ ise nesiller geçtikçe N_n sürekli artacaktır ve $0 < \mu < 1$ ise sifıra inecektir.

N_n 'ler arasındaki bağıntıyı bir fonksiyonla da gösterebiliriz. $x = N_0$ ve $f(x) = \mu x$ dersek,

$$f(x) = N_1, f(f(x)) = N_2, f(f(f(x))) = N_3, \dots$$

olacaktır. Yani türün uzun vadedeki nüfusu, f fonksiyonunun yinelenmesinin asimtotik davranışıyla ilişkilidir.

Bu modelin basitliği bazı sakıncaları da beraberinde getirir; örneğin hayvan türü için uzun vadede topu topu iki ihtimal bulunduğunu söyler: $\mu > 1$ ise hiç durmadan artış ve $0 < \mu < 1$ ise soyun tükenmesi. Çoğu durumda böyle olmadığı bellidir. Bazı kısıtlamalar koyarak gerçeğe daha uygun modeller elde edebiliriz. İlk akla gelebilecek fikir, meselâ bölgedeki yiyecek miktarının sabit kalması yüzünden, hayvan nüfusunun belirli bir S sınırının üzerine çıkamayacağıdır. Ama $N_n < S$ olduğu sürece, hâlâ yeterli yiyecek olduğundan, hayvan nüfusu artmaya devam edecektir. Hatta $S = 1$ alabiliriz. N_n o zaman S sınır değerinin yüzdesidir. Bu istediklerimizi sağlayan en basit matematiksel model

$$N_{n+1} = \mu N_n (1 - N_n)$$

denkliğidir; μ gene pozitif bir sayıdır. N_n bire yaklaşırsa, N_n veya $(1 - N_n)$ 'den biri küçük

olacak ve bir sonraki nesilde nüfusun azalmasını sağlayacaktır.

Yukarıda yaptığımız gibi bu bağıntıyı da bir fonksiyonun yinelenmesi olarak görebiliriz. $x = N_0$ ve $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ dersek, gene $N_1 = F_\mu(x), N_2 = F_\mu(F_\mu(x)), \dots$ olur. Sonunda F_μ fonksiyonunu elde ettik.

İleride kullanmayacaksak da, yukarıdaki iki modeli diferansiyel denklem şeklinde de açıklayalım. Tabii şimdi hayvan nüfusunu nesilden nesile değil de, zamanla sürekli değişen bir N çokluğu olarak görmek zorundayız. O zaman $N_{n+1} = \mu N_n$ ve $N_{n+1} = \mu N_n(1 - N_n)$ yerine sırasıyla

$$\frac{dN}{dt} = \mu N \quad \text{ve} \quad \frac{dN}{dt} = \mu N(S - N)$$

gelir. Burada t zamandır ve μ pozitif veya negatif bir reel sayı olabilir. $\frac{dN}{dt}$ nüfusun artış (veya azalış) hızı demektir. $N_0 = N(0)$ başlangıç nüfusu ise, yukarıdaki diferansiyel denklemlerin çözümleri

$$N(t) = N_0 e^{\mu t} \quad \text{ve} \quad N(t) = \frac{S N_0 e^{S \mu t}}{S - N_0 + N_0 e^{S \mu t}}$$

şeklinde dir.

İlk denklemde $\mu > 0$ ise, zaman ilerledikçe ($t \rightarrow \infty$), $N(t)$ sürekli artar ($N(t) \rightarrow \infty$); $\mu < 0$ ise sürekli azalır ($N(t) \rightarrow 0$). İkinci denklemde μ pozitif iken, $N = S$ ise, $\frac{dN}{dt} = 0$; $N > S$ ise, $\frac{dN}{dt} < 0$; ve $N < S$ ise $\frac{dN}{dt} > 0$ olur. Bunlar da sırasıyla, sabit kalan, azalan ve artan nüfusa karşılık gelirler. Yani, nüfus S 'nin altında kalmaya zorlanarak kendini dengeler. Yalnız $N_{n+1} = \mu N_n(1 - N_n)$ modelini ilginç kılan çevrimsel davranış artık görülmez.

Dinamik sistemlere bir örnek daha verelim. Bir $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ polinomunun derecesi $n = 1$ veya 2 ise, polinomun köklerini bulmak çok kolaydır; 3 veya 4 ise, kökleri veren formüller vardır, fakat bunları kullanmak zordur; 5 veya daha yüksekse, kökleri veren formüller bile bulmanın imkânsız olduğu gösterilmiştir. Newton metodu, son iki durumda kökleri yaklaşık olarak bulmamızı sağlar. x_0 bir reel sayı olsun.

$$x_1 = x_0 - \frac{P(x_0)}{P'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{P(x_1)}{P'(x_1)}$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{P(x_{n-1})}{P'(x_{n-1})}$$

yinelenen işleminin verdiği $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ dizisi, x_0 'in çoğu değeri için P 'nin köklerinden birine yakınsar. Görüldüğü gibi bu metot,

$$K(x) = x - \frac{P(x)}{P'(x)}$$

fonksiyonunun yinelemelerinden oluşan bir dinamik sistemdir, $P'(x) \neq 0$ olduğu sürece. Burada da anlaşılacak istenen $K(x)$ 'in değişik x 'ler için yinelemelerinin nereye varacağı ve hangi x_0 'lar için metodun bir köke yakınsamadığıdır.

C. $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$

Bu fonksiyonun önemi nüfus hareketlerini açıklamakla bitmiyor. Dinamik sistemlerin pek çok özelliğini de en basit haliyle gözler önüne sermekte. O yüzden bu yazının büyük kısmı bu fonksiyonun incelenmesine ayrıldı. Ashında elimizde bir değil, sonsuz sayıda fonksiyon var her reel μ 'ya karşılık gelen.

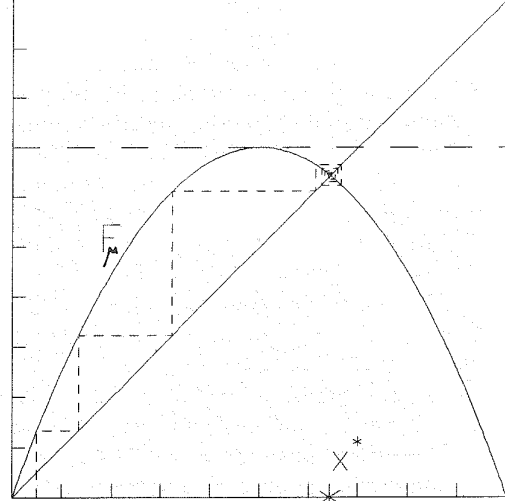
Yukarıda da yaptığımız gibi yalnız $I = [0, 1]$ kapalı aralığındaki x 'lerle ilgileneceğiz. Sürekli olması F_μ 'nun bu aralıkta maksimum ve minimum değerlerini alacağını, türevli olması ise bu değerlere ya aralığın uç noktalarında, ya da türevinin 0 olduğu noktalarda ulaşacağını söyler. $F_\mu(x) = \mu x - \mu x^2$ ve türevi $F'_\mu(x) = \mu - 2\mu x$ 'tir. $F'_\mu(x) = 0$, μ 'dan bağımsız olarak yalnız $x = \frac{1}{2}$ noktasında gerçekleşir. Bütün μ 'lar için, $F_\mu(0) = F_\mu(1) = 0$ ve $F_\mu(\frac{1}{2}) = \frac{\mu}{4}$ 'tür; ve bunlar F_μ 'nun minimum ve maksimum değerleridir, çünkü $\mu > 0$. Fonksiyonu yineleyebilmek, yani $F_\mu(F_\mu(x))$ 'i hesaplayabilmek için, $F_\mu(x)$ 'in de I 'da olması gerekir. Bu da μ 'nun 0 ile 4 arasında olmasını gerektirir.

Her ikisi de 0 ile 1 arasında olduklarından, x ve $F_\mu(x)$ birbirlerine eşit olabilirler. Böyle bir x noktasına F_μ fonksiyonunun *sabit noktası* denir. $\mu x - \mu x^2 = x$ ikinci derece denklemini çarpanlarına ayırarak çözer ve $x = 0$ ve

$$(†) \quad x = \frac{\mu - 1}{\mu}$$

elde ederiz. 0 her μ için sabit noktadır, fakat x^* diyeceğimiz diğer x değeri yalnız $\mu > 1$ iken I 'dadır. Zaten F_μ , ancak $\mu > 3$ iken ilginç olmaya başlar. $\mu = 2.8$ için $x^* = \frac{1.8}{2.8} =$

0.64286... bulunur. Bu noktayı bulmanın en kolay yolu, F_μ 'nun grafiği ile $y = x$ doğrusunu kesiştirmektir, çünkü orada $y = F_\mu(x^*) = x^*$. Sabit noktaların yörüngeleri tek bir noktadan oluşur, kendileri. 1'in yörüngesinde ise yalnız 1 ve 0 vardır.



Şekil 1 ($\mu = 2.8$)

Bu iki sabit nokta arasında temel bir fark vardır. Bunu görmek için, 0'a çok yakın bir noktanın, örneğin $x_0 = 0.05$ 'in yörüngesine bakalım. Gereğinden fazla hesaba boğulmamak için Şekil 1'deki grafik yöntemini kullanacağız. Okuyucu hesap makinesi ile yapılanları kontrol etmelidir. $x = x_0$ 'da çizilen dikey bir doğru F_μ 'nun grafiğini $y_0 = F_\mu(x_0)$ yüksekliğinde keser. $F_\mu(F_\mu(x_0)) = F_\mu(y_0)$ 'i bulmak için, $x = y_0$ 'da dikey bir doğru çizmek gerekir. Bu noktayı ise y_0 yüksekliğinde yatay olarak $y = x$ doğrusunu kestiğimiz noktaya kadar ilerleyerek buluruz; burada $x = y = y_0$. Bu yeni x değerine x_1 diyelim; $x_1 = F_\mu(x_0)$. Şimdi $x = x_1$ 'de dikey yönde çizeceğimiz doğru F_μ 'nun grafiğini $y_1 = F_\mu(x_1) = F_\mu(y_0) = F_\mu(F_\mu(x_0))$ 'da kesecektir. Böylece F_μ 'yu yinelemiş olduk. $\mu = 2.8$ için $x_1 = y_0 = 0.133$ ve $y_1 = 0.32287 \dots$ 'dir. Bundan sonra sırayla yatay ve dikey yönde gitmeye devam ederiz. Görüldüğü gibi, 0'a çok yakın bir yerden bile başlasak, x_0 'in yörüngesi, etrafında dönerek x^* 'a yaklaşır, ona hiç bir zaman ulaşmasa da [6]. Işığın etrafında uçuşan böcekler geliyor akla. 0, 1 ve x^* dışındaki bütün başlangıç değerleri için böyledir. $F_\mu(x)$ 'in n kere yinelenmiş halini $F_\mu^n(x)$ ile gösterelim; örneğin $F_\mu^2(x) = (F_\mu \circ F_\mu)(x) = F_\mu(F_\mu(x)) = \mu^2 x(1 - x)(1 - \mu x(1 - x))$. Bu gösterim F_μ 'nun n 'nci kuvveti $(F_\mu(x))^n$ 'den farklıdır. Yukarıdaki

cümleyi şimdi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu^n(x) = x^* \quad (x \neq 0, x \neq 1)$$

diye yazabiliriz. Yani x^* çeken ve 0'ı iten sabit noktalarıdır. Bu fark nereden kaynaklanır? Grafiğe dikkatle bakılırsa, 0'da F_μ 'nin grafiğinin $y = x$ doğrusundan daha dik olduğu görülür; x^* 'daysa tersi doğrudur. Burada diklikten kasıt, F_μ 'nin grafiğine teğet olarak çizilen bir doğrunun eğiminin mutlak değeridir; teğetin yönü önemli değildir. $y = x$ doğrusunun dikliği her yerde 1'dir. Bir noktadaki türev o noktadaki eğimi verdiğinden, $|F_\mu'(0)| = \mu = 2.8 > 1$ ve $|F_\mu'(x^*)| = |2 - \mu| = 0.8 < 1$, bize $\mu = 2.8$ için neden 0'ı iten ve x^* 'in çeken olduğunu gösterir.

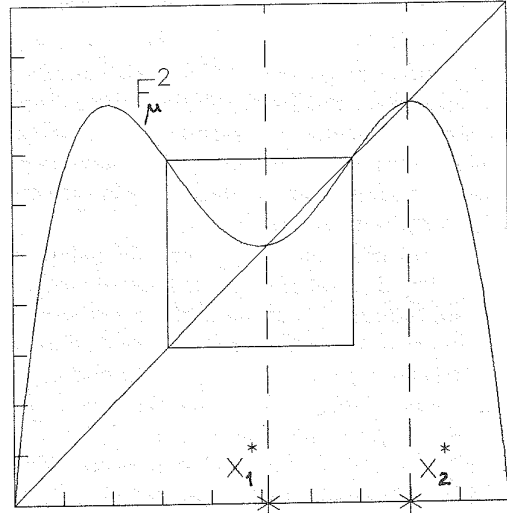
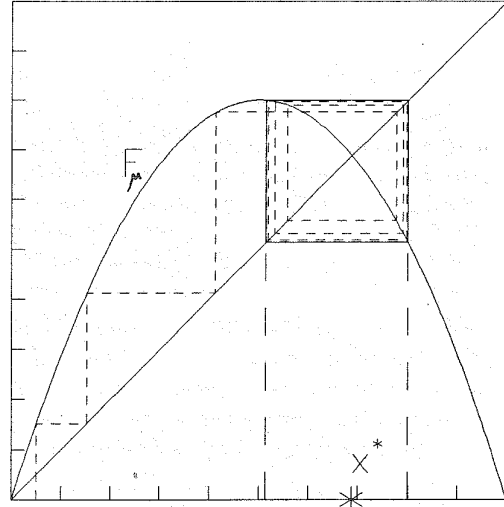
μ 'yu artırdığımızda ilginç bir durumla karşılaşırız. F_μ 'nin maksimum değeriyle birlikte $|F_\mu'(x^*)|$ da artar ve $\mu = 3 = M_0$ iken 1'i geçer. Şimdi $\mu = 3.2 > M_0$ olduğunda Şekil 2'den F_μ 'nin grafiğinin ve yinelemelerinin neler verdiğine bakalım. $x = 0.05$ başlangıç noktasının yörüngesi önce x^* 'a yaklaşır, fakat sonra onun iki yanındaki x_1^* ve x_2^* diyeceğimiz iki noktanın civarında gidip gelmeye başlar. Yani x_1^* ve x_2^* , periyodu 2 olan bir çevrim meydana getirirler. Bu noktalar gene çeker olarak adlandırılırlar, çünkü yakınlardaki noktaları diğerinin etrafına gönderse de, ikisi birlikte uzaktaki noktaları üzerlerine çekerler.

Bu ikili çevrimi daha iyi anlamamızın yolu F_μ^2 'nin grafiğine bakmaktır. F_μ 'nin sabit noktaları F_μ^2 'nin de sabit noktalarıdır, çünkü $F_\mu(F_\mu(0)) = F_\mu(0) = 0$ ve $F_\mu(F_\mu(x^*)) = F_\mu(x^*) = x^*$. Ama şimdi iki sabit nokta daha vardır; x_1^* ve x_2^* , çünkü $F_\mu(F_\mu(x_1^*)) = F_\mu(x_2^*) = x_1^*$ ve $F_\mu(F_\mu(x_2^*)) = F_\mu(x_1^*) = x_2^*$. F_μ^2 'nin derecesi 4 olduğundan başka yoktur. İlk iki sabit nokta sayesinde $F_\mu^2(x) - x$ polinomunu çarpanlarına ayırıp diğer ikisini de buluruz:

$$(†) \quad x_{1,2}^* = \frac{(\mu + 1) \mp \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}{2\mu}$$

$\mu = 3.2$ için $x^* = \frac{2.2}{3.2} = 0.6875$, $x_1^* = 0.51304 \dots$ ve $x_2^* = 0.79946 \dots$ 'dir. 0'la birlikte bu dört nokta F_μ^2 'nin grafiğinin $y = x$ doğrusunu kestiği yerlerdir. 0 ve x^* 'da grafik $y = x$ 'ten daha diktir; diğerlerinde değildir. Bu da 0 ve x^* 'in iten, x_1^* ve x_2^* 'in çeken olduğunu söyler. Hatta, türevde zincir kuralından, $(F_\mu^2)'(x_1^*) = F_\mu'(F_\mu(x_1^*))F_\mu'(x_1^*) = F_\mu'(x_2^*)F_\mu'(x_1^*) = F_\mu'(x_2^*)F_\mu'(F_\mu(x_2^*)) = (F_\mu^2)'(x_2^*)$;

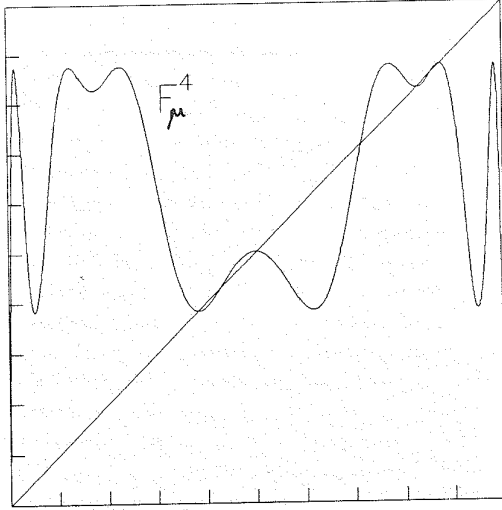
yani F_μ^2 'nin x_1^* ve x_2^* 'daki eğimleri eşittir.



Şekil 2 ($\mu = 3.2$)

x_1^* ve x_2^* , $\mu > M_0$ olduğunda ortaya çıkarlar. Tam $\mu = M_0$ iken $x^* = x_1^* = x_2^*$. Bir başka deyişle, μM_0 'ı geçerken periyodu 1 olan çeker periyodu 2 olan bir çevrime parçalanır. μ arttıkça da x_1^* ve x_2^* birbirinden uzaklaşırlar. Aynı zamanda, F_μ^2 'nin bu noktadaki dikliği önce azalır, fakat sonra artar ve diyelim $\mu = M_1$ 'de $y = x$ doğrusununkini geçer. x_1^* ve x_2^* 'nin her biri aynı anda kendi ikili çevrimlerini doğurur. Tabii bunlar F_μ^2 için ikili çevrimlerdir; F_μ için hepsi birden periyodu 4 olan bir çevrimdir. M_1 değerini $(F_\mu^2)'(x_1^*) = -1$ eşitliğini çözerek buluruz. Uzun ve sıkıcı hesaplardan sonra bir ikinci derece denklemin çözümlerinden biri olarak $M_1 = 1 + \sqrt{6} = 3.44949 \dots$ çıkar. F_μ 'nin bu dörtlü çevriminin her noktası F_μ^4 'nin birer sabit

noktasıdır. F_μ^4 'nin F_μ^2 ve F_μ 'dan gelen 4 sabit noktası daha vardır. İlk 4 nokta çeker, diğerleri iter. Şekil 3'te $\mu = 3.5$ için F_μ^4 'nin 8 sabit noktası görülüyor.



Şekil 3 ($\mu = 3.5$)

Bundan sonra neler olacağını tahmin etmek zor olmasa gerek. μ çok az daha artırıldığında F_μ^4 'nin çeken sabit noktalarındaki dikliği, $\mu = M_2 = 3.54409 \dots$ 'da aynı anda 1'i geçer ve F_μ için bir sekizli çevrim elde edilir. Bir sonraki parçalanma $\mu = M_3 = 3.56441 \dots$ 'de, ondan sonraki $\mu = M_4 = 3.56876 \dots$ 'da, bunu takip eden de $\mu = M_5 = 3.56969 \dots$ 'da meydana gelir, ve sırasıyla on altılı, otuz ikili ve altmış dördü çevrimler ortaya çıkar. Yalnız artık bu değerleri, polinomların derecesi yükseldiği için bir denklem çözerek elde etmek ya çok güçtür, ya da imkânsızdır. Ama M_2, M_3, M_4 ve M_5 , programlı bir hesap makinesi veya bir bilgisayar kullanılarak yineleme ile bulunabilir. Mesela, M_2 'nin tahmini değerinden biraz küçük bir μ alınır ve rastgele bir x başlangıç sayısı girilerek, yineleme ile F_μ 'nin dördü çevrimi bulunur. $x = 0.5$ kullanmak yararlıdır, çünkü F_μ 'nin maksimum noktasıdır ve her μ 'da mutlaka çeken bir çevrime ulaşacağı gösterilebilir. Sonra μ yavaş yavaş artırılarak yineleme tekrarlanır ve F_μ 'nin dördü çevriminin hangi μ 'da sekizli çevrime parçalandığı gittikçe daha hassas olarak bulunur. Bulunan değer M_2 'dir. M_3, M_4 ve M_5 için de aynı yöntem işler.

Dikkat edilirse, M_k değerleri k artırıldığında artmalarına rağmen birbirlerine yaklaşırlar ve

$$M_\infty = 3.569945671868 \dots$$

değerine yığılırlar. Burada ilginç olan, M_5 'in M_∞ 'a aşırı yakınlığına rağmen, bu dar aralıkta sonsuz kere çevrimlerin periyodu iki katına çıkar ve 2'nin her kuvvetinde periyodu olan çevrimler elde edilir. Diğer ilginç olan şey, $(M_k - M_{k-1}) / (M_{k+1} - M_k)$ oranıdır. İlk bir kaç M_k ile bu oranı hesap ettiğimizde sırasıyla $4.75146 \dots$, $4.65552 \dots$, $4.67126 \dots$ ve $4.67742 \dots$ buluruz. Bu oranın k arttıkça yaklaştığı değer de hesaplanabilir [5]:

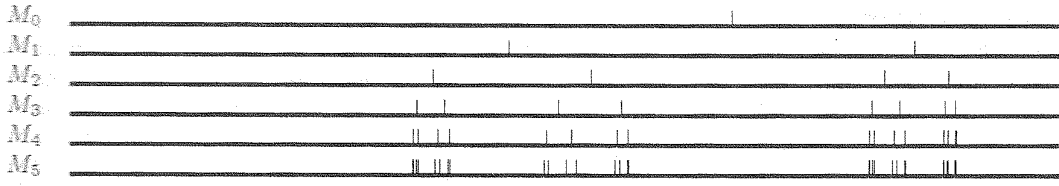
$$\delta = 4.669201660910299097 \dots$$

δ sayesinde, $\frac{M_5 - M_4}{M_6 - M_5} \approx 4.66920 \dots$ yaklaşık eşitliğinden M_6 'yı $3.56989 \dots$ diye, ve benzer şekilde M_7 'yi $3.56993 \dots$ diye tahmin edebiliriz.

Her M_k değerinde periyodu 2^k olan bir çevrim, ikiye parçalanarak periyodu 2^{k+1} olan bir çevrimi doğurur. Bu çevrimleri meydana getiren noktaları tam parçalanma anında hesap edebiliriz. Örneğin, (†)'de $\mu = M_0 = 3$ koyarak, $x^* = \frac{2}{3} = 0.66667 \dots$; ve (‡)'de $\mu = M_1 = 1 + \sqrt{6}$ koyarak,

$$x_{1,2}^* = \frac{2 + \sqrt{6} \mp \sqrt{2}}{2(1 + \sqrt{6})} = \begin{cases} 0.43996 \dots, \\ 0.84994 \dots, \end{cases}$$

buluruz. M_2 için, yukarıda tarif edilen yineleme yönteminde parçalanmadan hemen önce elde edilen dört değeri alırız; bunlar yaklaşık $0.36329 \dots$ ve $0.52359 \dots$ ile $0.81979 \dots$ ve $0.88405 \dots$ 'tir. İlk iki sayı yukarıdaki $0.43996 \dots$ 'nın, sonraki iki sayı ise $0.84994 \dots$ 'ün parçalanmasından ortaya çıkarlar. M_3 için aynı yöntemle, $0.34676 \dots$, $0.37477 \dots$; $0.49061 \dots$, $0.55427 \dots$; $0.80741 \dots$, $0.83520 \dots$; $0.88060 \dots$, $0.89079 \dots$ bulunur. M_4 için ise bölünme öncesi çevriminin noktaları $0.34341 \dots$, $0.34795 \dots$; $0.36790 \dots$, $0.37969 \dots$; $0.47834 \dots$, $0.50375 \dots$; $0.54994 \dots$, $0.56090 \dots$; $0.80468 \dots$, $0.80968 \dots$; $0.82992 \dots$, $0.84054 \dots$; $0.87895 \dots$, $0.88329 \dots$; $0.89052 \dots$, $0.89214 \dots$ 'tür. M_5 'teki çevrimin noktalarını vermiyoruz, çünkü tam 32 tane. Hepsinin ikiye ikiye bir önceki gruptaki hangi noktalardan doğdukları bellidir. Çevrim noktalarının $I = [0, 1]$ aralığındaki konumları Şekil 4'te görülüyor. Dikkat edilirse, en alt satırdaki ikinci sekizlik blok iki sıra yukarıdaki bütün noktaların sıkıştırılmış bir kopyasıdır; diğer sıralarda da gözlenebilir bu [6]. Gene yinelgen bir davranış elde ettik elimizdeki sistemden. Bu tip kendini doğuran davranışlar aslında bütün dinamik sistemlerin özelliğidir.



Şekil 4

k sonsuza giderken 2^k periyotlu noktaların oluşturduğu küme, daha önce bu dergideki bir yazıda [7] anlatılan bir genelleştirilmiş Cantor kümesidir. Yalnız burada kümemiz açık aralıklar atılarak değil, noktalar eklenerek inşa edilir. Dinamik sistemler gibi Cantor kümeleri de küçültülmüş kopyalarını sonsuz kere içlerinde barındırırlar. Böylece Cantor kümelerinin inşasına da bir dinamik sistem gözüyle bakabiliriz. Aynı noktadan doğan ikizlerin aralarındaki fark da gittikçe azalır, ama düzgün bir şekilde. Her gruptaki $\frac{1}{2}$ 'ye en yakın nokta sırasıyla $0.66667\dots$, $0.43996\dots$, $0.52359\dots$, $0.49061\dots$, $0.50375\dots$ ve $0.49850\dots$ 'dir. Bunların $\frac{1}{2}$ ile aralarındaki uzaklık düzgün şekilde azalır. Bir önceki uzaklığın bir sonrakine oranı α_k her defasında hemen hemen aynıdır ve

$$\alpha = 2.5029078750958928485\dots$$

değerine yaklaştığı bulunmuştur. α , çevrim noktalarının I 'daki sıklığının bir göstergesidir. Aynı oran, bazı ikizler ile onları doğuran nokta ve onun ikizi arasında da görülür. α ve δ sayılarının değişik fonksiyonlarla bile ortaya çıkması şaşırtıcıdır.

Elimizdeki dinamik sistemin kendi kendisini doğurduğunu değişik bir açıdan tekrar görelim. Şekil 2'de, F_μ^2 'nin grafiğinin ortasındaki kareye dikkatle bakalım. Bu karenin sağ üst köşesi F_μ 'nin sabit noktası x^* 'dir. Sol üst köşesi F_μ 'nin, yüksekliği x^* 'daki yüksekliğine eşit diğer noktasıdır. $\mu x(1-x) = \frac{\mu-1}{\mu}$ eşitliğinden, orada $x = \frac{1}{\mu}$ 'dir. F_μ^2 'nin grafiğinin bu karenin içinde kalan kısmı, daha küçük bir μ için F_μ 'nin grafiğinin ters çevrilmiş küçük bir kopyasından başka bir şey değildir. Dolayısıyla F_μ^2 'yu, bu kareyi büyük kareye yayan bir normalleştirme operatörü altında dönüştürerek, F_μ 'ymuş gibi incelemek de mümkündür. Üstelik buradan, M_∞ değerinden önce F_μ 'nin çekerekinin periyodunun sonsuz kere ikiye katlandığını görmek daha kolaydır. Şekil 3'teki F_μ^4 grafiğinin orta kısmının F_μ^2 'nin grafiğinin tepetaklak hali olduğunu görmek şaşırtıcı olmasa gerek artık.

D. Kaos ve Türbülans

Peki $\mu > M_\infty$ iken neler olur? Çoğu başlangıç değerinin yörüngesi gene bir çekere yakınsar, ama çekerin periyodu çok yüksek olabileceğinden, bunu sayılarla fark etmek imkânsızlaşır. Fakat artık bazı başlangıç değerlerinin yörüngeleri kaotiktir, yani sonlu hiç bir çekere yaklaşmadan I 'da dolanırlar. Mitolojide dünya kurulmadan önceki karışık ve belirsiz durumu anlatan kaos kelimesi bu yörüngeleri oldukça iyi betimliyor. Daha da ilginç olanı, birbirine çok yakın iki başlangıç değerinin yörüngeleri birbirinden tamamen farklı yerlere ulaşabilir. Bu özelliğe başlangıç şartlarına hassas bağımlılık denir ve kimi yazarlara göre kaosu tanımlayan üç özellikten biridir [3]. Diğer ikisi de şöyledir: Fonksiyonumuz her hangi bir küçük aralıktaki noktaları yinelemeyle diğer her hangi bir küçük aralığa taşıyabilmelidir (topolojik geçişlilik); ve de fonksiyonumuzun periyodik noktaları tanım aralığında yoğun olmalıdır, yani tanım aralığındaki her noktaya istenildiği kadar yakın bir periyodik nokta bulunabilmelidir. Bu özelliklerden son ikisinin ilkini gerektirdiği de biliniyor [1]. Bu özelliklerin şaka yolu bir açıklaması da şöyle: Çin'de bir kelebek kanatlarını çırpıp; günler sonra Meksika Körfezi'nde bir kasırga patlar.

Bazı $\mu > M_\infty$ değerleri için ise periyodu 3 olan noktalar ortaya çıkar. A kısmında baktığımız $\mu = 3.835$ bunlardan biridir. Periyodu 3 olan noktaların önemi bu dergide daha önce çıkan bir yazıda [2] verilen bir teoreme gösterilmişti. O teoreme göre, eğer sürekli bir fonksiyonun periyodu 3 olan bir noktası varsa, diğer her hangi bir periyotlu noktası da vardır. $\mu = 3.835$ 'in üçlü çevrimi çekendir, çünkü $|(F_\mu^3)'(0.15207\dots)| = 0.39497\dots < 1$. Dikliğın çevrimin diğer iki noktasında da aynı olduğunu biliyoruz artık. Yalnız periyodu 3'ten farklı noktaların hiç birisinin meydana getirdiği çevrimin çeken olmadığı biliniyor. Başlangıç değerlerine hassas bağımlılık yüzünden, hesap makinesi veya bilgisayarla bu çevrimleri bulmak imkânsızdır. μ ,

KAPTANOĞLU

üçlü çevrimi veren değerlerin biraz ötesine geçtiğinde, bu çevrimler de ikiye parçalanırlar; sonra gene ikiye parçalanırlar, ve M_∞ 'dan önceki durum tekrarlanır. Sonunda $\mu = 4$ olduğunda, F_μ I 'nin her noktasında kaotiktir ve her x başlangıç değerinin yörüngesi sonlu bir çevrime ulaşmadan bu aralıkta gezinip durur.

Periyodik noktalar hakkında bir önceki paragrafta bahsettiğimiz teoremden daha çok bilgi veren bir teorem daha vardır ve doğal sayıların aşağıdaki sıralamasıyla ilgilidir:

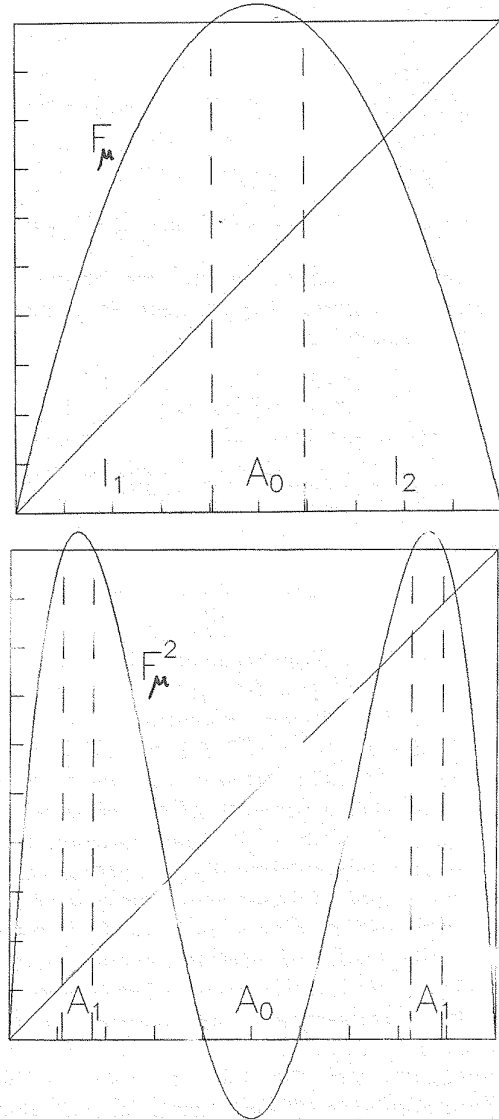
$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \dots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^3 \cdot 3 \triangleright 2^3 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright \dots \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1.$$

Bu sıralamada önce 3 ile başlayarak tek sayılar dizilir, sonra tek sayıların 2 ile çarpımları, sonra 2'nin karesi ile çarpımları, ve böyle devam edilir. Geriye yalnız 2'nin kuvvetleri kalır ve bunlar da ($2^0 = 1$ dahil) ters sıra halinde sona konur. Sarkovski tarafından keşfedilmiş olan teoreminiz, sürekli bir fonksiyonun her hangi bir doğal sayıda periyodu olan noktası varsa, sıralamamızda onun sağındaki bütün sayılarda da periyotlu noktaları olacağını söyler [3]. 3 en başta olduğundan, önceki teoremin doğruluğu bir defa daha görülür. Yukarıda baktığımız $\mu = 3.5$ halinde ise, dörtlü bir çevrim olduğu için, ikili çevrimlerin ve sabit noktaların da olacağı bellidir.

Artık dinamik sistemlerle akışkanlar mekaniği arasındaki ilişkiden söz edebiliriz. Rüzgârsız bir yerde tablada yanık duran bir sigaranın dumanına veya çok açmadığımız bir musluktan akan suya bakın. Akışkan (duman veya su) önce sakin ve düzgün akacak, kaynaktan uzaklaştıkça salınıp titreşmeye başlayacak ve sonunda karmakarışık bir şekilde akmaya başlayacaktır. Bu son duruma türbülans (çalkantı) adı verilir. Bizi asıl ilgilendiren, aradaki geçiş evresindeki salınımların F_μ 'nin periyodik noktaları arasındaki gidiş gelişlere benzediğidir. Bu konuda genel bir teori henüz yoktur. Bu derginin bir önceki sayısındaki bir yazıda [4], kaos ve türbülans teorilerinin daha geniş bir tartışması bulunuyor.

Bazı akışkanlar mekanikçileri, türbülansa geçişin F_μ 'nin M_∞ 'dan önceki davranışına benzettiler. Geçiş evresinde gittikçe daha fazla periyotta titreşimlerin ortaya çıktığını, ve M_∞ gibi bir noktada aniden başlayan tam türbülansın, sonsuz sayıda değişik periyotlu salınımın bir bileşkesi olduğunu ileri sürdüler. Diğer bazıları ise üçlü periyot üzerinde durdular ve önce sonlu sayıda değişik periyotlu titreşimlerin olacağını,

sonra da aniden üçlü bir periyodun doğurduğu bir garip çekerin tam türbülansı oluşturacağını iddia ettiler [8]. Garip çeker denilen şey, bizim şimdiye kadar gördüğümüz çekerlerden farklıdır ve en az iki boyutlu sistemlerde ortaya çıkar. Bizim çekerlerimizde (kaotik bölgede değil), birbirine yakın iki noktanın ikisinin de yörüngesi ya çekere yakınsar, ya da $\mp\infty$ 'dan birine kaçar. Garip çekerlerde böyle iki noktanın yörüngeleri sonsuza kaçmadan birbirinden uzaklaşabilir ve çekerin civarında ayrı ayrı yoğun kümeler oluşturabilir; bu çekerler kaotiktir. Garip sıfatı bunlara konuyu ilk inceleyenlerce verilmiştir ve matematiksel bir anlam ifade etmez.



Şekil 5 ($\mu = 4.15$)

E. Cantor Kümelerine Dönüş

Son olarak kabullenmelerimizden birinin dışına çıkıp $\mu > 4$ haline bakalım. Artık F_μ 'nin I üzerindeki maksimumu $\frac{\mu}{4} > 1$, ve Şekil 5'te de görüldüğü gibi, I 'nin tam ortasındaki bir A_0 açık aralıktaki x 'leri F_μ , I dışına taşır. Bu noktaların yörüngesi $-\infty$ 'a kaçar. Diğer bir yazıyla, $x \in A_0$ ise $F_\mu(x) > 1$, $F_\mu^2(x) < 0$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu^n(x) = -\infty.$$

I 'nin geri kalan noktaları, bir kere F_μ uygulandığında I 'da kalırlar. Bunların A_1 kümesi diyeceğimiz bir kısmı, F_μ altında A_0 'a taşınırlar; bir kere daha F_μ uygularsak I 'nin dışına çıkarlar ve sonunda $-\infty$ 'a giderler. Geri kalanların bir kısmı (A_2), F_μ 'nin iki kere yinelenmesiyle A_0 'a girer, üçüncü yinelemede I dışına çıkarlar. Genelleyerek

$$\begin{aligned} A_n &= \{x \in I : F_\mu^n(x) \in A_0\} \\ &= \{x \in I : F_\mu^k(x) \in I \ (k \leq n), F_\mu^{n+1}(x) \notin I\} \end{aligned}$$

diyebiliriz. I 'dan bütün A_n 'lerin atılmasıyla kalan ve yörüngeleri I 'dan kaçmayan noktalardan meydana gelen

$$C = I \setminus \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right)$$

kümesini daha iyi anlamak istiyoruz.

$$\mu > 4 \text{ ve } F_\mu(x) = \mu x(1-x) = 1 \text{ ise}$$

$$x = a_{1,2} = \frac{\mu \mp \sqrt{\mu(\mu-4)}}{2\mu} \in I$$

olur. O halde $I \setminus A_0$ iki kapalı aralığın bileşimidir: $I_1 = [0, a_1]$ ve $I_2 = [a_2, 1]$. Hem I_1 'in hem de I_2 'nin F_μ altındaki görüntüsü I 'yı tamamen örter: $F_\mu(I_1) = F_\mu(I_2) = I$. I_1 (I_2) üzerinde F_μ tekdüze artandır (azalandır), yani bire birdir. Dolayısıyla, hem I_1 'in hem de I_2 'nin ortasında, F_μ altında A_0 'a taşınan birer açık aralık vardır; bileşimlerine A_1 deriz. $I \setminus (A_0 \cup A_1)$ dört tane kapalı aralıktan meydana gelir ve F_μ her birini tekdüze olarak I_0 veya I_1 üzerine, F_μ^2 ise gene tekdüze I üzerine gönderir. Önceki adımdaki gibi, bu dört aralığın her birinin ortasında, F_μ^2 tarafından A_0 'a gönderilen birer açık aralık bulunur, ki bunlar A_2 dediğimiz kümedir. Bahsedilen aralıklar Şekil 5'te F_μ 'nin grafiği ile birlikte görülüyor. Genel olarak A_n , 2^n tane ayrıntılı açık aralıktan oluşur, $I \setminus (A_0 \cup \dots \cup A_n)$

ise 2^{n+1} tane kapalı aralıktan. F_μ^{n+1} bu kapalı aralıkların her birini tekdüze ve üzerine olarak I 'ya gönderir, ve her birinde değişmeli olarak artan ve azalandır. F_μ^{n+1} 'nin grafiği 2^n hörgüçlüdür ve $y = x$ doğrusunu en az 2^n yerde keser. Buradan da F_μ^n 'nin en az 2^n sabit noktası olduğu, ya da F_μ^n 'nin periyodu n olan en az 2^n noktası olduğu ortaya çıkar. Şimdiye kadar yaptığımız iş [7]'de anlatılan Cantor kümesi inşasından farksızdır ve C bir genelleştirilmiş Cantor kümesidir.

C 'deki bir noktanın F_μ altındaki yörüngesi tamamıyla C 'de kalır, çünkü dışarı kaçan noktalar A_k 'lerin birindedir. Dahası da var. F_μ 'nin a_1 ve a_2 'deki dikliği $\beta = |F_\mu'(a_1)| = |F_\mu'(a_2)| = \sqrt{\mu(\mu-4)}$. Şekil 5'teki grafikten de görüleceği gibi, eğer β 'nin 1'den büyük olması sağlarsak, F_μ 'nin I_1 ve I_2 üzerindeki dikliği 1'den büyük olur. $C \subset I_1 \cup I_2$ olduğundan, aynı şartlar altında, C noktalarındaki diklik de 1'den büyüktür. Sonuç olarak, $\beta > 1$ eşitsizliğinin sağlandığı

$$\mu > 2 + \sqrt{5}$$

değerlerinde, C kümesinin tamamı iten noktalardan oluşur.

KAYNAKÇA

- [1] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis & P. Stacey, *On Devaney's Definition of Chaos*, *American Mathematical Monthly*, **99**, 332-334 (1992).
- [2] B. Demir, *Ara Değer Teoremi ve Periyodik Noktalar*, *Matematik Dünyası*, **3**, sayı 5, 7-9 (1993).
- [3] R.L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, 2 baskı, Addison-Wesley, Redwood City, 1989.
- [4] A. Eden, *Katastrof ve Kaos Teorileri Hakkında*, *Matematik Dünyası*, **4**, sayı 1, 6-11 (1994).
- [5] M.J. Feigenbaum, *Universal Behavior in Non-linear Systems*, *Los Alamos Science*, **1**, Yaz, 4-27 (1980).
- [6] D.R. Hofstadter, *Mathematical Themes*, *Scientific American*, **245**, Kasım, 16-29 (1981).
- [7] H.T. Kaptanoğlu, *Cantor Kümeleri*, *Matematik Dünyası*, **3**, sayı 4, 15-23 (1993).
- [8] P.C. Martin, *Instabilities, Oscillations, and Chaos*, *Journal de Physique*, **37**, C1, 57-66 (1976).