

İLGİNÇ GEOMETRİ PROBLEMLERİ

Emre Alkan *

Bu yazıda okuyucuya bir dizi ilginç problem sunmaya çalışacağız. P. Erdős'e ait iki güzel problemle başlayalım.

Problem 1. Geniş açılı olmayan, çevrel ve iç yarıçapları R ve r , yükseklikleri h_a, h_b, h_c olan bir ABC üçgeninde $R + r \leq \max\{h_a, h_b, h_c\}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. ABC üçgeninin ortosantrını (yüksekliklerinin kesim noktasını) ve çevrel çember merkezini H ve O ile gösterelim. Şu teoremleri gözönüne alalım.

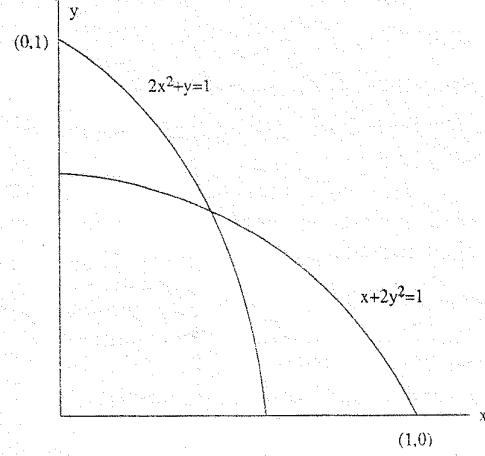
- (i) O 'nun ABC 'nin kenarlarına uzaklıklarının toplamı $R + r$ 'dir.
- (ii) O 'dan kenarlara inilen dikme ayakları A', B', C' olsun. Bu durumda $HA = 2 \cdot OA'$, $HB = 2 \cdot OB'$, $HC = 2 \cdot OC'$ eşitlikleri geçerlidir.
- (iii) H 'nin kenarlara göre simetrikleri çevrel çember üzerindedir.

Bu teoremlerin ispatlarını okuyucuya bırakacağız.

Üçgenin açıları için $A \leq B \leq C$ alalım. Böylece $\max\{h_a, h_b, h_c\} = h_a$ olur. Ortosantrın BC kenarına göre simetriği H' olsun. (i), (ii) ve (iii) kullanılarak $R + r \leq h_a$ eşitsizliğinin $BH' + CH' \leq AH'$ eşitsizliğine dönüştüğü gözlenebilir. Sinüs teoremi yardımıyla bu eşitsizliğin $\cos B + \cos C \leq AH'$ eşitsizliğine dönüştüğü gözlenebilir. Kosinüs teoremi yardımıyla bu eşitsizlik $\cos B + \cos C \leq \cos(B - C) = \cos B \cos C + \sin B \sin C$ eşitsizliğine dönüşür. $\cos B = x$ ve $\cos C = y$ alalım. Böylece $x + y \leq xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$. Üçgen geniş açılı olmadığından $x \geq 0$, $y \geq 0$ kısıtlamaları var. Ayrıca $2B \geq \pi - C$ ve $2C \geq \pi - B$ olduğundan, $\cos B \leq \sin \frac{C}{2}$ ve $\cos C \leq \sin \frac{B}{2}$, yani $2x^2 + y \leq 1$ ve $x + 2y^2 \leq 1$ kısıtlamaları da elde edilir.

Şimdi

$$f(x, y) = xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - x - y$$



fonksiyonunun $x = 0$, $y = 0$, $2x^2 + y = 1$ ve $x + 2y^2 = 1$ ile belirli olan bölgede minimum değerini arayalım.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-y^2} - 1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\sqrt{1-x^2} - 1 = 0$$

şartlarından

$$\sqrt{1-y}(\sqrt{1-y}\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1+y}) = 0$$

$$\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1+x}) = 0$$

elde edilir. $\sqrt{1-y}\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1+y} = 0$ veya $y = 1$ olmalıdır. $y = 1$ ise, bu ikinci eşitlikte kullanılarak $x = 1$ veya $x = -1$ elde edilir. $x \geq 0$ olduğundan $(1, 1)$ çifti geçerlidir. Fakat bu nokta bölgeye dahil değildir. Diğer olasılıklar da incelenirse tek mümkün çözümün $(1, 1)$ olduğu anlaşılır. Şu halde minimumu bölgenin sınırlarında aramalıyız.

$$x = 0 \text{ olsun. } f(x, y) = \sqrt{1-y^2} - y \text{ ve}$$

$$0 \leq y \leq 1 \text{ için } \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} - 1 = 0$$

*Boğaziçi Üniversitesi Matematik Bölümü öğrencisi

olduğundan çözüm yok. $y = 0$ olunca da minimum adayı yok.

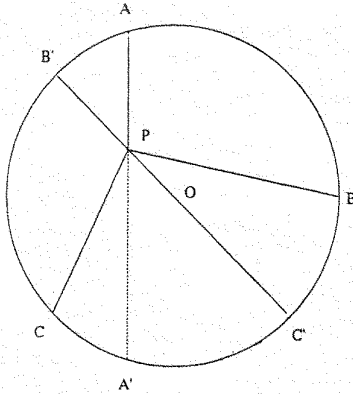
$2x^2 + y = 1$ olsun. $f(x, y) = -4x^3 + 2x^2 + 2x - 1$ ve $x \geq 0$ için $-6x^2 + 2x + 1 = 0$ olduğundan $x = \frac{1+\sqrt{7}}{6} \cong 0.6$ elde edilir. Bu bir minimum adaydır. Bu durumda $f(x, y) \cong 0.06$ bulunur. $x + 2y^2 = 1$ olunca da aynı duruma varılacaktır.

Son olarak da kritik noktalara bakalım. $f(0, 0) = 1$, $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = 0$, $f\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$, ve parabollerin kesim noktasında $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0$. Şu halde bu bölgede $f(x, y) \geq 0$ olduğunu gözlemiş olduk.

$R + r \leq \max\{h_a, h_b, h_c\}$ 'de eşitlik hali ABC eşkenar veya ikizkenar dik üçgenken sağlanacaktır.

Problem 2. Köşeleri birim çember üzerinde olan bir ABC üçgeninin içinde alınan bir P noktası için $PA \cdot PB \cdot PC < \frac{32}{27}$ olduğunu ve $\frac{32}{27}$ 'nin en iyi üst sınır olduğunu gösteriniz.

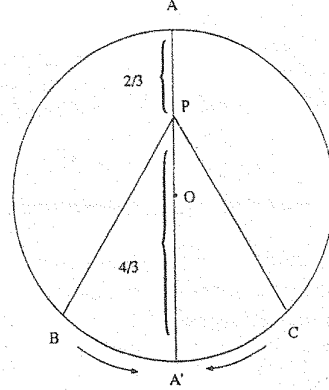
Çözüm. Birim çemberin içinde bir P noktası alalım ve P 'yi merkez O ile birleştirerek $B'C'$ çapını oluşturalım. Rasgele bir ABC üçgeni aldığımız zaman P , ABC 'nin içinde olduğundan A, B köşeleri çapın bir tarafına, C köşesi de çapın öteki tarafına düşecektir. Aynı nedenden dolayı C köşesi küçük $A'C'$ yayı üzerinde olamaz.



Kolayca $PC < PA'$ ve $PB < PC'$ olduğu görülebilir. $PB' = x$ alınarak,

$$PA \cdot PB \cdot PC < PA \cdot PA' \cdot PC' = x(2-x)^2$$

elde edilir. $f(x) = x(2-x)^2$ 'nin maksimumu $x = \frac{2}{3}$ 'te sağlanır ve $PA \cdot PB \cdot PC < f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{27}$ elde edilir. $\frac{32}{27}$ 'nin en iyi üst sınır olduğu aşağıdaki şekilden görülmektedir.



Problem 3. Bir ABC üçgeninde iç merkez I olsun. AI, BI, CI doğruları çevrel çemberi sırayla A', B' ve C' 'de kessin. $2(AI + BI + CI) \leq AA' + BB' + CC'$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. İspatını okuyucuya bırakacağımız şu teoreme bakalım.

AI, BI, CI doğruları, A', B', C' noktalarını köşe kabul eden üçgenin yükseklikleridir.

$B'C'$, AA' 'yi A'' 'de kessin. B'' ve C'' 'de benzer şekilde tanımlansın. Erdős-Mordell eşitsizliğine göre

$$2(AI'' + IB'' + IC'') \leq IA' + IB' + IC'$$

$2 \cdot IA'' = AI$, $2 \cdot IB'' = BI$, $2 \cdot IC'' = CI$ olduğunu kullanarak, $AI + BI + CI \leq IA' + IB' + IC'$ ve istenen $2(AI + BI + CI) \leq AA' + BB' + CC'$ 'yi elde ederiz.

Problem 4. a, b, c bir üçgenin kenarları, p, q, r ise pozitif sayılar olsun. S üçgenin alanı olmak üzere,

$$\frac{p}{q+r}a^2 + \frac{q}{p+r}b^2 + \frac{r}{p+q}c^2 \geq 2\sqrt{3}S$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $q+r = x$, $p+r = y$, $p+q = z$ alalım; x, y, z pozitifdir.

$$\frac{y+z-x}{x}a^2 + \frac{x+z-y}{y}b^2 + \frac{x+y-z}{z}c^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

olduğunu görmeliyiz. Böylece

$$\left(\frac{y}{x}a^2 + \frac{x}{y}b^2\right) + \left(\frac{z}{x}a^2 + \frac{x}{z}c^2\right) + \left(\frac{z}{y}b^2 + \frac{y}{z}c^2\right) - (a^2 + b^2 + c^2) \geq 4\sqrt{3}S.$$

$$\frac{y}{x}a^2 + \frac{x}{y}b^2 \geq 2ab, \text{ ve diğerleri için de yapılrırsa,}$$

$$2(ab + ac + bc) - (a^2 + b^2 + c^2) \geq 4\sqrt{3}S$$

olduğunu görmek yeterlidir.

$$ab + ac + bc = 2S \left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \right)$$

ve

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4S(\cot A + \cot B + \cot C)$$

olduğu gözönüne alınırsa,

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} - (\cot A + \cot B + \cot C) \geq \sqrt{3}$$

ve

$$\frac{1}{\sin \alpha} - \cot \alpha = \tan \frac{\alpha}{2}$$

olduğundan,

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$$

elde edilir. Bu son eşitsizliği okuyucuya bırakacağız.

Problem 5. Kenarları $a_i, b_i, c_i, i = 1, 2, \dots, n$, olan n tane üçgen göz önüne alınız. Yarıçevreleri v_i , çevrel ve içteğet çember yarıçapları R_i ve r_i olmak üzere,

$$3 \left[\prod_{i=1}^n a_i^{-\frac{1}{n}} + \prod_{i=1}^n b_i^{-\frac{1}{n}} + \prod_{i=1}^n c_i^{-\frac{1}{n}} \right] \leq \prod_{i=1}^n \left(\frac{v_i}{R_i r_i} \right)^{\frac{1}{n}}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $p_i, i = 1, 2, \dots, n$, çevreleri göstereyim. $\frac{v_i}{R_i r_i} = \frac{p_i^2}{a_i b_i c_i}$ olduğu kullanıldığında eşitsizlik

$$3 \left[\prod_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{n}} \prod_{i=1}^n b_i^{\frac{1}{n}} + \prod_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{n}} \prod_{i=1}^n c_i^{\frac{1}{n}} + \prod_{i=1}^n b_i^{\frac{1}{n}} \prod_{i=1}^n c_i^{\frac{1}{n}} \right] \leq \prod_{i=1}^n p_i^{\frac{2}{n}}$$

halini alır. p_i 'leri sabit tutalım. Böylece sağ taraf sabit kalacaktır. Sol taraf

$$3 \left[\prod_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{n}} \left(\prod_{i=1}^n b_i^{\frac{1}{n}} + \prod_{i=1}^n c_i^{\frac{1}{n}} \right) + \prod_{i=1}^n b_i^{\frac{1}{n}} \prod_{i=1}^n c_i^{\frac{1}{n}} \right]$$

şeklinde yazılabilir.

$$\prod_{i=1}^n b_i^{\frac{1}{n}} \prod_{i=1}^n c_i^{\frac{1}{n}} = \prod_{i=1}^n (b_i c_i)^{\frac{1}{n}}$$

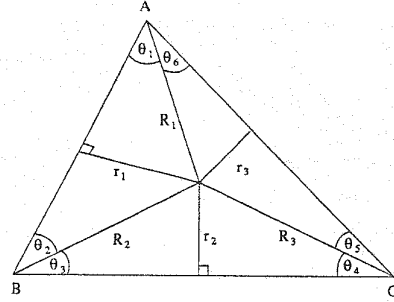
ifadesi $b_i = c_i$ olduğunda maksimumdur. Öte yandan

$$\prod_{i=1}^n b_i^{\frac{1}{n}} + \prod_{i=1}^n c_i^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (b_i + c_i) = \text{Sabit.}$$

Eşitlik yine $b_i = c_i$ iken vardır. a_i, b_i ve c_i simetrik olduğundan sol taraf $a_i = b_i = c_i$ olduğunda maksimum olur. Bu durum eşitlik halidir.

Problem 6. Bir üçgenin içinde alınan bir noktanın köşelere uzaklıkları R_1, R_2, R_3 , kenarlara uzaklıkları ise $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ olsun. $R_1 R_2 R_3 \geq 8\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Şekilden $R_1/R_2 = \sin \theta_2 / \sin \theta_1$ görülüyor. Diğerleri de yazılıp çarpılırsa $k = \sin \theta_1 \sin \theta_3 \sin \theta_5 = \sin \theta_2 \sin \theta_4 \sin \theta_6$ yazılabilir.



Öte yandan

$$\begin{aligned} \sin \theta_1 \sin \theta_6 &\leq \sin^2 \frac{A}{2} \\ \sin \theta_2 \sin \theta_3 &\leq \sin^2 \frac{B}{2} \\ \sin \theta_4 \sin \theta_5 &\leq \sin^2 \frac{C}{2} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri gösterilebilir. Bunlar çarpılıp,

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{\Gamma}{4R} \leq \frac{1}{8}$$

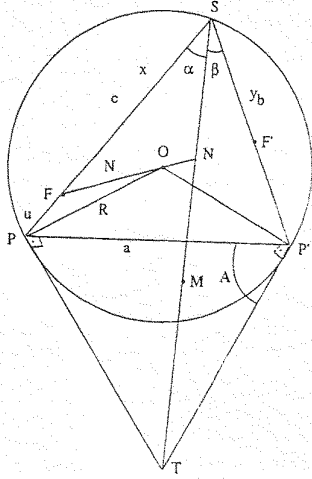
olduğu kullanılarak, $k^2 \leq \frac{1}{64}, k \leq \frac{1}{8}$ ve

$$k = \frac{\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3}{R_1 R_2 R_3}$$

olduğundan istenen elde edilir.

Problem 7. F ve F' bir çemberin içinde merkeze göre simetrik iki nokta olsun. S ise çember üzerinde, fakat FF' doğrusu üzerinde olmayan bir nokta olsun. SF' ve SF doğruları çemberi P' ve P 'de kessin. P ve P' deki teğetler T 'de kesişsin. FF' doğru parçasının orta dikmesinin ST 'nin orta noktasından geçtiğini gösteriniz.

Çözüm. Şekilde $SF = x$, $FP = uv$, $SF' = y$, $F'P' = v$, ayrıca $x + u = c$, $y + v = b$, $PP' = a$, açılar için $\alpha + \beta = A$, $\sphericalangle SPP' = B$, $\sphericalangle SP'P = C$ alınmıştır. M , ST 'nin ortasıdır. İsteneni göstermek için $FM = F'M$ olduğunu göstereceğiz.



$$\begin{aligned} \overline{FM}^2 &= x^2 + \overline{MS}^2 - 2x\overline{MS} \cos \alpha, \\ \overline{F'M}^2 &= y^2 + \overline{MS}^2 - 2y\overline{MS} \cos \beta; \end{aligned}$$

şu halde aşağıda

$$x^2 - y^2 = 2x\overline{MS} \cos \alpha - 2y\overline{MS} \cos \beta$$

olduğunu görmeliyiz.

Çemberde kuvvetten $x(c-x) = y(b-y)$ olduğundan $cx - by = x^2 - y^2$ olur. Böylece is-

tenen

$$\begin{aligned} cx - by &= 2x\overline{MS} \cos \alpha - 2y\overline{MS} \cos \beta, \\ \frac{x}{y} &= \frac{2\overline{MS} \cos \beta - b}{2\overline{MS} \cos \alpha - c}, \\ \frac{x}{y} &= \frac{v}{u} \end{aligned}$$

dur. Ayrıca $\frac{v}{u} = \frac{\cos B}{\cos C}$ olduğu kolayca görülebilir. Şu halde istenen

$$\frac{\cos B}{\cos C} = \frac{2\overline{MS} \cos \beta - b}{2\overline{MS} \cos \alpha - c}$$

Öte yandan,

$$2\overline{MS} \cos \beta = \frac{ST^2 + b^2 - \frac{a^2}{4 \cos^2 A}}{2b}$$

ve $2\overline{MS} \cos \alpha$ 'da benzer şekilde yazılırsa istenen

$$\frac{\overline{ST}^2 - b^2 - \frac{a^2}{4 \cos^2 A}}{\overline{ST}^2 - c^2 - \frac{a^2}{4 \cos^2 A}} \frac{c}{b} = \frac{\cos B}{\cos C}$$

olur. Son olarak,

$$\begin{aligned} \overline{ST}^2 &= b^2 + \frac{a^2}{4 \cos^2 A} + ab \frac{\cos B}{\cos A} \\ &= c^2 + \frac{a^2}{4 \cos^2 A} + ac \frac{\cos C}{\cos A} \end{aligned}$$

olduğu kullanılırsa,

$$\frac{\frac{ab \cos B}{\cos A} c}{\frac{ac \cos C}{\cos A} b} = \frac{\cos B}{\cos C}$$

elde edilir. Dolayısıyla $FM^2 = F'M^2$ ve $FM = F'M$ 'dir.

Not. Bu problem Hüseyin Demir ve Cem Tezer tarafından *American Mathematical Monthly*'de 1991 yılında Problem E3422 olarak yayımlandı. Problemin aslında F' ve F 'nin çemberin içinde olması gerekmiyor. F' ve F çemberin dışındayken de benzer bir ispat yapılabileceğini umuyorum. Fakat şu an bunu başaramadığım için probleme içinde olma koşulunu ekledim. F' ve F dışarıdayken çizim farklı olduğundan herşeyi yeniden düzenlemek gerekiyor.