(A4.2) A77. $\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\sum_{p=1}^{n-1}p^{n-k}=n^n-n$ $(n\geq 2)$ olduğunu gösteriniz. (*Dinçer Akay*)

Çözüm. $A=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\sum_{p=1}^{n-1}p^{n-k}=\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}p^{n-k}$ olsun. Binom formülünden $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^{n-k}=(1+p)^n$ olduğunu biliyoruz. O halde $\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}p^{n-k}=(1+p)^n-p^n-1$ ve

$$\begin{aligned}A &= \sum_{p=1}^{n-1}\{(1+p)^n-p^n-1\}\\ &= (2^n-1^n-1)+(3^n-2^n-1)\\ &\quad +\cdots+\{n^n-(n-1)^n-1\}\end{aligned}$$

olur. Birbirini götüren terimleri ayıkladığımızda

$$A=n^n-1^n-(n-1)=n^n-n$$

kalır.

(**Çözenler:** *Emre Alkan, Atasağun Baykal, Burhan Biner, Almas Rimov*)

(A4.3) A78. Bir $ABCD$ dörtgeninde köşegenlerin orta noktaları X,Y, ve $[AB]\cap[CD]=F$ ise, alan$(FXY)=\frac{1}{4}$alan$(ABCD)$ olduğunu gösteriniz. (*Ayhan Aziz*)

Çözüm. F noktası, $[AB]$ ve $[CD]$ kenarlarının uzantılarının kesiştiği noktadır. Bu da ancak $ABCD$ dörtgeni, paralelkenar olmayan genel bir dörtgen olarak alındığında gerçekleşir. Kolaylık olsun diye alan(FXY) yerine $|FXY|$ kullanacağız. $[BC]$ ve $[AD]$'nin orta noktalarına Q ve S diyelim. $|FXY|=|FXQ|+|FYQ|+|QXY|$ diye parçalarız. B ve F aynı doğru üzerinde olduklarından $|FXQ|=|BXQ|=\frac{1}{4}|CAB|$ ve aynı şekilde $|FYQ|=|CYQ|=\frac{1}{4}|BCD|$ olur. Öte yandan

$$\begin{aligned}|QXY| &= \frac{1}{2}|XQYS|\\ &= \frac{1}{2}\Big(|ABCD|-|DYS|\\ &\quad -|ASX|-|ABQX|-|CDYQ|\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(|ABCD|-\frac{1}{4}|DAB|\\ &\quad -\frac{1}{4}|ACD|-\frac{3}{4}|ABC|-\frac{3}{4}|BCD|\Big)\\ &= \frac{1}{8}\Big(4|ABCD|-|DAB|\\ &\quad -|ACD|-3|ABC|-3|BCD|\Big)\\ &= \frac{1}{8}\Big(4|ABCD|-|ABCD|\\ &\quad -|ABCD|-2|ABC|-2|BCD|\Big)\\ &= \frac{1}{4}\Big(|ABCD|-|ABC|-|BCD|\Big)\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla

$$|FXY|=|FXQ|+|FYQ|+|QXY|=\frac{1}{4}|ABCD|.$$

(**Çözenler:** *Alaattin Aktaş, Şevket Emrah Aydın, Atasağun Baykal, Burhan Biner, Almas Rimov, Ergün Yaraneri*)

(A4.4) A79. Bir üçgende içaçıların kotanjantları aritmetik dizi oluştururlarsa, kenar uzunluklarının karelerinin de aritmetik dizi oluşturduklarını gösteriniz. (*Hasan Kullap*)

Çözüm. $2\cot B=\cot A+\cot C$ olması halinde $2B^2=A^2+C^2$ olacağını gösterelim.

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \qquad \text{ve} \qquad \sin A=\frac{a}{2R}$$

den,

$$\cot A = \frac{R(b^2+c^2-a^2)}{abc}$$

ve benzer olarak

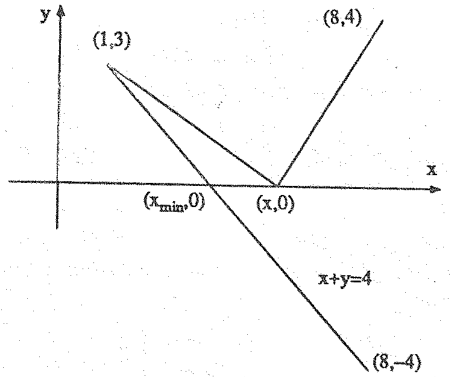
$$\begin{aligned}\cot B &= \frac{R(a^2+c^2-b^2)}{abc},\\ \cot C &= \frac{R(a^2+b^2-c^2)}{abc}\end{aligned}$$

yazılır. $2\cot B=\cot A+\cot B$ ise $2(a^2+c^2-b^2)=(b^2+c^2-a^2)+(a^2+b^2-c^2)$ ve $2b^2=a^2+c^2$ bulunur.

(**Çözenler:** *Alaattin Aktaş, Emre Alkan, Şevket Emrah Aydın, Atasağun Baykal, Burhan Biner, Ercan Şahin, Ruhi Tabur, Almas Rimov, Ergün Yaraneri*)

(A4.5) A80. $f(x)=\sqrt{(x-1)^2+9}+\sqrt{(x-8)^2+16}$ fonksiyonunun minimum değerini bulunuz. (*Moskova Bağımsız Üniversitesi, 1991 Giriş Sınavı*)

Çözüm. Kartezyen düzlemde bakarsak $f(x)$, $(x,0)$ noktasının (1,3) ve (8,4) noktalarına uzaklıklarının toplamıdır. Şekilden görüldüğü



gibi bu toplamı minimum yapan $(x_{\min}, 0)$ değeri $(1,3)$ ile $(8,4)$'ün simetriği olan $(8,-4)$ noktasını birleştiren doğru ile x ekseninin kesim noktası olacaktır. $(8,-4)$ ile $(1,3)$ noktalarından geçen doğru,

$$\frac{y-3}{x-1} = \frac{8-3}{-4-1},$$

yani $y-3 = -(x-1)$, yani $y+x = 4$ doğrusudur. O halde $x_{\min} = 4$ ve $f(x)$'in minimum değeri $\sqrt{(4-1)^2+9} + \sqrt{(4-8)^2+16} = \sqrt{9+9} + \sqrt{16+16} = 7\sqrt{2}$'dir.

(**Çözenler:** *Alaattin Aktaş, Emre Alkan, Murat Aygen, Şevket Emrah Aydın, Atasağun Baykal, Almas Rimov, Özgün Sümer, Ercan Şahin, Ruhi Tabur*)

(Y4.1) Y76. $[AA']$ ve $[BB']$, O merkezli birim çemberin birbirine dik iki çapıdır. B' noktasından geçen değişken bir doğru, $[OA]$'yı U'da ve AB yayını P'de keserse, OUP üçgeninin alanının alabileceği en büyük değerin $\frac{1}{4}\sqrt{10\sqrt{5}-22}$ olduğunu gösteriniz. (*Hüseyin Demir*)

Çözüm. OA ve OB'yi eksen kabul eden dikdörtgen koordinat sistemi kabul edersek, U'nun koordinatleri $(u,0)$ ve $B'U$ doğrusunun denklemi de $\frac{1}{u} - y = 1$ olur. P noktasının koordinatları için, bu denklemin çemberin $x^2+y^2=1$ denklemiyle ortak çözümünden

$$u = \frac{2u}{1+u^2} \qquad ve \qquad y = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

temin edilir. $|OUP| = S$ yazalım. Koordinatlar cinsinden

$$2S = uy = \frac{u-u^3}{1+u^2} = u\frac{1-u^2}{1+u^2}$$

ve

$$2\frac{dS}{du} = \frac{1-4u^2-u^4}{(1+u^2)}$$

bulunur. $\frac{dS}{du} = 0$'dan $u^4+4u^2-1 = 0$ ve $u = \sqrt{\sqrt{5}-2}$ bulunur. Problemin özelliğinden bu kritik noktanın bir maksimuma tekabül ettiği açıktır. O halde S'nin en büyük değeri

$$\begin{aligned} S &= \frac{u}{2}\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \frac{u}{2}\frac{-2+2\sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{4}\sqrt{\sqrt{5}-1} = \frac{1}{4}\sqrt{10\sqrt{5}-22} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

(**Çözenler:** *Tamer Adanır, Alaattin Aktaş, Emre Alkan, Şevket Emrah Aydın, Murat Aygen, Atasağun Baykal, Buhan Biner, Almas Rimov, Özgür Sümer, Ercan Şahin, Ruhi Tabur*)

(Y4.2) Y77. Elemanları 0 veya 1 olan, her satırında ve her sütununda en az bir 0 ve en az bir 1 bulunan kaç tane farklı $n \times n$ $(n \geq 2)$ matris bulunabilir?

Çözüm. Elemanları 0 veya 1 olabilen n elemanlı bir 'sıra'da en az bir 0 ve en az bir 1 olacak ise, bu sıra $2^n - 2$ farklı şekilde teşkil edilebilir. Bu tarz sıralardan n tanesini alt alta dizersek $(2^n-2)^n$ farklı şekilde, her satırda en az bir 1 ve en az bir 0 olan $n \times n$ matrisler yazabiliriz. k tane sütununun her biri tamamen 0 ve ya 1 lerden oluşan matrislerin sayısı da $2(2^{n-k}-1)^n + (2^k-2)2^{n(n-k)}$ olduğundan, içerme-dışarma prensibini kullanarak istenen matrislerin sayısını

$$(2^n-2)^n + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left[2(2^{n-k}-1)^n + (2^k-2)2^{n(n-k)}\right]$$

olarak buluruz.

(Y4.3) Y78. Dış r_a, r_b, r_c yarıçapları verilen bir üçgenin pergel ve cetvelle çizilebileceğini gösteriniz. (*Hüseyin Demir*)

Çözüm. Bir I_a noktası alınıp, I_a merkez ve r_a yarıçaplı (I_a) çemberi üzerindeki bir E noktasından teğet doğru çizilir. $r_br_c + r_cr_a + r_ar_b = u^2$ yazılarak, çizilen teğet doğru üzerinde E'den uzaklığı u olan bir A noktası işaretlenir ve A'dan (I_a)'ya $[AF]$ teğet doğru parçası çizilir. $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$ eşitliğinden r iç yarıçapı bulunup, I merkezi $[AI_a]$ üzerinde olmak üzere AE ve AF'ye teğet r yarıçaplı (I) çemberi çizilir. Bu iki çemberin kesişmesi halinde çözüm yoktur. Çemberler kesişmiyorsa ortak bir iç teğet doğrusu çizilir. Bu doğrunun AE ve AF doğrularını kestiği noktalara B ve C denirse, ABC üçgeni aradığımız üçgen olur.

(**Çözenler:** *Emre Alkan, Atasağun Baykal, Almas Rimov*)

(Y4.4) Y79. Köşegenlerinin kesişme noktası K olan bir $ABCD$ dörtgeninde, CAB, DAB ve KAB üçgenlerinin iç teğet çemberleri AB'ye sırasıyla T_1, T_2 ve T noktalarında değsinler. r_1 ve r_2, KBC ve KDA üçgenlerinin iç teğet çemberlerinin yarıçapları ise,

$$r_1 \leq r_2 \Longleftrightarrow |TT_1| \leq |TT_2|$$

olduğunu gösteriniz. (*Hüseyin Demir*)

Çözüm. $\sphericalangle BKC = 2\alpha$, $|KA| = x$, $|KC| = x'$, $|KB| = y$, $|KD| = y'$ diyelim.

$$r_1 = \frac{y + x' - b}{2}\tan\alpha, \qquad r_2 = \frac{x + y' - d}{2}\tan\alpha$$

olup, $r_1 < r_2 \Longleftrightarrow y + x' - b \leq x + y' - d$ bulunur. Öte yandan

$$|BT_1| = a + b - (x + x'), \quad |BT_2| = \frac{a + y + y' - d}{2}$$

ve

$$|BT| = \frac{a + y - x}{2}$$

olup, $TT_1 = |BT| - |BT_1| = y + x' - b$ ve $TT_2 = |BT_2| - |BT| = x + y' - d$ elde edilir. Buradan da $TT_1 \leq TT_2 \Longleftrightarrow y + x' - b \leq x + y' - d$ bulunur.

(**Çözenler:** *Ali Akın, Alaattin Aktaş, Atasağun Baykal, Almas Rimov*)

(Y4.5.) Y80.

$$\begin{vmatrix} d_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & d_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & d_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & d_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & d_n \end{vmatrix}$$

determinantını hesaplayınız.

Çözüm. $1 \leq k \leq n$ için

$$D_k = \begin{vmatrix} d_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & d_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & d_k \end{vmatrix}$$

determinantı olsun. $D_1 = d_1$ ve $D_2 = d_1 d_2 - 1$ olur. D_{k+1} için bir indirgeme bağıntısı bulalım. Önce

$$f(x) = \begin{vmatrix} d_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & d_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & d_k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}.$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Determinant açılımından $f(x) = D_k x + C$ şeklindedir. Öte yandan $x = 1$ için $f(1) = D_k + C$ ve determinant kurallarından

$$\begin{aligned} f(1) &= \begin{vmatrix} d_1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & d_2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & d_k & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} d_1 - 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 - 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_k - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (d_1 - 1)(d_2 - 1)\cdots(d_k - 1) \end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$C = -D_k + (d_1 - 1)(d_2 - 1)\cdots(d_k - 1)$$

ve

$$\begin{aligned} D_{k+1} &= f(d_{k+1}) \\ &= D_k(d_{k+1} - 1) \\ &\quad + (d_1 - 1)(d_2 - 1)\cdots(d_k - 1) \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} D_1 &= d_1 \\ D_2 &= d_1(d_2 - 1) + (d_1 - 1) \\ &= (d_1 - 1)(d_2 - 1) + (d_1 - 1) + (d_2 - 1) \\ D_3 &= (d_1 - 1)(d_2 - 1)(d_3 - 1) + (d_1 - 1)(d_3 - 1) \\ &\quad + (d_2 - 1)(d_3 - 1) + (d_1 - 1)(d_2 - 1) \\ &\vdots \end{aligned}$$

den de

$$D_n = \left[\prod_{i=1}^{n}(d_i - 1)\right]\left[1 + \frac{1}{d_1 - 1} + \frac{1}{d_2 - 1} + \cdots + \frac{1}{d_{n-1}}\right]$$

bulunur. Bu kolayca tümevarımla ispatlanabilir.

(**Çözenler:** *Tamer Adanır, Alaattin Aktaş, Almas Rimov*)