

# MEKANİK KAVRAMLARININ GEOMETRİ PROBLEMLERİNE UYGULANMASI

Mehmet Tagiyev & Belgin Mazlumoğlu \*

*Bana bir destek noktası verin; dünyayı yerinden oynatayım.*

Arşimet

## 1. Temel Kavramlar ve Örnekler

M.Ö. 3. yüzyılda yaşamış olan Arşimet, mekaniğin sade ve açık bir kavramı olan ağırlık merkezini geometri problemlerinin çözümünde ustalıkla kullanmıştır. Bu yazımızda Arşimet'in metodu nasıl kullandığını inceleyeceğiz.

Ağırlık merkezi kavramını ve onun özelliklerinin ciddi matematiksel tanımlarını vermeden önce, ağırlık merkezinin sezgisel olarak açık olan manasını anlatalım.

Aşağıda, tamamen mekanik düşüncelerden doğan maddesel nokta, maddesel noktalar sistemi, kütle, v.s., gibi terimleri kullanacağız. *Maddesel nokta* denilince anlaşılması gereken, kütlesi çok küçük hacimde toplanmış cisim olmalıdır; veya kütle ile teçhiz edilmiş geometrik bir nokta anlaşılmalıdır. Eğer  $A$  noktası bir  $m$  kütlesi ile teçhiz edilmişse, bunu  $(m, A)$  veya  $mA$  şeklinde göstereceğiz.  $A_1, A_2, \dots, A_n$  noktalar sistemi sırasıyla  $m_1, m_2, \dots, m_n$  kütleleriyle teçhiz olunmuşsa bunu  $(m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_nA_n)$  şeklinde göstereceğiz.

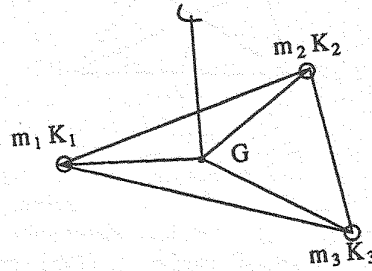
Kütleleri  $m_1$  ve  $m_2$  olan iki küçük  $K_1$  ve  $K_2$  kürelerini gözönüne alalım ve onların kütlesiz sert bir çubuk vasıtasıyla birleştirildiklerini farzedelim. O zaman bu çubuğun üzerinde öyle bir  $G$  noktası vardır ki, çubuk bu noktadan asıldığında küreler dengede kalır (Şekil 1).  $G$ 'nin bu sistemin ağırlık merkezi olduğunu mekanikten biliyoruz.



Şekil 1

Şimdi kütleleri  $m_1, m_2, m_3$  olan ve doğru-

sal olmayan  $K_1, K_2, K_3$  kürelerinin kütlesiz sert çubuklar yardımıyla (Şekil 2) birleştirildiğini farzedelim. Bu durumda  $K_1K_2K_3$  üçgeninde öyle bir  $G$  noktası vardır ki sistem bu noktadan asıldığında dengede kalır.  $K_1K_2K_3$  üçgeninin bu özel noktasına  $(m_1K_1, m_2K_2, m_3K_3)$  sisteminin ağırlık merkezi denir.



Şekil 2

Maddesel noktaları herhangi bir sayıda alıp, oluşan sistemin ağırlık merkezini bulmak mümkündür. Şimdilik  $(m_1K_1, m_2K_2, m_3K_3)$  sistemiyle yetinelim ve ağırlık merkezinin sezgisel olarak açık olan aşağıdaki özelliklerini kabul edelim:

- (G1) Herhangi  $(m_1K_1, m_2K_2, m_3K_3)$  sisteminin tek bir ağırlık merkezi vardır.
- (G2)  $(m_1K_1, m_2K_2)$  sisteminin ağırlık merkezi  $G$ , bu noktaları birleştiren doğru parçasının üzerindedir ve bu noktanın yeri Arşimet'in ünlü "kol kuralı" ile bulunabilir:

$$m_1d_1 = m_2d_2$$

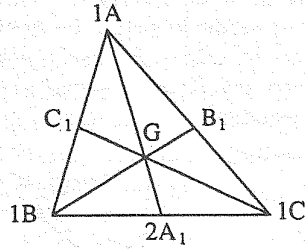
- (G3) Eğer  $(m_1K_1, m_2K_2, m_3K_3)$  sisteminde herhangi iki noktayı (örneğin  $m_1K_1, m_2K_2$  noktalarını) ayırıp onların ağırlık merkezi olan  $G_1$  noktasına  $m_1 + m_2$  kütlelerini yerleştirirsek, yani  $(m_1K_1, m_2K_2)$  alt sistemi yerine  $((m_1 + m_2)G_1)$  sistemini yazarsak, şimdi elde ettiğimiz  $((m_1 +$

\* Mimar Sinan Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyeleri

$m_2)G_1, m_3K_3)$  sisteminin ağırlık merkezi ile  $(m_1K_1, m_2K_2, m_3K_3)$  sisteminin ağırlık merkezi aynıdır.

Teori bu kadar. Şimdi mekaniğin basit ve açık gerçeklerinden kaynaklanan bu teori ile aşağıdaki geometri problemlerini çözelim. İlk önce bir üçgenin kenarortaylarının özelliklerini bulalım.

**Teorem 1.** (Arşimet, M.Ö. 3. yy) Herhangi bir üçgenin üç kenarortayı bir noktada kesişirler ve kesişme noktasında 2:1 oranında bölünürler.



Şekil 3

**Kanıt.**  $ABC$  üçgeninin  $A, B, C$  tepe noktalarına 1'er birim kütle yerleştirelim. (G1) özelliğine göre  $(1A, 1B, 1C)$  sisteminin tek bir  $G$  ağırlık merkezi vardır. (G3) özelliğine göre  $(1B, 1C)$  sisteminin toplam kütlelerini onların ağırlık merkezine yerleştirirsek tüm sistemin ağırlık merkezi değişmez.  $B$  ve  $C$  noktalarının kütlesi aynı olduğundan (G2)'ye göre onların ağırlık merkezi  $BC$ 'nin orta noktası olacaktır:

$$1 \times |BA_1| = 1 \times |A_1C| \quad (\text{kol kuralı}).$$

$A_1$  noktasına  $B$  ve  $C$  noktalarının toplam kütleleri olan  $1 + 1 = 2$  birim kütleleri yerleştirerek  $(1A, 2A_1)$  sistemine bakalım. O zaman  $(1A, 2A_1)$  sisteminin ağırlık merkezi ile  $(1A_1, 1B, 1C)$  sisteminin ağırlık merkezi aynı olacaktır.  $(1A, 2B)$  sisteminin ağırlık merkezi  $AA_1$  doğru parçası üzerindedir ve gene kol kuralını kullanarak

$$1 \times |AG| = 2 \times |GA_1|$$

ve buradan da

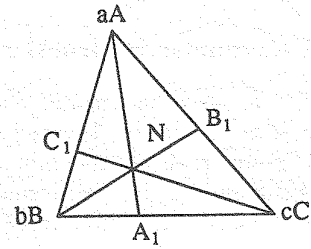
$$|AG| : |GA_1| = 2 : 1$$

buluruz.

Benzer olarak,  $1A$  ve  $1B$  noktalarının ağırlık merkezi  $2C_1$  noktasıdır ve  $(2C_1, 1C)$  sistemi ile tüm  $(1A, 1B, 1C)$  sisteminin ağırlık merkezi de yine  $G$  noktası olmak zorundadır. Bu durumda  $G \in [CC_1]$  ve  $|CG| : |GC_1| = 2 : 1$

elde ederiz. Aynı metotla  $G \in [BB_1]$  ve  $|BG| : |GB_1| = 2 : 1$  olduğunu görmek çok kolaydır. Böylelikle  $G \in [AA_1] \cap [BB_1] \cap [CC_1]$  olduğunu anlarız ki bu da bize kenarortayların bir noktada kesiştiklerini ve birbirlerini 2 : 1 oranında böldüklerini gösterir.

**Teorem 2.** Herhangi bir  $ABC$  üçgeninde  $[AA_1]$ ,  $[BB_1]$ ,  $[CC_1]$  açıortayları bir  $N$  noktasında kesişirler ve birbirlerini  $|AN| : |NA_1| = (b + c) : a$ ,  $|BN| : |NB_1| = (a + b) : b$ ,  $|CN| : |NC_1| = (b + a) : c$  oranlarında bölerler.



Şekil 4

**Kanıt.**  $A, B, C$  noktalarına sırasıyla  $a, b, c$  kütlelerini yerleştirelim ve  $(aA, bB, cC)$  sistemine bakalım. Bu sistemin (G1) özelliğine göre tek bir ağırlık merkezi vardır. (G3) özelliğine göre  $B$  ve  $C$  noktalarının ağırlık merkezini bulup oraya bu noktaların toplam kütlelerini yerleştirirsek sistemin ağırlık merkezi değişmez.  $(bB, cC)$  sisteminin ağırlık merkezi  $A_1$  noktasıdır. Gerçekten de bu noktada Arşimet'in kol kuralı sağlanır:

$$b \times |BA_1| = c \times |A_1C|.$$

(Üçgende açıortay teoremini hatırlayalım!) Şimdi  $(aA, (b + c)A_1)$  sistemine baktığımızda tüm  $(aA, bB, cC)$  sisteminin ağırlık merkezinin  $[AA_1]$  doğru parçası üzerinde olduğunu görürüz; yani  $N \in [AA_1]$ . Şimdi de  $(aA, (b + c)A_1)$  sistemine kol kuralı uygularsak

$$(b + c) \times |NA_1| = a \times |AN|,$$

buradan da

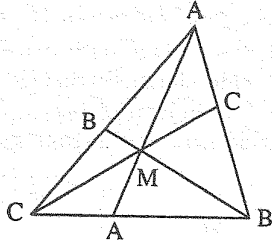
$$|AN| : |NA_1| = (b + c) : a$$

olduğunu görürüz. Benzer olarak  $N \in [BB_1]$  ve  $N \in [CC_1]$  olduğu kolaylıkla kanıtlanabilir. Bu da açıortayların bir noktada kesiştiğini ve yukarıda verilen oranları sağladığını göstermiş olur.

**Not 1.** Üçgenin açıortaylarının kesişme noktasının içteğet çemberin merkezi olduğu bilinen bir gerçektir. Yukarıda kanıtladığımız teoremden ise şöyle bir sonuç daha çıkmaktadır: “Eğer  $ABC$  üçgeninin tepe noktalarına sırasıyla  $a, b, c$  kütleleri yerleştirilirse elde edilen sistemin ağırlık merkezi içteğet çemberin merkezi olur.”

**Örnek.**  $ABC$  üçgeninin içindeki bir  $M$  noktasını üçgenin  $A, B, C$  köşelerine birleştiren  $[AA_1], [BB_1], [CC_1]$  doğruları çizilmiştir.  $|AC_1| : |C_1B| = p$  ve  $|AB_1| : |BC| = q$  olsun. Bu durumda  $|AM| : |MA_1| = p+q$  olduğunu gösteriniz.

**Çözüm.**  $ABC$  üçgeninin  $A, B, C$  köşelerine sırasıyla  $1, p$  ve  $q$  yüklerini yerleştirelim; yani  $(1A, pB, qC)$  sistemine bakalım. Bu sistemin ağırlık merkezi  $M$  noktasıdır.



Şekil 5

Gerçekten de  $|AC_1| : |C_1B| = p$  ise  $(1A, pB)$  sisteminin ağırlık merkezi  $1+p$  kütleli  $C_1$  noktasıdır. (G3) özelliğine göre  $(1A, pB, qC)$  ve  $((1+p)C_1, qC)$  sistemlerinin ağırlık merkezleri aynıdır.  $((1+p)C_1, qC)$  sisteminin ağırlık merkezi (G2)'ye göre  $[CC_1]$  üzerindedir. Benzer olarak  $(1A, pB, qC)$  sisteminin ağırlık merkezi  $[BB_1]$  üzerindedir, yani ağırlık merkezi  $[CC_1]$  ve  $[BB_1]$  doğru parçalarının kesişme noktası olan  $M$  noktasındadır.  $A_1$  noktasına  $p+q$  kütle yerleştirirsek  $M$  noktası aynı zamanda  $(1A, (p+q)A_1)$  sisteminin de ağırlık merkezi olur. (G2)'ye göre

$$(p+q) \times |MA_1| = 1 \times |AM|$$

ve buradan da  $|AM| : |MA_1| = p+q$  olduğu kanıtlanmış olur.

**Soru.** Yukarıdaki problemde  $M$  noktası  $[BB_1]$  ve  $[CC_1]$  doğru parçalarını hangi oranda böler?

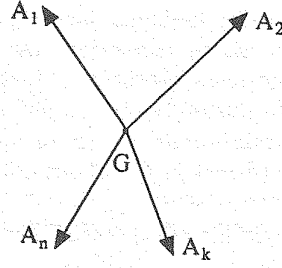
## 2. Ağırlık Merkezinin Özellikleri

Ağırlık merkezinin matematiksel tanımını verelim ve kanıtlayalım ki herhangi bir maddesel

noktalar sisteminin ağırlık merkezi gerçekten de (G1), (G2) ve (G3) özelliklerine sahiptir.

Negatif kütleli bir maddesel noktaya fiziksel bir mana vermek güç olmasına rağmen biz tanımımızı yaparken kütlelerin herhangi bir reel sayı olmasına izin vereceğiz. Kütleli  $m$  olan bir maddesel  $A$  noktasını biz matematiksel anlamda  $m$  reel sayısı ve bir  $A$  noktası olarak düşüneceğiz. Yukarıda olduğu gibi  $m$  kütleli maddesel bir  $A$  noktasını  $mA$  ile göstereceğiz.

**Tanım.**  $m_1A_1, \dots, m_nA_n, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{R}, m_1 + \dots + m_n \neq 0$  sistemi verilmiş olsun.  $m_1G\vec{A}_1 + \dots + m_nG\vec{A}_n = \vec{0}$  şartını sağlayan bir  $G$  noktasına bu sistemin ağırlık merkezi denir ve  $m_1, \dots, m_n$  sayılarına da  $G$  ağırlık merkezinin  $A_1, \dots, A_n$  sistemine göre barisentrik koordinatları adı verilir.



Şekil 6

**Teorem 3.**  $G$  noktasının  $(m_1A_1, \dots, m_nA_n)$  sisteminin ağırlık merkezi olması için gerek ve yeter şart herhangi bir  $O$  noktası için

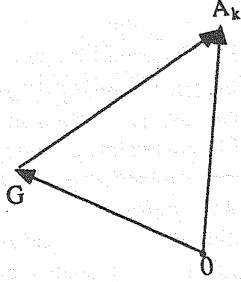
$$(m_1O\vec{A}_1 + \dots + m_nO\vec{A}_n) : (m_1 + \dots + m_n) = O\vec{G} \quad (1)$$

olmasıdır.

**Kanıt.**  $G$  noktası  $(m_1A_1, \dots, m_nA_n)$  sisteminin ağırlık merkezi olsun. Bu durumda

$$m_1G\vec{A}_1 + \dots + m_nG\vec{A}_n = \vec{0} \quad (2)$$

olur.  $k = 1, 2, \dots, n$  için  $G\vec{A}_k = O\vec{A}_k - O\vec{G}$  olduğundan bu eşitliği (2) için kullanırsak  $m_1(O\vec{A}_1 - O\vec{G}) + \dots + m_n(O\vec{A}_n - O\vec{G}) = \vec{0}$ , ve  $m_1O\vec{A}_1 + \dots + m_nO\vec{A}_n = (m_1 + \dots + m_n)O\vec{G}$  bulunur.



Şekil 7

$m_1 + \dots + m_n \neq 0$  olduğuna göre  $(m_1 \vec{OA}_1 + \dots + m_n \vec{OA}_n) : (m_1 + \dots + m_n) = \vec{OG}$  yazılabilir. Teoremin bir yönde söylediği de budur.

Diğer taraftan, eğer bir  $G$  noktası için (1) eşitliği sağlanıyorsa yukarıda yaptıklarımızı ters sıra ile tekrar edersek  $G$  noktasının ağırlık merkezi olduğunu görürüz.

Bu teoremden, toplam kütlesi sıfır olmamak kaydıyla, herhangi bir  $(m_1 A_1, \dots, m_n A_n)$  sisteminin ağırlık merkezinin var ve tek olduğu derhal anlaşılır. Gerçekten,  $O$  herhangi bir nokta olsun. Bu durumda (1) formülü ile tanımlanan bir  $\vec{OG}$  vektörünün varlığı ortaya çıkar ve bu vektör de (demek ki  $G$  noktası da) tek bir şekilde belirlenir.

Böylelikle (G1) özelliği kanıtlanmış oldu.

**Teorem 4.** İki noktadan oluşan  $(m_1 A_1, m_2 A_2)$  sisteminin ağırlık merkezi  $G$ , bu noktaları birleştiren doğru parçasının üzerindedir ve bu noktanın yeri "kol kuralı" ile bulunabilir:

$$|m_1| \cdot |GA_1| = |m_2| \cdot |GA_2|$$



Şekil 8

**Kanıt.**  $G$  noktası  $(m_1 A_1, m_2 A_2)$  sisteminin Teorem 3'e göre var ve tek olan ağırlık merkezi olsun. Tanıma göre  $m_1 \vec{GA}_1 + m_2 \vec{GA}_2 = \vec{0}$ 'dan

$$m_1 \vec{GA}_1 = -m_2 \vec{GA}_2 \quad (3)$$

bulunur. Buradan da  $|m_1| \cdot |GA_1| = |m_2| \cdot |GA_2|$  elde ederiz. Başka bir deyişle  $|m_1| \cdot d_1 = |m_2| \cdot d_2$  yazabiliriz.

**Not 2.** (3) numaralı eşitlikten kolayca görüldüğü gibi, eğer  $m_1 m_2 > 0$  olursa  $G$  noktası  $[A_1 A_2]$  doğru parçasının içinde,  $m_1 m_2 < 0$  olursa dışındadır.

Bu teorem ile (G2) de kanıtlanmış oldu.

**Teorem 5.**  $(m_1 A_1, \dots, m_n A_n)$  sisteminde,  $k$  tane noktadan oluşan  $(m_1 A_1, \dots, m_k A_k)$  altsisitemini ayıralım. Bu noktaların ağırlık merkezi  $G_1$  olsun. Bu noktaların toplam kütlelerini  $m_1 + \dots + m_k \neq 0$  olmak şartıyla  $G_1$  noktasına koyalım.  $(G_1(m_1 + \dots + m_k), m_{k+1} A_{k+1}, \dots, m_n A_n)$  sistemi ile  $(m_1 A_1, \dots, m_n A_n)$  sisteminin ağırlık merkezleri aynıdır.

**Kanıt.**  $G$  noktası  $(m_1 A_1, \dots, m_n A_n)$  sisteminin ağırlık merkezi olsun. O zaman  $m_1 \vec{GA}_1 + \dots + m_n \vec{GA}_n = \vec{0}$  olur. Şimdi de  $(m_1 A_1, \dots, m_k A_k)$  altsisitemini düşünelim. Bu sistemin ağırlık merkezi de  $G_1$  olsun. Teorem 3'e göre

$$m_1 \vec{GA}_1 + \dots + m_k \vec{GA}_k = (m_1 + \dots + m_k) \vec{GG}_1 \quad (4)$$

olmalıdır.  $m_1 \vec{GA}_1 + \dots + m_k \vec{GA}_k + m_{k+1} \vec{GA}_{k+1} + \dots + m_n \vec{GA}_n = \vec{0}$  ifadesinde (4) eşitliğini kullanırsak  $(m_1 + \dots + m_k) \vec{GG}_1 + m_{k+1} \vec{GA}_{k+1} + \dots + m_n \vec{GA}_n = \vec{0}$  elde ederiz. Bu da bize  $G$  noktasının  $(G_1(m_1 + \dots + m_k), m_{k+1} A_{k+1}, \dots, m_n A_n)$  sisteminin ağırlık merkezi olduğunu gösterir.

### 3. Uygulamalar

Aşağıdaki alıştırmalar geometri problemlerinin çözümünde çok faydalı olabilirler; bunların kanıtlanmasını okuyucuya bırakıyoruz.

**Alıştırma 1.**  $(m_1 A_1, \dots, m_n A_n)$  sistemindeki bütün noktaların kütleleri aynı bir  $k$  sabitiyle çarpılırsa, sistemin ağırlık merkezi değişmez.

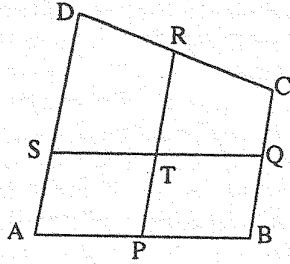
**Alıştırma 2.**  $G$  noktası  $(m_1 A, m_2 B, m_3 C)$  sisteminin ağırlık merkezi ise,  $AG$  doğrusu  $BC$  kenarını  $(m_2 B, m_3 C)$  sisteminin ağırlık merkezi olan  $A_1$  noktasında keser.

**Alıştırma 3.**  $(m_1 A_1, \dots, m_n A_n)$  sisteminde herhangi bir noktanın kütlelerini "parçalarsak" sistemin ağırlık merkezi değişmez. Örneğin  $m_1 = m_{11} + \dots + m_{1k}$  şeklinde parçalanırsa,  $(m_{11} A_1, \dots, m_{1k} A_1, m_2 A_2, \dots, m_n A_n)$  sistemi ile  $(m_1 A_1, \dots, m_n A_n)$  sisteminin ağırlık merkezi aynıdır.

**Alıştırma 4.** Eğer bir  $G$  noktası hem  $(m_1 A_1, m_2 A_2, \dots, m_n A_n)$  sisteminin, hem de  $(p_1 B_1, p_2 A_2, \dots, p_k B_k)$  sisteminin ağırlık merkezi ise, bu  $G$  noktası aynı zamanda bütün  $(m_1 A_1, \dots, m_n A_n, p_1 B_1, \dots, p_k B_k)$  sisteminin ağırlık merkezidir.

**Alıştırma 5.** Not 1'de  $ABC$  üçgeninin iç-teğet çemberinin merkezini,  $(aA, bB, cC)$  sisteminin ağırlık merkezi olduğunu gördük.  $ABC$  üçgeninin  $a$  kenarına ait dışteğet çemberinin (yani  $[BC]$  kenarına teğet ve  $[AB]$  ve  $[AC]$ 'nin de uzantılarına teğet olan çemberin) merkezini  $(aA, -bB, -cC)$  sisteminin ağırlık merkezi olduğunu gösteriniz.

**Problem 1.** (*Matematik Dünyası, problem Y28*) Bir  $ABCD$  dışbükey dörtgeni üzerinde  $\lambda = |PA| : |PB| = |RD| : |DC|$  ve  $\mu = |QB| : |QC| = |SA| : |SD|$  olmak üzere  $P, Q, R, S$  noktaları alınıyor.  $[PR]$  ve  $[QS]$  doğruları  $T$  noktasında kesişiyorsa,  $|TS| : |TQ| = \lambda$  ve  $|TP| : |TR| = \mu$  olduğunu gösteriniz.



Şekil 9

**Çözüm.**  $A, B, D, C$  noktalarına sırasıyla  $1, \lambda, \mu$  ve  $\lambda\mu$  yüklerini yerleştirelim ve  $(1A, \lambda B, \mu D, \lambda\mu C)$  sistemine bakalım.  $|PA| = \lambda|AB|$  olduğundan  $(G2)$  özelliğine göre  $(1A, \lambda B)$  sisteminin ağırlık merkezi  $1 + \lambda$  kütleli  $P$  noktası olacaktır. Bunu şöyle gösterebiliriz:

$$(1 + \lambda)P = (1A, \lambda B).$$

Benzer olarak  $(\mu D, \lambda\mu C)$  sisteminin ağırlık merkezi  $\mu + \lambda\mu$  kütleli  $R$  noktası olacaktır:

$$(\mu + \lambda\mu)R = (\mu D, \lambda\mu C).$$

O zaman  $(1A, \lambda B, \mu D, \lambda\mu C)$  sisteminin ağırlık merkezi  $[RP]$  doğru parçası üzerindedir ve  $(G2)$ 'ye göre

$$(\mu + \lambda\mu)|GR| = (1 + \lambda)|GP|$$

veya

$$|GP| : |GR| = (\mu + \lambda\mu) : (1 + \lambda) = \mu$$

elde ederiz. Şimdi  $(1A, \lambda B, \mu D, \lambda\mu C)$  sistemini  $(1A, \mu D)$  ve  $(\lambda B, \lambda\mu C)$  alt sistemlerine ayırıp

ağırlık merkezimizi bir de bu şekilde bulalım.  $(1A, \mu D)$  sisteminin ağırlık merkezi  $1 + \mu$  kütleli  $S$  noktası,  $(\lambda B, \lambda\mu C)$  sisteminin ağırlık merkezi ise  $\lambda + \lambda\mu$  kütleli  $Q$  noktası olur. Bu durumda tüm sistemin ağırlık merkezi  $G$ ,  $[SQ]$  doğru parçası üzerindedir ve  $(G2)$ 'ye göre

$$(1 + \mu)|GS| = (\lambda + \lambda\mu)|GQ|$$

veya

$$|GS| : |GQ| = (\lambda + \lambda\mu) : (1 + \mu) = \lambda$$

elde ederiz. Böylece  $(1A, \lambda B, \mu D, \lambda\mu C)$  sisteminin ağırlık merkezi  $[RP]$  ve  $[SQ]$  doğru parçalarının üzerinde olmalıdır. Bu da  $G$  noktasının bu iki doğru parçasının ortak noktası olan  $T$  noktası olduğunu gösterir. Dolayısıyla  $T = G$  yazarsak istenilenin kanıtlanmış olduğu görülür.

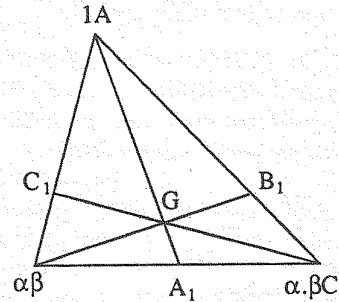
**Problem 2.** Eğer  $G$  noktası  $ABC$  üçgeninin içinde herhangi bir nokta ise,  $A, B, C$  köşelerine sırasıyla öyle  $m_1, m_2, m_3$  kütleleri yerleştiriniz ki  $G$  noktası  $(m_1A, m_2B, m_3C)$  sisteminin ağırlık merkezi olsun.

**Çözüm.**  $A$  ve  $G$  noktalarından geçen ve  $BC$  kenarını  $A_1$  noktasında kesen  $AA_1$  doğrusunu çizelim.  $|BA_1| = d_1, |CA_1| = d_2, |AG| = d_3, |GA_1| = d_4$  olsun.  $d_1d_4 + d_2d_4 = m_1, d_3d_2 = m_1, d_1d_3 = m_3$  olsun. Bu durumda  $A_1$  noktası  $(m_2B, m_3C)$  sisteminin ağırlık merkezi,  $G$  noktası ise  $(m_1A, m_2B, m_3C)$  sisteminin ağırlık merkezi olur.

**Problem 3.** (*Seva Teoremi*)  $ABC$  üçgeninin  $[BC], [CA]$  ve  $[AB]$  kenarları üzerinde sırasıyla  $A_1, B_1, C_1$  noktaları alınıyor.

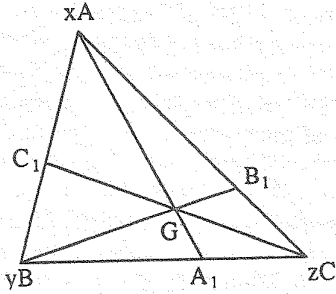
$$\frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} \cdot \frac{|AC_1|}{|C_1B|} = 1 \quad (5)$$

olduğuna göre,  $AA_1, BB_1, CC_1$  doğrularının bir noktada kesiştiğini gösteriniz.



**Çözüm.**  $|AC_1| : |C_1B| = \alpha$ ,  $|BA_1| : |A_1C| = \beta$ ,  $|CB_1| : |B_1A| = \gamma$  olsun. Verilen şarta göre  $\alpha\beta\gamma = 1$  olur.  $A, B, C$  noktalarına sırasıyla  $1, \alpha, \alpha\beta$  yüklerini yerleştirip,  $(1A, \alpha B, \alpha\beta C)$  sistemini gözönüne alalım.  $|AC_1| = \alpha|C_1B|$  olduğundan,  $C_1$  noktası  $(1A, \alpha B)$  sisteminin ağırlık merkezi olur. Benzer şekilde  $A_1$  noktası  $(\alpha\beta, \alpha\beta C)$  sisteminin ve  $B_1$  noktası da  $(1A, \alpha B, \alpha\beta C)$  sisteminin ağırlık merkezi olur.  $(1A, \alpha B, \alpha\beta C)$  sisteminin ağırlık merkezini  $G$  ile gösterelim. Ağırlık merkezi olan  $G$ , hem  $[AA_1]$ , hem  $[BB_1]$ , hem de  $[CC_1]$  doğru parçalarının üzerinde olmalıdır. Bu bize bu doğru parçalarının bir noktada ( $G$  noktasında) kesiştiğini gösterir.

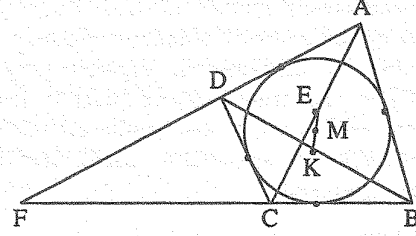
**Problem 4.** (Seva Teoremi'nin tersi) Eğer herhangi bir  $ABC$  üçgeninde  $[AA_1]$ ,  $[BB_1]$ ,  $[CC_1]$  doğruları bir noktada kesişiyorsa, Problem 3'te verilen (5) koşulu sağlanır.



**Çözüm.**  $[AA_1]$ ,  $[BB_1]$ ,  $[CC_1]$  doğrularının bir  $G$  noktasında kesiştiklerini farzedelim.  $A, B, C$  noktalarına,  $G$  noktasını sistemin ağırlık merkezi yapacak şekilde, sırasıyla  $x, y, z$  kütlelerini yerleştirelim. (Bunun mümkün olduğunu Problem 2'den biliyoruz.) O zaman  $G$ 'den geçen  $[AA_1]$  doğrusu  $[BC]$  kenarını ( $yB, zC$ ) sisteminin ağırlık merkezi olan  $A_1$  noktasında keser. (G2) özelliğine göre  $A_1$  noktasında  $y|BA_1| = z|A_1C|$  bağıntısı vardır. Benzer şekilde  $|AC_1| = y|C_1B|$  ve  $x|B_1A| = z|B_1C|$  bağıntılarını kolaylıkla bulabiliriz. Buradan  $|BA_1| : |A_1C| = z : y$ ,  $|AC_1| : |C_1B| = y : x$  ve  $|B_1A| : |B_1C| = x : z$  elde ederiz. Bu üç eşitliği taraf tarafa çarparsak Seva şartının sağlandığını görürüz.

**Problem 5.** (Newton Teoremi)  $ABCD$  teğetler dörtgeninin içteğet çemberinin merkezi, bu dörtgenin köşegenlerinin orta noktalarını birleştiren doğru parçasının üzerindedir.

**Çözüm.**  $M$  noktası çemberin merkezi,  $F$  noktası ise  $[BC]$  ve  $[AD]$  kenarlarının uzantılarının kesişme noktası ve  $E, K$  noktaları da  $[AC]$  ve  $[BD]$  köşegenlerinin orta noktaları olsun.



Şekil 12

Baktığımız çember  $ABF$  üçgeninin içteğet çemberi olduğu için bu çemberin merkezi olan  $M$  noktası,  $m_1 = |BF|$ ,  $m_2 = |AF|$ ,  $m_3 = |AB|$  alınırsa  $(m_1A, m_2B, m_3F)$  sisteminin ağırlık merkezi olur (Not 1). Bu çember aynı zamanda  $DCF$  üçgeninin  $f$  kenarına ait dışteğet çemberi olduğu için,  $M$  noktası aynı zamanda  $(m_4C, m_5D, m_6F)$  sisteminin de ağırlık merkezi olur ( $m_4 = -|DF|$ ,  $m_5 = -|CF|$ ,  $m_6 = |CD|$ , Alıştırma 5). Dolayısıyla  $M$  noktası  $(m_1A, m_2B, m_3F, m_4C, m_5D, m_6F)$  sisteminin ağırlık merkezi olur (Alıştırma 4). Diğer taraftan  $m_3 + m_6 = m_1 + m_2 + m_4 + m_5$  olduğundan ( $ABCD$  kirisler dörtgeni),  $|AB| + |DC| = |AD| + |BC|$  eşitliğini elde ederiz.  $F$  noktasına baktığımızda bu noktanın hem  $(m_1C, m_5B)$ , hem de  $(m_2D, m_4A)$  sisteminin ağırlık merkezi olduğunu görürüz. Yani  $F$  noktası  $(m_1C, m_5B, m_2D, m_4A)$  sisteminin ağırlık merkezidir.

Böylece kütleli parçalama (Alıştırma 3) fikrini kullanarak  $M$  noktasının aşağıda yazdığımız sistemlerin ağırlık merkezi olduğunu görürüz: ( $M = (aA, bB)$  şeklindeki bir eşitliği, " $M$  noktası  $(aA, bB)$  sisteminin ağırlık merkezidir" manasında kullanacağız.)

$$\begin{aligned} M &= (m_1A, m_2B, m_3F, m_4C, m_5D, m_6F) \\ &= (m_1A, m_2B, m_4C, m_5D, (m_3 + m_6)F) \\ &= (m_1A, m_2B, m_4C, m_5D, m_4A, m_5B, \\ &\quad m_1C, m_2D) \\ &= ((m_1 + m_4)A, (m_1 + m_4)C, \\ &\quad (m_2 + m_5)B, (m_5 + m_2)D) \\ &= (2(m_1 + m_4)E, 2(m_2 + m_5)K) \end{aligned}$$

Böylece  $M$  noktasının kütlesi  $2(m_1 + m_4)$  olan  $E$  ile, kütlesi  $2(m_2 + m_5)$  olan  $K$  noktasının ağırlık merkezi olduğunu görürüz. (G2) özelliğine göre  $M$  noktası  $E$  ve  $K$  noktalarını birleştiren doğru parçası üzerindedir.