

örten) fonksiyon, bire-bir fonksiyon, temel küme işlemleri ve tümevarım kavramını biraz olsun tanıyan, bileşkeleri tanımlanabilen iki üzerine fonksiyonun bileşke fonksiyonunun da üzerine olduğunu bilen ve anlama çabası ile okuyan herkes anlatılanları sanırım kavrayacaktır. Elimizde tuttuğunuz derginin Haziran-Ağustos 1991 sayısında yayımlanan *Kümelerin Niceliği* başlıklı yazının bazı sonuçlarına bakmak yararlı olabilir.

Tüm doğal sayılar kümesi, yani $\{1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots\}$, kısaca \mathbb{N} işareti ile, $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesi ise \mathbb{N}_n işareti ile gösterilecektir. Bir X kümesinin tüm alt kümelerinden oluşan küme ise $\mathcal{P}(X)$ ile gösterilecektir.

Önerme 1. \mathbb{N}_n kümesinden \mathbb{N}_{n+1} kümesine üzerine bir fonksiyon tanımlanamaz.

Bu önermeyi n doğal sayıları üzerinden tümevarımla göstereceğiz. Apaçiktır ki $N_1 = \{1\}$ kümesinden $N_2 = \{1, 2\}$ kümesine tanımlanan herhangi bir fonksiyon altında N_2 kümesindeki elemanlardan birisi görüntü elemanı olamaz. Şimdi önermenin n doğal sayısı için doğru olduğunu varsayalım. Buna n 'nci adım varsayımı adı verilir. Bu varsayım altında \mathbb{N}_{n+1} kümesinden \mathbb{N}_{n+2} kümesine herhangi bir üzerine fonksiyonun tanımlanmasının olanaksızlığını, olmayana ergi (ya da saçmaya indirgeme) yöntemiyle göstereyim. Bir $g : \mathbb{N}_{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_{n+2}$ üzerine fonksiyonu tanımlı olsaydı, öncelikle her bir $k \in \mathbb{N}_{n+2}$ için $g^{-1}(k) \neq \emptyset$ olurdu. Dikkat: $n+1 \in g^{-1}(n+2)$ olamaz, aksi halde $k \leq n+1$ gerçekleyen her $k \in \mathbb{N}_{n+2}$ için $g^{-1}(n+2) = \emptyset$ ve $g^{-1}(k) \subseteq \mathbb{N}_{n+1} - \{n+1\} = \mathbb{N}_n$ nedeniyle $g | \mathbb{N}_n : \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}_{n+1}$ kısıtlama fonksiyonu üzerine olurdu, bu n 'nci adım varsayımına aykırıdır. Demek ki $n+1 \notin g^{-1}(n+2)$, $g(n+1) \leq n+1$ ve $g^{-1}(n+2) \subseteq \mathbb{N}_n$ ara sonuçları ve $\mathbb{N}_n = (\mathbb{N}_n - g^{-1}(n+2)) \cup g^{-1}(n+2)$ eşitliği elde edilir. Şimdi

$$h(k) = \begin{cases} g(k), & k \in \mathbb{N}_n - g^{-1}(n+2) \text{ ise,} \\ g(n+1), & k \in g^{-1}(n+2) \text{ ise,} \end{cases}$$

şeklindeki $h : \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}_{n+1}$ fonksiyonunun üzerine olduğunu göstererek yine bir çelişki elde edelim. Gerçekten $\{g(n+1)\} = \{g(n+1)\} - \{n+2\}$ nedeniyle

$$\begin{aligned} h(\mathbb{N}_n) &= h(\mathbb{N}_n - g^{-1}(n+2)) \cup h(g^{-1}(n+2)) \\ &= g(\mathbb{N}_n - g^{-1}(n+2)) \cup \{g(n+1)\} \\ &= (g(\mathbb{N}_n) - \{n+2\}) \cup \{g(n+1)\} \\ &= (g(\mathbb{N}_n) \cup \{g(n+1)\}) - \{n+2\} \end{aligned}$$

$$= g(\mathbb{N}_{n+1} - \{n+2\}) = \mathbb{N}_{n+1}$$

bulunarak yine n 'nci adım varsayımına aykırı düşülmüş olur. Tümevarım varsayımı altında \mathbb{N}_{n+1} kümesinden \mathbb{N}_{n+2} kümesine üzerine bir fonksiyon tanımlanamayacağı gösterilmiş oldu.

Önerme 2. $n < m$ ise \mathbb{N}_n kümesinden \mathbb{N}_m kümesine üzerine bir fonksiyon tanımlanamaz.

Dikkat edilirse $n \leq m$ ise, \mathbb{N}_m kümesinden \mathbb{N}_n kümesine pek çok (en az $n \cdot n!$ tane) üzerine fonksiyon tanımlanabilir. O halde $n < m$ iken \mathbb{N}_n kümesinden \mathbb{N}_m kümesine üzerine bir fonksiyon tanımlanabilseydi, \mathbb{N}_n kümesinden \mathbb{N}_{n+1} kümesine üzerine bir (bileşke) fonksiyonu tanımlanabilirdi. Bu olanaksızdır.

Önerme 3. X kümesi ne olursa olsun, X kümesinden $\mathcal{P}(X)$ kümesine üzerine bir fonksiyon tanımlanamaz.

Georg Cantor'a ait bu olağanüstü önemli önermenin Bertrand Russell tarafından verilen şu kısa çarpıcı kanıtlanmasına bakınız. Eğer bir $h : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ üzerine fonksiyonu tanımlanabilseydi $X_0 = \{x \in X : x \notin h(x)\}$ "iyi tanımlanmış" alt kümesi için, bu küme boş olsun ya da olmasın, en az bir $x_0 \in X$ elemanının $h(x_0) = x_0$ gerçekleşmesi gerekirdi. Dikkat: $x_0 \in X_0$ ancak ve yalnız $x_0 \notin X_0$ iken geçerlidir. Ne çelişki! Bu önemli önermenin Cantor tarafından verilen bir başka kanıtlanmasını da görmenin yararlı olduğunu sanıyoruz. Varsayalım ki bir $h : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ üzerine fonksiyonu tanımlanabilsin. O halde her bir $x \in X$ için $A_x = h(x) \subseteq X$ "görüntü elemanı" tanımlı olurdu. Her bir $A \subseteq X$ alt kümesinin karakteristik fonksiyonu, $\forall x \in A$ için $\chi_A(x) = 1$ ve $\forall x \in X - A$ için $\chi_A(x) = 0$ şeklinde, X kümesinden $\{0, 1\}$ kümesine tanımlanan fonksiyondur. Dikkat edilirse ancak ve yalnız $A = B$ iken χ_A ve χ_B karakteristik fonksiyonları eşit olabilir; başka bir deyişle kümesindeki her bir elemanda eşit değerler alabilirler. Gerçekten $A = B$ ise her $x \in A (= B)$ için $\chi_A(x) = 1 = \chi_B(x)$ ve her $x \in X - A (= X - B)$ için $\chi_A(x) = 0 = \chi_B(x)$ olur. Tersine eğer her $x \in X$ için $\chi_A(x) = \chi_B(x)$ ise, özellikle her bir $a \in A$ için $1 = \chi_A(a) = \chi_B(a)$ eşitliği bize $a \in B$ gerçekleştiğini söyler ve sonuçta $A \subseteq B$ ve benzer biçimde $B \subseteq A$ kapsamaları ve dolayısı ile $A = B$ eşitliği elde edilir. Şimdi okuyucu, $\forall x \in X$ için $\varphi(x) = \chi_{X-A_x}(x)$ şeklinde X kümesinden $\{0, 1\}$ kümesine tanımlanan φ

fonksiyonunun, $\varphi^{-1}(1) = E \subseteq X$ olmak üzere, E kümesine ait olsun olmasın, her bir $x \in X$ elemanı için $\varphi(x) = \chi_E(x)$ sağladığını kolayca görecektir. $E = h(x_0) = A_{x_0}$ sağlayan en az bir $x \in X$ elemanı var olduğundan (neden?), sonuçta $\varphi = \chi_E = \chi_{A_{x_0}}$ ve dolayısı ile $\chi_{A_{x_0}}(x_0) = \varphi(x_0) = \chi_{X-A_{x_0}}(x_0)$ saçma sonucu elde edilirdi; burada sol yan 1 iken sağ yan 0 dır ya da tersi. Demek ki X kümesinden $\mathcal{P}(X)$ kümesine tanımlanmış bir üzerine fonksiyonun varlığından söz edilemez.

Önerme 4. \mathbb{N} kümesinden \mathbb{R} kümesine herhangi bir üzerine fonksiyon tanımlanamaz.

\mathbb{R} kümesinden $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ kümesine üzerine ve üstelik bire-bir bir fonksiyon tanımlıdır (bkz. Önerme 5). O halde \mathbb{N} kümesinden \mathbb{R} kümesine üzerine bir fonksiyonunun tanımlanabilmesi varsayımı bir önceki önermeyle çelişen bir sonuç doğurur. Neden? Biz burada başka bir kanıtlama verelim. $]0,1[$ aralığındaki gerçel sayılar doğal sayılarla numaralandırılmazlar ve dolayısı ile \mathbb{N} kümesinden $]0,1[$ aralığına üzerine bir fonksiyon tanımlanamaz (bkz. Notlar 2). Gerçekten bu aralıktaki tüm gerçel sayılar kümesi \mathbb{N} kümesi ile "numaralandırılabilseydi," bu aralık $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ kümesinden başka bir şey olmazdı. Dikkat: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ rasyonel sayıları nedeniyle bu aralıkta zaten "en az" doğal sayılardaki kadar gerçel sayı vardır. Her bir n doğal sayısı için x_n gerçel sayısı $x_n = 0, x_{n1}x_{n2}x_{n3}x_{n4} \dots$ şeklindeki ondalık açılıma sahiptir; burada x_{n1}, x_{n2}, \dots basamakları $0, 1, \dots, 9$ tam sayılardır (bkz. Notlar 3). Bilindiği gibi en az bir basamak 0 değildir ve belirli bir basamaktan sonra tüm diğerleri 9 olmaz. Tersine basamakları bu koşula uyan herhangi bir ondalık açılım $]0,1[$ aralığına ait bir gerçel sayıdır. Şimdi, her n için x_n gerçel sayısının n 'nci basamağı olan x_{nn} tam sayısını yardımı ile önce $k_n = \lfloor \frac{x_{nn}+1}{3} \rfloor$ tam sayısını ve sonra $x_n = x_{nn} + (-1)^{k_n}$ tam sayılarını basamak kabul eden $a = 0, a_1a_2a_3 \dots$ gerçel sayısını tanımlayalım. Bu gerçel sayı bir yandan $]0,1[$ aralığına aittir, öte yandan bu aralıktaki tüm x_n gerçel sayılarından farklıdır, çünkü $a_n \neq x_{nn}$ geçerli olmaktadır. Çelişki! Demek ki \mathbb{N} kümesinden $]0,1[$ aralığına, üzerine bir fonksiyon tanımlanamaz. Oysa $g(x) = \frac{x}{2+2|x|} + \frac{1}{2}$ şeklindeki $g : \mathbb{R} \rightarrow]0,1[$ fonksiyonu üzerine (ve üstelik bire-bir) olduğundan (neden?), \mathbb{N} kümesinden \mathbb{R} kümesine bir üzerine fonksiyonun tanımlanamayacağı anlaşılır.

Uyarı. Yukarıda $|\mathbb{N}_1| < \dots < |\mathbb{N}_n| < \dots < |\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ gerçekleştiği gösterildi. Önerme 2 nedeni ile bir küme eğer \mathbb{N}_n kümesi ile eş kuvvette ise, $n \neq m$ olmak üzere \mathbb{N}_m kümesi ile eş kuvvette olamaz. Ancak ve yalnız \mathbb{N}_n kümesi ile eş kuvvette olabilen bir kümeye n elemanlı denir. \mathbb{N}_n kümelerinin hiç birisi ile eş kuvvette olamayan bir X kümesinin ya $|X| = |\mathbb{N}|$, ya da $|\mathbb{N}| < |X|$ gerçekleyeceği Ana Teorem'in bir sonucudur. Böyle bir kümeye *sonsuz elemanlı küme* denir. Her X kümesi için $|X| < |\mathcal{P}(X)|$ gerçekleştiğini bildiğimiz için, her sonsuz noktalı kümeden çok daha kalabalık bir başka sonsuz elemanlı kümenin var olduğu anlaşılır. Aynı nedenden ötürü "en kalabalık sonsuz elemanlı küme" yi tanımlamak olanaksızdır. Bu yazıyı, pek çok önemli kümenin eş kuvvette olduklarını gösterebilmemize elveren olağanüstü önemli bir teoreme ilişkin iki ünlü uygulama ile bitiriyoruz.

Önerme 5. $\mathbb{R} \cong \mathcal{P}(\mathbb{N})$ 'dir.

Önce şu temel gerçeği gözleyelim. Herhangi iki gerçel sayı arasında sonsuz tane rasyonel sayı vardır. Gerçekten $x < y$ ise $\frac{1}{y-x} < n$ gerçekleyen n doğal sayısının varlığı gerçel sayıların temel özelliklerinden biridir. $r = \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}$ rasyonel sayısı $x < r < y$ gerçekler, çünkü $nx < \lfloor nx \rfloor + 1 \leq nx + 1 < ny$ geçerlidir. O halde $x < r_1 < r < p_1 < y$ gerçekleyen r_1 ve p_1 rasyonel sayıları ve dolayısı ile $x < \dots < r_3 < r_2 < r_1 < r < p_1 < p_2 < p_3 < \dots < y$ gerçekleyen rasyonel sayılar da vardır. Şimdi, $\varphi(x) =]-\infty, x] \cap \mathbb{Q}$ şeklinde tanımlanan $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ fonksiyonu bire-birdir; örneğin $x < y$ ise, yukarıda varlığı kanıtlanan r rasyonel sayısı $r \in \varphi(y) - \varphi(x)$ gerçekler. Demek ki $x \neq y$ ise, $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ gerçekleşmektedir. O halde $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \cong \mathcal{P}(\mathbb{N})$ olduğundan (neden?), \mathbb{R} kümesinden $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ kümesine tanımlı bir bire-bir fonksiyon vardır. Şimdi her bir $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ için

$$\varphi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_A(n) + 1}{10^n}$$

şeklinde tanımlanan $\psi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow]0,1[$ fonksiyonu göz önüne alınsın. O halde $\psi(A)$, ondalık açılımında, n 'nci basamağı $k_n^A = \chi_A(n) + 1$ tamsayısı olan gerçel sayıdır, yani $\varphi(A) = 0, k_1^A k_2^A k_3^A \dots$ 'dir. Dolayısı ile φ bire-birdir, neden? Demek ki $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ kümesinden \mathbb{R} kümesine tanımlı bir bire-bir fonksiyon vardır, neden? Aşağıdaki teorem önermeyi kanıtlar.

Cantor-Bernstein Teoremi. X kümesinden Y kümesine bir bire-bir fonksiyon ve tersine Y kümesinden X kümesine bir bire-bir fonksiyon tanımlı ise $X \cong Y$ olur.

Önerme 6. $\mathbb{N} \cong \mathcal{P}_n(\mathbb{N}) \cong \mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ 'dir.

Burada $\mathcal{P}_n(\mathbb{N})$ ile \mathbb{N} kümesinin n elemanlı tüm alt kümelerinin kümesi, $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ ile de \mathbb{N} kümesinin tüm sonlu elemanlı alt kümelerinin kümesi, yani $\mathcal{P}_0(\mathbb{N}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n(\mathbb{N})$ gösterilmektedir. $n \leftrightarrow \{n\}$ eşlemesi nedeniyle hemen $\mathbb{N} \cong \mathcal{P}_1(\mathbb{N})$ bulunur. Şimdi $\mathbb{N} \cong \mathcal{P}_n(\mathbb{N})$ varsayalım. Bu n 'nci adım varsayımımızdır. Dikkat edilirse $X \cong Y$ ise, bu eş kuvvetliliği gerçekleştiren üzerine ve bire-bir fonksiyon f olmak üzere $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \leftrightarrow \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$ eşlemesi sayesinde $\mathcal{P}_n(X) \cong \mathcal{P}_n(Y)$ olduğu apaçiktir. Ayrıca her m doğal sayısı için $m \leftrightarrow m + 1$ eşlemesi yardımıyla $\mathbb{N} \cong \{2, 3, \dots\}$ ve sonuçta $\mathcal{P}_n(\mathbb{N}) \cong \mathcal{P}_n(\mathbb{N} - \{1\})$ gerçekleşir. O halde 1'den farklı doğal sayılardan oluşan $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ kümesine $\{1, m_1, m_2, \dots, m_n\}$ kümesini eşleştiren fonksiyon ve n 'nci adım varsayımı yardımı ile \mathbb{N} kümesinden $\mathcal{P}_{n+1}(\mathbb{N})$ kümesine bire-bir bir fonksiyon tanımlanabilir. Şimdi de şunları gözleyelim. $(x, y, z) \leftrightarrow ((x, y), z)$ ile $X \times Y \times Z \cong (X \times Y) \times Z$ ve sonuçta herhangi bir X kümesi için $X^3 \cong X^2 \times X$ ve tümevarımla kolayca $X^n \cong X^{n-1} \times X$ geçerli olduğu anlaşılır. O halde her $2 \leq n$ doğal sayısı için yine tümevarımla $\mathbb{N} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$ elde etmek güç değildir. Sonuçta, $n + 1$ elemanlı herhangi bir doğal sayılar kümesi için $h(\{m_1, m_2, \dots, m_{n+1}\}) = (m_1, m_2, \dots, m_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$ şeklinde tanımlanan h fonksiyonunun bire-bir olduğu apaçık görüldüğünden, $\mathcal{P}_{n+1}(\mathbb{N})$ kümesinden \mathbb{N} kümesine bire-bir bir fonksiyonunun tanımlanabildiği de anlaşılır. O halde Cantor-Bernstein teoremi nedeniyle $\mathbb{N} \cong \mathcal{P}_{n+1}(\mathbb{N})$ sonucu elde edilir. Böylelikle ilk iddia tümevarımla gösterilmiş olur. $\mathbb{N} \cong \mathcal{P}(\mathbb{N})$ iddiasını göstermeyi okuyucuya bırakıyoruz (bkz. Notlar 4).

Notlar

1. Ordinal sayılar sisteminin yeterince mükemmel olmasına karşın, çok önemli bazı

soruların yanıtları açıklığa kavuşturulamamaktadır. Örneğin \mathbb{R} gerçel sayılar kümesinin eleman sayısını "ölçmekte" kullanılan ordinal sayıyı belirlemek olanaksızdır. Cantor 1878 yılında ω_1 işareti ile gösterilen ordinal sayının bu nitelikte olduğunu öngörmüştü. 1938 ve 1963 yıllarında kanıtlanan iki teoremden ötürü bu öngörünün doğruluğunun ya da yanlışlığının kanıtlanamayacağı anlaşıldı. Dahası, sonsuz elemanlı herhangi bir X kümesi için $\mathcal{P}(X)$ kuvvet kümesinin eleman sayısını "ölçmekte" kullanılan ordinal sayı, böyle bir sayının varlığının kesinkes kanıtlanabilmesi-ne karşın, açıkça belirlenememektedir.

2. \mathbb{N} kümesinden sonsuz noktalı herhangi bir X kümesine tanımlanan herhangi bir f üzerine fonksiyonu için şunlara dikkat edelim: Her bir $x \in X$ elemanı için $\mathbb{N}_x = \{n \in \mathbb{N} : f(n) = x\} \subseteq \mathbb{N}$ altkümesi boş değildir ve üstelik $x \neq y$ için \mathbb{N}_x ile \mathbb{N}_y kümeleri ayrıktır ve dolayısı ile \mathbb{N}_x ile \mathbb{N}_y farklı kümelerdir. O halde $x \leftrightarrow \mathbb{N}_x$ eşlemesi bire-birdir. Her bir \mathbb{N}_x kümesinden bir ve yalnız bir n_x doğal sayısı seçilsin. $x \leftrightarrow \mathbb{N}_x$ eşlemesi de bire-birdir, yani $\{n_x : x \in X\} \cong X$ ve üstelik $f(\{n_x : x \in X\}) = X$ gerçekleşir, neden? $\{n_x : x \in X\}$ sonsuz elemanlı olduğu için \mathbb{N} ile eş kuvvettedir, neden? O halde X kümesinin tüm elemanları \mathbb{N} ile "numaralanabilir", yani $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ yazılabilir. Okuyucu, benzer düşünceleri herhangi bir üzerine fonksiyon için yapmalıdır.
3. Gerçel sayıların ondalık açılımları (ya da 10 tabanlı açılımları) konusunda bu derginin Nisan 1991 sayısında yer alan *Gerçel Sayı Nedir?* başlıklı yazıya başvurulabilir.
4. Her bir n için $\mathcal{P}_n(\mathbb{N}) = \{A_{n1}, A_{n2}, A_{n3}, \dots\}$ yazılarak $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ kümesinden \mathbb{N} kümesine

$$h(A_{nm}) = n + \frac{1}{2}(n + m - 2)(n + m - 1)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonun üzerine ve bire-bir olduğunu göstermeğe çalışın. Ayrıntılar için *Kümelerin Niceliği* başlıklı yazıdaki Önerme 5'e bakılmalıdır.