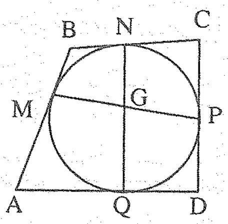
4. Problemler

Aşağıdaki problemleri önce alıştığınız yolla çözmeye çalışınız. Sonra bu yazıda kullanılan metotlarla çözünüz. Mekanik kavramlarının kolaylıklar sağladığını göreceksiniz.

1. ABC üçgeninin ağırlık merkezinin, çevrel çemberinin merkezi olması için, A, B, C köşelerine yerleştirilmesi gereken kütle miktarlarını bulunuz.

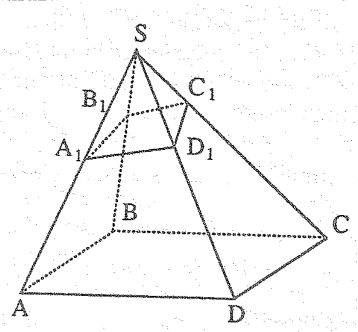
2. Herhangi bir üçgenin yüksekliklerinin bir noktada kesiştiklerini gösteriniz.



Şekil 13

3. $ABCD$ teğetler dörtgeni çembere M, N, P, Q noktalarında teğet ve $|AM| = a$, $|MB| = b$, $|CN| = c$, $|DQ| = d$ olsun. $|MG| : |GP|$ ve $|NG| : |GQ|$ oranlarını bulunuz.

4. $SABCD$ piramidinin tabanı $ABCD$ paralelkenarıdır. p düzlemi bu piramidin SA, SB, SC, SD kenarlarını sıra ile A_1, B_1, C_1, D_1 noktalarında kesiyor ve $|SA_1| = |SA|/3$, $|SB_1| = |SB|/5$, $|SC_1| = |SC|/4$ veriliyor. $|SD_1|/|SD|$ oranını bulunuz.



Şekil 14

Yazarlar, bu makaledeki konunun incelenmesinde, biçim verilmesinde ve müzakere edilmesinde büyük yardım göstermiş olan sayın Rıza Burak'a derin minnettarlıklarını sunarlar.

DENKLEMLERİN ÇÖZÜLMESİ

C. Alparslan Ertuğ *

1. Giriş

Ağırlıklı olarak [4]'ten yararlanarak hazırladığımız bu yazıda, çeşitli denklem tiplerinin çözüm yollarını vermeyi değil, denklem çözerken genel olarak dikkat edilmesi gereken hususları ve çok sık yapılan hataları göstermeyi amaçlıyoruz.

Okuyucularımıza cebirsel denklemlerin çözümleri için [2] ve [3]'ü, Diofant denklemleri için [5]'i, trigonometrik denklemlerin çözümleri için [1]'i, üstlü ve logaritmik denklemler içinse [4]'ü incelemelerini öneriyoruz.

2. Tanımlar

Daha fazla ilerlemeden önce, yazıda kullanacağımız bazı kavramları tanımlamamız uygun olacaktır.

a. Bir denklemde değişkenin (bilinmeyenin) *tanım kümesi*, denklemin her iki tarafını anlamlı (tanımlı) kılan değerler kümesidir.

b. Bir a sayısı, bilinmeyenin yerine koyulduğunda denklemi doğru bir ifade haline getiriyorsa (denklemi doğru bir sayısal ifadeye dönüştürüyorsa), denklemin bir *çözüm*üdür, yani *kök*üdür. Bu tanıma göre, bir denklemin *çözüm kümesi* (tüm çözümleri), değişkenin tanım kümesinin bir alt kümesidir.

c. Bir denklemi çözmek, tüm köklerini bulmak ya da kök bulunmadığını kanıtlamaktır.

d. Eğer bir denklemin tüm kökleri (çözüm kümesi), bir başka denklemin de kökleri ise, ikinci denklem birincinin sonucudur.

e. İki denklemden biri diğerinin sonucu ise, bu iki denklem *denk*tir denir. Bir başka deyişle,

* Gemi inşaatı mühendisi

denk denklemler aynı çözüm kümesine sahiptirler.

f. İki denklem, değişkenin bazı değerlerinden oluşan bir kümeye ait aynı çözümlere sahiplerse, bu küme üzerinde denktirler denir.

Şimdi bu kavramları iki örnekle gösterelim:

(a) $x+1 = \sqrt{x-1}$ denklemini gözönüne alalım. Bu denklemin tanım kümesi, sol taraftaki $x+1$ ve sağ taraftaki $\sqrt{x-1}$ ifadesinin anlamı olacağı tüm x değerlerinden oluşacaktır. Sol taraf x'in her değeri için tanımlıdır. O halde bu denklemin tanım kümesi, $x \geq 1$ değerlerinden oluşur.

(b) Şimdi de şu iki denklemi gözönüne alalım:

$$\begin{aligned} \log_3(x-3) + \log_3(x+5) &= 2 \\ \log_3(x-3)(x+5) &= 2 \end{aligned}$$

Kolayca görüleceği gibi, birinci denklemin her kökü ikincinin de köküdür ve dolayısıyla ikinci denklem birincinin sonucudur. İkinci denklem çözülerek, kökler (çözüm kümesi) $x_1 = 4$ ve $x_2 = 6$ olarak bulunur. x_2 kökü birinci denklemi sağlamaz ve ilk denklemin tanım kümesi içinde de değildir. Öyleyse bu iki denklem denk değildirler; fakat ilk denklemin tanım kümesi üzerinde denktirler. Tanım kümesi üzerindeki ortak kökleri $x_1 = 4$ değeridir.

İkinci dennklemin kökü olan fakat ilk denklemi sağlamayan $x_2 = -6$ değerine ise *yalancı kök* diyoruz.

Dikkat edilecek olursa, ilk denklemin tanım kümesi $x > 3$ değerlerinden oluşmaktadır. İkinci denklemin tanım kümesi ise, $x > 3$ değerlerinin yanısıra $x < -5$ değerlerini de içermektedir. Yani ilk denklemden ikincisine geçilirken, tanım kümesinde bir genişleme söz konusu olmuş, ve bu bir yalancı kökün dogmasına yolaçmıştır. Şunu da belirtelim ki, yalancı kök doğmayabilirdi de.

Bir denklemi çözerken, bir dizi işlem ve dönüşümler yapılarak bir denklemden ötekine geçilir ve en sonunda da çözüm kümesi elde edilir. Bir başka deyişle, çözüm sürecinde her denklemin yerini bir başka denklem alır. Doğal olarak, yeni gelen her denklemin tanım ve çözüm kümeleri ilk denkleminkinden farklı olabilir. O halde denilebilir ki en iyi çözüm yöntemi, verilen denklemin yerine her defasında denk başka bir denklem yazmaktır. Böylece son denklemin çözüm kümesi ilk denklemin de çözüm kümesi olur. Fakat bu söyleneni her zaman uygulamak olanağı bulunmaz ve genellikle her denklem, kendisine denk olmayan bir sonuçla değiştirilir. Bu durumda "sonucun" tanımına uygun olarak, ilk denklemin kökleri ikincinin de kökleridir; yani kök kaybı sözkonusu değildir, fakat yalancı kökler doğabilir.

Önemle belirtilmesi gereken bir diğer husus ise, verilen denklemin yerine ilkinin sonucu olmayan bir denklem yazılmayacağıdır. Çünkü ilk denklemin, yerine yazılan ikinci denklem kökü olmayan kökleri de bulunabilir ve dolayısıyla ikinci denklemi çözmek, birincinin tüm köklerini vermez. Yani, *en iyi olasılıkla bir kökün kaybolması söz konusu olabilir.*

Özetlersek, herhangi bir denklemi doğru olarak çözmek işlemi, tanım ve çözüm kümelerindeki değişmeleri dikkatle izlemek, köklerin kaybolmasına izin vermemek ve doğmuş olan yalancı kökleri atmak olarak özetlenebilir.

3. Yalancı Kök Doğmasının Sebepleri

Bir denklemi çözerken uyguladığımız, iki tarafın karesini, logaritmasını veya antilogaritmasını alma, üst alma, ya da denklemin bir bölümünün yerine ona eşit başka bir ifade koyma gibi işlemler, değişkenin tanım kümesinin genişlemesine ya da daralmasına yolaçar.

Tanım kümesinin genişlemesi yalancı köklerin doğmasına yolaçabilir. Bu nedenle kökleri bulduktan sonra, yalancı kökler ayıklanıp atılmalıdır.

Yalancı kökleri ayırırken, elde edilen köklerin ilk denklemi sağlayıp sağlamadığına bakmak çok uygulanan bir yöntemdir. Fakat köklerin ilk denklemde yerine konulması güç ve uzun hesaplar yapılmasını gerektiriyorsa, bir başka kuralı uygulayabiliriz. O da şudur: Eğer denklemin çözümü sırasında yapılan dönüşümler sonucu tanım kümesinin genişlemesi sözkonusu olmuşsa, elde edilen köklerden yalnızca ilk denklemin tanım kümesinin elemanı olanlar gerçek kök, diğerleri ise yalancı köktürler.

Genellikle tanım kümesinin genişlemesine ve dolayısıyla yalancı köklerin doğmasına yolaçan işlemler şunlardır:

- Denklemin iki tarafının karesini almak.
- Logaritmaların toplamı yerine bir çarpımın logaritmasının yazılması.
- $x^{\log_x N} = N$ biçimindeki logaritmik formülün kullanılması.
- Denklemin iki tarafındaki benzer terimlerin kısaltılması.

- Denklemdeki kesirlerin kısaltılması ya da kaldırılması.

Aşağıda bunlara ilişkin ilişkin örnekler verilmiştir.

Tanım kümesinin daralmasına yolaçan dönüşümlerden ise, kök kaybı sözkonusu olabileceği için, kaçınılmalıdır.

4. Örnekler

Aşağıda çeşitli örnekler üzerinde, yalancı köklerin doğmasına yolaçan farkedilmesi güç kaynaklar, daha sonra da köklerin kaybolmasına yolaçan kaynaklar ele alınacaktır.

Örnek 1. $\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-1}=4$ *denklemini çözünüz.*

Çözüm. Denklemin tanım kümesinin $x \geq 1/2$ değerlerinden oluştuğu kolayca bulunabilir. Şimdi iki tarafın karesini alalım

$$\left(\sqrt{x+3}\right)^2+2\sqrt{x+3}\sqrt{2x-1}+\left(\sqrt{2x-1}\right)^2=16$$

Kökleri kaldırarak (bu işlem tanım kümesini genişletmektedir) ve gerekli düzenlemeleri yaparak şu denklemi elde ederiz.

$$2\sqrt{2x^2+5x-3}=14-3x \qquad (1)$$

Şimdi de şöyle düşüneceğiz: (1) denkleminin sol tarafı, (izin verilebilir) her x değeri için negatif değildir; fakat sağ taraf $x > 14/3$ için negatiftir. Açıktır ki x'in bu değerleri çözüm olamazlar ve bundan sonra (1) denklemini yalnızca $x \leq 14/3$ aralığında ele alacağız. Bu aralıkta her iki taraf pozitif olduğu için, kare almak, $x \leq 14/3$ aralığında (1)'e denk bir denklem verir.

$$\left(2\sqrt{2x^2+5x-3}\right)^2=(14-3x)^2$$

Buradan da tanım kümesini bir kez daha genişleterek, $x^2-104x+208=0$ denklemini elde ederiz ve bunun kökleri $x_{1,2}=52\pm 8\sqrt{39}$ olarak bulunur. Kolayca görüleceği gibi, bu köklerin ikisi de ilk denklemin tanım kümesi içinde bulunmaktadır. Dolayısıyla, $x \leq 14/3$ koşulunu sağlayıp sağlamadığını kontrol etmek yeterli olacaktır. $x_1=52+8\sqrt{39}$ ve $x_2=52-8\sqrt{39}$ dersek, $x_1>14/3$ ve $x_2<14/3$ olduğu görülür. Öyleyse yalnızca, x_2 değeri köktür.

Burada bulunan kökleri denklemde yerine koyarak kontrol yapmanın bir hayli güç ve zaman alıcı olduğu kolayca görülmektedir.

Bir parametre içeren denklemlerde ise, doğrudan sağlama yapmak daha da güçleşir. Şimdi de şu örneği ele alalım:

Örnek 2. $x-1=\sqrt{a-x^2}$ *denklemini çözünüz.*

Çözüm. Sağ taraf x'in izin verilebilir tüm değerleri için, sol taraf ise $x \geq 1$ için negatif değildir. Bu yüzden, verilen denklem, $x \geq 1$ aralığında, $(x-1)^2=\left(\sqrt{a-x^2}\right)^2$ denklemine; sonra da aşağıdaki denkleme indirgenebilir.

$$2x^2-2x+1-a=0 \qquad (2)$$

Bu işlem yapılırken değişkenin tanım kümesi genişletildiğinden, sonuçta bulunan köklerin kontrol edilmesi gerekecektir. Dolayısıyla (2) denklemini çözmemiz ve bulunan köklerden, $x \geq 1$ ve $a-x^2 \geq 0$ koşullarını sağlayanları almamız gerekecektir. Bu denklemin diskriminantı $2a-1$'e eşittir. O halde $a<1/2$ için bu denklemin gerçek kökleri yoktur. O halde ilk denklemin de bu a değerleri için kökü yoktur.

Şimdi $a \geq 1/2$ olduğunu kabul edelim. (2) denkleminin kökleri,

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{2a-1}}{2}$$

sayılarıdır. x_2 kökünün, $x \geq 1$ koşulunu sağlamadığı açıkça görülmektedir, dolayısıyla bu, ilk denklemin kökü değildir. x_1 hakkında karar verebilmek için, $\left(1+\sqrt{2a-1}\right)/2 \geq 1$ ya da $\sqrt{2a-1} \geq 1$ eşitsizliğini çözmemiz gerekir. Bu eşitsizliğin $a \geq 1$ için sağlandığı kolayca görülmektedir. O halde $a<1$ için, ilk denklemin gerçek kökleri yoktur. Fakat hâlâ, $a \geq 1$ için $a-x_1^2 \geq 0$ eşitsizliğinin sağlanıp sağlanmadığını incelememiz gerekmektedir. Bu eşitsizlik, $a \geq \sqrt{2a-1}$ eşitsizliğine denktir. $a \geq 1$ durumunu gözönüne aldığımız için, eşitsizliğin iki tarafı da negatif değildir ve dolayısıyla kare alınabilir:

$$\begin{aligned} a^2 &\geq 2a-1 \\ a^2-2a+1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Bu eşitsizlik a'nın tüm değerleri için sağlanmaktadır. Öyleyse $a<1$ için başlangıç denkleminin kökleri yoktur. $a \geq 1$ içinse denklemin kökü, $x=\left(1+\sqrt{2a-1}\right)/2$'dir.

Yer darlığı nedeniyle kökleri yerine koyarak sağlama yapmanın güçlüğünü burada gösteremiyoruz. Fakat okuyucularımız bu işlemi kendileri yapabilirler.

Yalancı köklerin oluşmasının kaynaklarından biri de çeşitli logaritma formüllerinin, özellikle de bir çarpımın logaritmasının alınması formülünün kullanılmasıdır. Gerçekten de $\log f(x) + \log g(x)$ yerine $\log(f(x)g(x))$ yazmakla, degişkenin tanım kümesini genişletmiş ve x bilinmeyenin $\log f(x) < 0$ ve $\log g(x) < 0$ koşullarını aynı anda sağlayan değerlerine izin vermiş oluruz. Dolayısıyla yalancı kökler doğabilir. Fakat bunlar yalnızca değişkenin tanım kümesinin genişletilmesinden doğduklarından, bunları ayırmak için, tanım kümesinin elemanı olup olmadıklarına bakmak yeterli olacaktır. Ayrıca şunu belirtelim ki, tersine bir uygulama, yani bir çarpımın logaritması yerine logaritmaların toplamını yazmak ise, değişkenin tanım kümesini daraltacağı için, yapılmamalıdır.

Örnek 3. $\log_2(x+2) + \log_2(3x-4) = 4$ *denklemini çözünüz.*

Çözüm. Bir çarpımın logaritmasına geçerek $\log_2(x+2)(3x-4) = 4$ ve buradan da $(x+2)(3x-4) = 16$ elde ederiz. Bu denklemin kökleri $x_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{73})/3$ biçimindedir. Yalnızca, x_1'in ilk denklemin tanım kümesinin elemanı olduğu ve dolayısıyla yalnızca bunun kök olduğu kolayca görülebilir.

Temel logaritma formülünün uygulanması da değişkenin tanım kümesini genişletmesi nedeniyle yalancı köklerin doğmasına yolaçar.

Örnek 4. $x^{\log_{\sqrt{x}} 2x} = 4$ *denklemini çözünüz.*

Çözüm. $\log_{\sqrt{x}} 2x = \log_x (2x)^2$ olduğunu biliyoruz. O halde ilk denklemi şöyle yazabiliriz: $x^{\log_x (2x)^2} = 4$. Temel formülü kullanarak $(2x)^2 = 4$ elde ederiz. Buradan $x^2 = 1$; dolayısıyla $x_1 = -1$ ve $x_2 = 1$ bulunur. Fakat ne x_1 ne de x_2 ilk denklemin tanım kümesinin elemanı değildirler: $x_1 < 0$ ve $\sqrt{x_2} = 1$ logaritma tabanı olamazlar. O halde verilen denklemin kökü yoktur.

Yalancı köklerin doğması her zaman bu problemdeki kadar dikkat çekici olmayabilir. Kural olarak bu durum, hesaplar yapılırken değişkenin tanım kümesinin genişlemesinden doğmaktadır. Şimdi çözeceğimiz problemde görüleceği gibi, *benzer terimlerin karşılıklı kısaltılmasından da yalancı kökler doğabilir.* Bunda da şaşıracak bir şey yoktur. Kısaltma yapmakla, silinen terimleri anlamlı kılan sınırlamaları kaldırmış ve dolayısıyla tanım kümesini genişletmiş oluyoruz.

Örnek 5. $\log\sqrt{1+x} + 3\log\sqrt{1-x} = \log\sqrt{1-x^2} + 2$ *denkleminin çözüm kümesini bulunuz.*[1]

Çözüm. $\log\sqrt{1-x^2}$ ifadesini aşağıdaki gibi dönüştürebiliriz:

$$\begin{aligned}\log\sqrt{1-x^2} &= \log\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}\\ &= \log\sqrt{1+x} + \log\sqrt{1-x}.\end{aligned}$$

Bu dönüşümün değişkenin tanım kümesini değiştirmediği kolayca görülebilir ve dönüşüm sonucunda ilk denklem aşağıdaki şekle gelir:

$$\begin{aligned}&\log\sqrt{1+x} + 3\log\sqrt{1-x}\\ &\qquad = \log\sqrt{1-x} + \log\sqrt{1+x} + 2.\end{aligned}$$

Her iki taraftaki $\log\sqrt{1+x}$ ifadesini kısaltarak şunu elde ederiz: $2\log\sqrt{1-x} = 2$. Bu denklemin tanım kümesi $x < 1$ koşulunu sağlayan sayılardan oluşmaktadır ve bu tanım kümesi ilk denklemin tanım kümesinden daha geniştir. O halde yalancı kök doğmasını beklemeliyiz. Son denklemi çözerek $x = -99$ buluruz. Bu ise ilk denklemin tanım kümesinin elemanı değildir. O halde verilen denklemin kökü yoktur.

Hata kaynaklarından bir diğeri ise, kesirlerin kısaltılması ya da kaldırılmasıdır. Bu işlem de değişkenin tanım kümesinin genişlemesine ve paydayı sıfır yapan değerlerin ortadan kalkmasına yolaçar.

Örnek 6. $\frac{1}{\log_6(3+x)} + \frac{2\log_{0.25}(4-x)}{\log_2(3+x)} = 1$ *denklemini çözünüz.*

Çözüm. Bütün logaritmaları 2 tabanına çevirip gerekli düzenlemeleri yaparak aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\frac{\log_2 6 - \log_2(4-x)}{\log_2(3+x)} = 1 \tag{3}$$

Buradan da $\log_2 6 - \log_2(4-x) = \log_2(3+x)$ ve

$$\frac{6}{4-x} = 3 + x \tag{4}$$

bulunur. Bu denklemin kökleri ise $x_1 = 3$ ve $x_2 = -2$'dir. (3) ve (4) denklemlerinde kesirleri kaldırmakla tanım kümesini genişletmiş olmamız nedeniyle yalancı kök doğmuş olabilir.

[1] Taban belirtmediğimiz zaman 10 tabanına göre logaritma alındığı anlaşılmalıdır.

Bu yüzden, bulduğumuz köklerin ilk denklemin tanım kümesinin elemanı olup olmadığına bakmamız gerekir. Böylece de x_2'nin tanım kümesinin elemanı olmadığı, fakat x_1'in kök olduğu bulunmuş olur.

Sol tarafı bir kesir, sağ tarafı ise sıfır olan denklemlerin çözümünde sık sık şöyle bir hata yapılmaktadır. Payı sıfıra eşitleyip kökler bulunmakta, payda ise hiç gözönüne alınmamaktadır. Oysaki bulunan kökler içinde paydayı sıfır yapanlar varsa bu değerler atılmalıdır.

Örnek 7. $\tan 3x = \tan 5x$ *denklemini çözünüz.*

Çözüm. Verilen denklemi şöyle yazabiliriz:

$$\frac{\sin 3x}{\cos 3x} - \frac{\sin 5x}{\cos 5x} = 0.$$

Buradan da paydaları eşitleyip gerekli düzenlemeleri yaparak aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\frac{\sin 2x}{\cos 3x \cos 5x} = 0.$$

$\sin 2x = 0$ denklemini çözerek, $x = k\pi/2$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, sonucunu buluruz. Şimdi yalancı kökleri, yani paydayı sıfır yapan çözümleri çıkarmamız gerekir. k'nın tek değerleri için, $\cos 3x \cos 5x$ ifadesi sıfır olur. O halde ilk denklemin kökleri, $x = k\pi/2$ değerlerinden k'nin çift, yani $k = 2n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, olduğu açılardır. Dolayısıyla kökler; $x = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, değerleridir.

Sol tarafı çarpanlara ayrılmış, sağ tarafı ise sıfır olan denklemleri çözerken, tanım kümesine dikkat edilmemesi sonucu ciddi hatalar yapılmaktadır. Böyle bir denklem çözülürken genellikle her bir çarpan sıfıra eşitlenerek kökler bulunmaktadır. Oysa ki çarpanlardan birini sıfır yapan bir değişken değeri, bir diğer çarpanı anlamsız kılabilir. Dolayısıyla da bu değerler kök olamazlar. Bu yüzden, elde edilen köklerin değişkenin tanım kümesinin elemanı olup olmadığının mutlaka kontrol edilmesi gerekir.

Örnek 8. $(x+2)(x^2-1)\sqrt{x} = 0$ *denklemini çözünüz.*

Çözüm. Her çarpanı tek tek sıfıra eşitleyerek $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$ ve $x_4 = 0$ köklerini buluruz. Oysa ki ilk denklemin tanım kümesi, $x > 0$ değerlerinden oluşmaktadır. Öyleyse, $x_1 = -2$ ve $x_3 = -1$ değerleri yalancı köktürler ve atılmaları gerekir.

5. Kök Kaybının Sebepleri

Şimdi de kök kaybının kaynaklarını ve bunu önlemenin yollarını görelim. Genellikle kök kaybı, verilen denklemin yerine, tanım kümesi daha dar başka bir denklemin yazılmasından doğar. Tanım kümesinde böyle bir daralma, daha önce gördüğümüz gibi, logaritmik ve trigonometrik formüllerin kullanılmasıyla meydana gelir.

Daha önce de belirttiğimiz gibi, bir çarpımın logaritması yerine logaritmaların toplamını yazmak, tanım kümesinin daralmasına yolaçar. Aynı durum, üstlü bir terimin logaritmasının alınması için de geçerlidir. Bu sakıncayı ortadan kaldırmak için,

(a) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$ $(M, N > 0)$,

(b) $\log_a N^\alpha = \alpha \log_a N$ ($N > 0$, α herhangi bir sayı),

biçimindeki logaritma formüllerinin yerine aşağıdaki formülleri kullanmak gerekir:

(c) $\log_a MN = \log_a |M| + \log_a |N|$ $(MN > 0)$,

(d) $\log_a N^{2k} = 2k \log_a |N|$ ($N \neq 0$, k bir tamsayı).

Bu formüllerin kullanılması, tanım kümesini genişleterek yalancı köklerin doğmasına yolaçsa bile, bunları nasıl ayıklayacağımızı biliyoruz. Oysa kaybolan kökleri sonradan bulma şansımız yoktur.

Örnek 9. $\frac{3}{2}\log_{1/4}(x+4)^2 - 3 = \log_{1/4}(4-x)^3 + \log_{1/4}(x+6)^3$ *denklemini çözünüz.*

Çözüm. $\log_{1/4}(x+2)^2 = 2\log_{1/4}|x+2|$, $\log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3 = 3\log_{\frac{1}{4}}(4-x)$, ve $\log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3 = 3\log_{\frac{1}{4}}(x+6)$ değerlerini denklemde kullanarak, şu sonucu elde ederiz:

$$\begin{aligned}
\log_{\frac{1}{4}}|x+2| - 1 &= \log_{\frac{1}{4}}(4-x) + \log_{\frac{1}{4}}(x+6) \\
\log_{\frac{1}{4}}|x+2| - {}& \\
\log_{\frac{1}{4}}(1/4) &= \log_{\frac{1}{4}}(4-x) + \log_{\frac{1}{4}}(x+6) \\
\log_{\frac{1}{4}} 4|x+2| &= \log_{\frac{1}{4}}(4-x)(x+6) \\
\log_{\frac{1}{4}} 4|x+2| &= \log_{\frac{1}{4}}(4-x)(x+6) \\
4|x+2| &= (4-x)(x+6)
\end{aligned}$$

Bu denklemin kökleri, $x_1 = 2$ ve $x_2 = 1 - \sqrt{33}$'tür. Her iki değer de, ilk denklemin tanım kümesinin elemanıdırlar ve gerçek köktürler.

Tanım kümesinin daralması ve bu nedenle de köklerin kaybolması, yeni bir logaritma tabanına geçilmesi sırasında da olabilir.

Örnek 10. $\log_{0.5x} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x}\sqrt{x} = 0$ *denklemini çözünüz.*

Çözüm. İşte size bir çözüm: Taban değiştirme formülünü kullanarak ve x'i yeni logaritma tabanı alarak aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$\frac{\log_x x^2}{\log_x 0.5x} - \frac{14\log_x x^3}{\log_x 16x} + \frac{40\log_x\sqrt{x}}{\log_x 4x} = 0.$$

Kolayca görüleceği gibi, denklem $x = 1$ için anlamsızdır. Oysa ki ilk denklemin $x = 1$ için anlamlı olmasının yanısıra, bu değer yeni denklemin bir köküdür de. İşte bu noktada bir kök kaybedilmektedir.

Bu nedenle şöyle akıl yürütmeliyiz. x tabanına geçmek istiyoruz; bu durum $x > 0$ ve $x \neq 1$ koşullarını getirmektedir. İlk denklemin tanım kümesi $x > 0$ koşulunu zaten getirdiği için, bu koşul sağlanmaktadır. $x = 1$ değeri, ilk denklemin tanım kümesinin elemanı olduğu için, bu değerin kök olup olmadığını kontrol etmemiz gerekir. Bu değeri ilk denklemde yerine koyarak denklemi sağladığını görürüz. Böylece bir kök bulunmuş olur: $x_1 = 1$. Şimdi diğer kökleri arayalım. Artık x tabanına geçebiliriz.

Buradan sonra çözüm güç değildir. Logaritma özelliklerini kullanarak ve $\log_x 2$ yerine y koyarak aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$\frac{2}{1-y} - \frac{42}{1+4y} + \frac{20}{1+2y} = 0.$$

Buradan da $2y^2 + 3y - 2 = 0$ bulunur. Bu denklemin kökleri ise $y_1 = 1/2$ ve $y_2 = -2$'dir. $\log_x 2 = 1/2$ diyerek $x_2 = 4$ ve $\log_x 2 = -2$ diyerek de $x_3 = 1/\sqrt{2}$ elde edilir. x_2 ve x_3 değerlerinin de gerçek kökler olduğu kolayca görülmektedir. O halde denklemin üç kökü bulunmaktadır.

Köklerin kaybolmasına yolaçan en önemli hatalardan biri ise, *bir denklemin her iki tarafındaki ortak bir çarpanın kısaltılmasıdır.*

Böyle bir durumda izlenecek en iyi yol, tüm terimleri sol tarafta toplamak ve sonra da aşağıdaki iki durumu gözönüne almaktır:

(1) Ortak çarpanın sıfıra eşit olması.

(2) Ortak çarpanın sıfıra eşit olmaması.

Kuşkusuz ikinci durumda ortak çarpanın dışındaki çarpan sıfır olacaktır.

Örnek 11. $x^2 2^{x+1} + 2^{|x+3|+2} = x^2 2^{|x-3|+4} + 2^{x-1}$ *denklemini çözünüz.*

Çözüm. İki durumu gözönüne alacağız:

(a) $x \geq 3$ olması hali. Bu durumda denklem aşağıdaki biçimi alacaktır:

$$x^2 2^{x+1} + 2^{x-1} = x^2 2^{x+1} + 2^{x-1}.$$

Bu denklem x'in her değeri için sağlanır; dolayısıyla $x \geq 3$ değeri verilen denklemin kökleridir.

(b) $x < 3$ olması hali. Bu durumda denklem aşağıdaki biçimleri alacaktır:

$$\begin{aligned} x^2 2^{x+1} + 2^{5-x} &= x^2 2^{7-x} + 2^{x-1}, \\ 2^{x-1}(4x^2 - 1) &= 2^{5-x}(4x^2 - 1). \end{aligned}$$

İşte burada iki taraftaki $(4x^2 - 1)$ çarpanını kısaltmak hatasına düşülmemelidir. Bütün terimleri sol tarafa toplayalım:

$$(2^{x-1} - 2^{5-x})(4x^2 - 1) = 0.$$

Şimdi de her çarpanı sıfıra eşitleyerek kökleri bulalım: $4x^2 - 1 = 0$ ise $x^2 = 1/4$'ten $x_1 = 1/2$ ve $x_2 = -1/2$. $x < 3$ koşulunu sağladıkları için bunlar köktür. $2^{x-1} - 2^{5-x} = 0$ ise $2^{x-1} = 2^{5-x}$ ve $x - 1 = 5 - x$'ten $2x = 6$ ve $x_3 = 3$. $x < 3$ olması gerektiği için bu kök değildir. O halde verilen denklemin kökleri, $x \geq 3$ ile $x_1 = 1/2$ $x_2 = -1/2$ değerleridir.

Çok sık yapılan bir diğer yanlış ise, şu kuralın yanlış kullanılmasıdır:

"*Tabanları 0 ve 1'den farklı olmak kaydıyla*, birbirine eşit iki üstlü ifadenin tabanları birbirine eşitse, üstleri de birbirine eşittir." Genellikle bu kuralın *tabanları 0 ve 1'den farklı olmak kaydıyla* bölümü unutulmakta ya da gözden kaçırılmaktadır. Sonuç, tabanı 0 ya da 1 yapan kök değerlerinin kaybolmasıdır.

Örnek 12. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$ *denklemini çözünüz.*

Çözüm. Bu denklem şöyle yazılabilir: $x^{\sqrt{x}} = x^{x/2}$. Böylece tabanları eşit olan iki üstlü terimin birbirine eşitliği durumuna geldik. Herhangi bir kökün kaybolmasına yolaçmamak için, tabanın 0 ya da 1 olup olamayacağını inceleyelim. 0^0 belirsizlik olduğu için $x = 0$ kök olamaz; $x_1 = 1$ ise köktür. Şimdi de 0 ve 1'den farklı kökleri arayalım. Üstleri birbirine eşitleyerek $\sqrt{x} = x/2$ buluruz. Buradan da $x_2 = 4$ elde ederiz.

Zaman zaman da şu hatalı akıl yürütmeyle karşılaşırız: "*Bir üstlü sayı 1'e eşitse, üstü sıfırdır.*" Oysa ki bunun bir istisnası vardır: Taban 1 ise, üstü ne olursa olsun üstlü ifade 1'e eşit olur.

Örnek 13. $|\cos x|^{\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2}} = 1$ *denklemini çözünüz.*

Çözüm. Şöyle akıl yürüteceğiz: Eğer $|\cos x| = 1$ ise, üst ne olursa olsun sonuç 1'e eşit olacaktır. Fakat $|\cos x| \neq 1$ ise, üstün sıfıra eşit olması zorunludur. O halde denklemimiz ikiye ayrılmış olmaktadır:

(a) $|\cos x| = 1$.

(b) $\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2} = 0$.

İlk denklemden, k herhangi bir tamsayı olmak üzere, $x_1 = k\pi$ bulunur. İkinci denklemden ise, $\sin x = 1/2$ ve buradan $x_2 = (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi$ ya da $\sin x = 1$ ve buradan da $x_3 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ kökleri elde edilir. Ancak bu x_3 değerleri, ilk denklemi 0^0 haline getirdikleri için kök değildirler. Dolayısıyla denklemin kökleri şöyle olacaktır. $x_1 = k\pi$ ve $x_2 = (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi$; burada k herhangi bir tamsayıdır.

Özetleyecek olursak, üstlü ifadelerin eşitliğinden üstlerin eşitliğine geçerken üç durumun gözönüne alınması gerekir: Tabanın 0 olması, tabanın 1'e eşit olması ve üstlerin eşit olması halleri. Bu tür bir uygulama köklerin kaybolması durumunu ortadan kaldırır.

Bununla beraber yalancı kökler doğabilir. Gerçekten her durumda, birbirinden yalıtılmış denklemleri çözmek zorunda olduğumuz için, buralardan bulunacak bazı köklerin ilk denklemin tanım kümesinin elemanı olmaması olasılığı vardır. Son örnekte bu durumla karşılaştık; ikinci denklemin bazı çözümlerinin, ilk denklemin tanım kümesinin dışında kalması nedeniyle bunları attık.

Bu yüzden üstlü bir denklemin çözümünde, yukarıda belirttiğimiz kuralı uyguladıktan sonra bulduğumuz kökleri kontrol etmemiz gerekir. Bunun için de bulunan köklerin, ilk denklemin tanım aralığı içinde olup olmadıklarına bakmak yeterli olacaktır.

Son olarak da köklerin kaybolmasına yolaçan, bir başka kaynaktan, trigonometri formüllerinin kullanılmasından sözedelim.

Bir trigonometri formülünün sağ ve sol tarafları farklı tanım kümelerine sahip olabilirler. Örneğin, sinüs ve kosinüsü yarım açının tanjantı cinsinden ifade etmemizi sağlayan dönüşüm formülleri böyledir. Bu formüllerin sol tarafı daha geniş bir tanım kümesine sahiptir ve dolayısıyla sol tarafın yerine sağ tarafın yazılması halinde tanım kümesi daraltılmış olacak ve köklerin kaybolması tehlikesi doğacaktır.

Örnek 14. $\sin x - 2\cos x = 2$ *denklemini çözünüz.*

Çözüm. Yarım açının tanjantlarını kullanarak şu denklemi elde ederiz:

$$\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} - \frac{2(1-\tan^2\frac{x}{2})}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = 2.$$

Buradan da, $\tan\frac{x}{2} = 2$ ve $x = 2\arctan 2 + 2n\pi$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, bulunur.

Fakat yukarıdaki çözüm kümesi, tüm çözümleri içermez. Kolayca kanıtlanabileceği gibi $x = (2n+1)\pi$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ açıları da çözümdür. Yarım açının tanjantını kullanmakla bu çözümleri kaybetmiş olduk. İlk denklemin, x'in tüm değerleri için anlamlı olmasına rağmen, ikinci denklem yalnızca $\tan(x/2)$ anlamlı iken, yani $x \neq (2n+1)\pi$ olduğunda anlamlı olur. O halde ikinci denklemi anlamsız kılan bu değerlerin, ilk denklemin kökü olup olmadıklarının kontrol edilmesi gerekir.

KAYNAKÇA

[1] Y. Aksoy, *Trigonometri*, İDMMA, No: 102, İstanbul, 1972.

[2] P. Aubert, G. Papelier, *Liseler İçin Cebir Temrinleri: İkinci Derece Denklemleri*, 1960.

[3] N. Çalışkan, *Cebirsel Denklemlerin Kökleri*, *Matematik Dünyası*, 4, sayı 3, 9–13 (1994).

[4] G. Dorofeev, *Elementary Mathematics*, MIR, Moskova, 1973.

[5] A.O. Gelfond, *Denklemlerin Tam Sayılarla Çözülmesi*, Türk Matematik Derneği, No: 8, İstanbul, 1962.