1994 ÖĞRENCİ YERLEŞTİRME SINAVI MATEMATİK SORULARI VE CEVAPLARI (I)

Ülkü Öztaş * & Onur Sağsen †

1. $\dfrac{\sqrt{0.16}+\sqrt{0.04}}{\sqrt{0.36}-\sqrt{0.04}}$ *kaçtır?*

Çözüm. Verilen sayıların kareköklerini alarak $\frac{0.4+0.2}{0.6-0.2} = \frac{0.6}{0.4} = \frac{3}{2}$ buluruz.

2. *x, y, z pozitif tamsayı ve $2x+3y-z=94$ ise, x'in en küçük değeri kaçtır?*

Çözüm. Verilen denklemden x çözülerek $x = 47 - \frac{3y-z}{2}$ buluruz. x'in alabileceği en küçük değer 1 için $3y = 92+z$ denkleminin pozitif tamsayılarda çözülebilir olması gerekir. Aranılan z, $92+z$ sayısı 3'le bölünebilir kılan en küçük sayı olmalıdır. Bu gözlem $z=4$, $y=32$ ve sonuçta $x=1$ verir.

3. *Ardışık iki pozitif tamsayıdan küçük olanının 3 katı ile büyük olanının 2 katının toplamı 107'dir Buna göre küçük sayı kaçtır?*

Çözüm. Tamsayılardan küçük olanına x dersek, diğeri $x+1$ olur. Verilenlerden $3x+2(x+1) = 107$ denklemini elde ederiz. Denklemin çözümü küçük tamsayıyı 21 olarak verir.

4. *Birler basamağı 0 olan, 3 ile bölünebilen iki basamaklı en büyük pozitif doğal sayının, birler basamağı 0 olan, 3 ile bölünebilen iki basamaklı en küçük pozitif doğal sayıya oranı kaçtır?*

Çözüm. Verilen koşullar büyük tamsayıyı 90, küçüğünü ise 30 olarak belirler. Oranları 3'tür.

5. *İki basamaklı ve birbirinden farklı 4 pozitif tamsayının toplamı 86'dır. Bu sayıların en büyüğü en çok kaç olabilir?*

Çözüm. Diğer üç sayı toplamının en küçük olması gerekir. Örneğin 10, 11 ve 12 alındığında aranılan sayı $86-33=53$ olmaktadır. *Ancak bu sayı yanıtlar arasında yok!* Yanıtlar arasındaki 50, diğer sayıların 10, 12 ve 14 alınmasını gerekli kılıyor. Belki de sayılar çift olarak verilmeliydi.

6. *Üç basamaklı abc sayısının birler basamağı 4'tür. Birler basamağı ile yüzler basamağı yer değiştirildiğinde oluşan yeni sayı abc sayısından 297 küçüktür. Buna göre abc sayısının yüzler basamağı kaçtır?*

Çözüm. abc'nin yüzler basamağı a'dır. Verilenler $(100a+10b+4)-(400+10b+a)=297$ denklemini, yani $99a-396=297$ gerektirir ki, bu da $a=7$ verir.

7. *Bir bidonun ağırlığı, boş iken x gram, yarısı su ile dolu iken y gramdır. Bu bidonun tamamı su ile dolu iken toplam ağırlığı nedir?*

Çözüm. Sorudan yarım bidon suyun ağırlığı olarak $y-x$ elde ederiz. Bu gözlem bidonun dolu olduğu haldeki ağırlığını $2(y-x)+x = 2y-x$ olarak verir.

8. *Toplamları 166 olan 28 sayma sayısı vardır. Bunlardan bir kısmının ortalaması 7, ötekilerin ortalaması ise 5'tir. Buna göre ortalaması 7 olan sayılar kaç tanedir?*

Çözüm. n tane sayı $x_1, x_2, \ldots, x_n$'nin aritmetik ortalaması $\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ olarak tanımlanır. 28 sayıdan x tanesinin ortalaması 7 ise, bu x tane sayının toplamı $7x$ olacaktır. Benzer şekilde geriye kalan $28-x$ tanesinin toplamı ise $5(28-x)$ olacaktır. Elde edilen $7x+5(28-x)=166$ denkleminden $x=13$ bulunur.

9. *Aylık geliri sabit olan bir kimse her ay gelirinin $\frac{1}{24}$'ünü A kasasına, $\frac{1}{x}$'ini de B kasasına koymaktadır. Bu iki kasaya koyulan toplam miktar bu kimsenin gelirinin yüzde yirmisi olduğuna göre, x ne olmalıdır?*

Çözüm. Sorudan $\frac{1}{24}+\frac{1}{x}=\frac{1}{5}$ veya $\frac{1}{x}=\frac{3}{120}$ denklemi ve sonuçta da $x=40$ elde ederiz.

* Emekli matematik öğretmeni
† Üçler Eğitim Dersanesi öğretmeni

10. *Bir miktar kumaştan eş boyda 9 perde çıkmaktadır. Boyu bunlardan 60 cm daha kısa olan perdelerden ise 12 tane çıkmaktadır. Buna göre toplam kumaş kaç metredir?*

Çözüm. Metre, cm tuzağına düşmeden, sorudan $\frac{x}{9} - 0.6 = \frac{x}{12}$ veya $\frac{4x-3x}{36} = 0.6$ bulunur. Bu da $x = 21.6$ verir.

11. *x, y pozitif tamsayılar ve $y < 6$ ve $\frac{xy-x}{y} = 5$ ise, x kaçtır?*

Çözüm. Sorudan $x = \frac{5y}{y-1} = 5 + \frac{5}{y-1}$ denklemi elde edilir. $0 < x$ tamsayı olduğundan $\frac{5}{y-1}$ tamsayı olmalıdır. $0 < y < 6$ aralığında $\frac{5}{y-1}$ sayısını tamsayı kılan tek sayı $y = 2$'dir. Buradan $x = 10$ bulunur.

12. *$\frac{a+2b}{c} = 2$ ve $\frac{b-2a}{2c} = -\frac{1}{2}$ ise, $\frac{c}{a}$ kaçtır?*

Çözüm. İkinci denklemden elde edilen $b = 2a - c$ ifadesi ilk denklemde kullanılırsa $a + 2(2a-c) = 2c$ veya $5a = 4c$ elde edilir. Bu da $\frac{c}{a} = \frac{5}{4}$ verir.

13. *$\frac{9x^2-6x+1}{9} = (x+a)^2$ olduğuna göre a kaçtır?*

Çözüm. İlk önce $9x^2 - 6x + 1 = (3x-1)^2$ gözlemini yapalım, sonra da

$$\begin{aligned}(3x-1)^2 - 9(x+a)^2 &= [(3x-1) - 3(x+a)] \\ &\quad \cdot [(3x-1) + 3(x+a)] \\ &= (-1-3a)(6x+3a-1)\end{aligned}$$

yazalım. Çarpım sıfırdır ve çarpanlardan birinin sıfır olması gereğinden $x = -\frac{1}{3}$ bulunur.

14. *$a+b$ ile $a-b$ sayıları aralarında asal ve $\frac{a+b}{a-b} = \frac{17}{7}$ ise, $1 - \frac{a^2}{b^2}$ kaçtır?*

Çözüm. $a+b$ ve $a-b$'nin aralarında asal olmalarından $a+b = 17$ ve $a-b = 7$ denklemlerini elde ederiz. Çözüm $a = 12$, $b = 5$ olur. Buradan da $1 - \frac{a^2}{b^2} = -\frac{119}{25}$ buluruz.

15. *Tamsayılar kümesi üzerinde her a ve b için $a \star b = 2a - b$ işlemi tanımlanmıştır. $k \star 7 = 5 \star 13$ ise, k kaçtır?*

Çözüm. $k \star 17 = 5 \star 13$ eşitliğinde $\star$ işleminin tanımını kullanıp $2k - 17 = 10 - 13$, buradan da $k = 2$ buluruz.

16. *$3^{1994} \equiv x \pmod 5$ olduğuna göre x kaçtır?*

Çözüm. $3 \equiv 3 \pmod 5$, $3^2 \equiv 4 \pmod 5$, $3^3 \equiv 2 \pmod 5$ ve $3^4 \equiv 1 \pmod 5$ bulunur. Son bağıntıda iki tarafın "gerekli" kuvveti alınırsa $(3^4)^{498} \equiv 1^{498} \pmod 5$ buluruz. Buradan $3^{1992} \equiv 1 \pmod 5$ elde ederiz. İki tarafı 3^2 ile çarparsak $3^{1994} \equiv 4 \pmod 5$ buluruz.

17. *E evrensel küme olsun ve bir C kümesinin eleman sayısı $s(C)$ ile gösterilsin. $s(E) = 9$, $s(A \cup B) = 6$, $s(A \cap B) = 3$, $s(B) = 4$ olduğuna göre, A kümesinin tümleyeni olan A' kümesinin eleman sayısı kaçtır?*

Çözüm. $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ formülünü anımsamamız yeterli. B yerine A'nın tümleyeni A' alırsa $A \cap A' = \emptyset$'dir. $s(E) = s(A \cup A') = s(A) + s(A')$ buluruz. Verilenler yerine konursa $s(A) = 5$ ve ikinci formülden $s(A') = 4$ buluruz.

18. *$6^{x+1} = 3^{x+2}$ olduğuna göre 2^{x+1} kaçtır?*

Çözüm. Üstlü ifadeleri anımsayalım. $6^{x+1} = (2 \cdot 3)^{x+1} = 2^{x+1} . 3^{x+1} = 3 \cdot 3^{x+1}$ eşitliğinde $3^{x+1} \neq 0$ olduğundan, her iki tarafı 3^{x+1}'in çarpımsal tersi ile çarparak $2^{x+1} = 3$ buluruz.

19. *$x^2 - y^2 = 15$ ve $\dfrac{4^{x-y}}{4^{y-x}} = 16$ olduğuna göre $x + y$ kaçtır?*

Çözüm. $\frac{4^{x-y}}{4^{y-x}} = 16$ ifadesini 4'ün üstlerini kullanarak yazalım. $4^{x-y+x-y} = 4^2$ eşitliğinden $2x - 2y = 2$ veya $x - y = 1$ buluruz. Bunu $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = 15$ eşitliğinde kullanarak $x + y = 15$ elde ederiz.

20. *$P(x-2) = (x^2+1)Q(x-1) - x - 1$ eşitliği verilmiştir. $P(x)$ polinomunun $x - 3$ ile bölümünden kalan 20 olduğuna göre, $Q(x)$ polinomunun $x - 4$ ile bölümünden kalan kaçtır?*

Çözüm. Öklit algoritmasına göre $p(x) = r(x)(x-3) + 20$ ve $Q(x) = q(x)(x-4) + k$ koşullarını sağlayan $r(x)$ ve $q(x)$ polinomları vardır ve $p(3) = 20$, $Q(4) = K$ sağlanır. p'nin 3'teki değeri verilen ifadede $x = 5$ alınarak bulunabilir. Bu da $p(3) = 26Q(4) - 5 - 1 = 26k - 6$ verir. Buradan da $k = 1$ buluruz.

21. *x bir gerçel sayı ise, $|4x - 10| + |2x + 5|$ ifadesinin en küçük değeri kaçtır?*

Çözüm. Mutlak değerin özelliklerinden

$$f(x) = \begin{cases} -6x + 5, & \text{eğer } x \leq -\frac{5}{2} \text{ ise;} \\ -2x + 15, & \text{eğer } \frac{-5}{2} < x \leq \frac{5}{2} \text{ ise;} \\ 6x - 5, & \text{eğer } \frac{5}{2} < x \text{ ise;} \end{cases}$$

olur. $f(x)$ her yerde süreklidir, fakat $-\frac{5}{2}$ ve $\frac{5}{2}$ noktalarında türevlenebilir değildir. Örneğin

$x = \frac{5}{2}$ noktasında sağdan türev 6 ve soldan türev -2'dir. Dolayısıyla olası kritik noktalar sadece $\frac{5}{2}$ ve $-\frac{5}{2}$'dir. Ancak $f(x)$, $\frac{5}{2}$'ye kadar azalmakta, $\frac{5}{2}$'den sonra ise artmaktadır. Birinci türev testi, $\frac{5}{2}$ noktasında minimum olduğunu gösterir. Minimum değer ise 10'dur.

22. *$x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$ polinomunun kökleri $x_1 = 1$, $x_2 = b$ ve $x_3 = c$ ise, $b^2 + c^2$ kaçtır?*

Çözüm. Kökler ve katsayılar arasında bilinmesi gerekli bağıntılardan $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ ve $x_1x_2x_3 = -4$ buluruz. Bunlardan da $b + c = 3$ ve $bc = -4$ elde ederiz. İlk eşitlikte her iki tarafın karesini alarak $b^2 + 2bc + c^2 = 9$ ve ikinciyi kullanarak $b^2 + c^2 = 17$ buluruz.

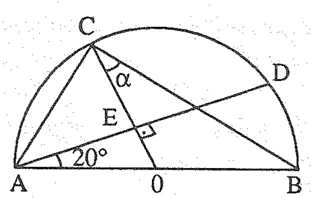
23. *$f(x) = \log_2 x$ ve $(g \circ f)(x) = x + 2$ ise, $g(x)$ nedir?*

Çözüm. Gerçel $0 < a$ sayısı için genelleştirilmiş üstel fonksiyon $a^x = e^{x \ln a}$ olarak tanımlanır. $y = \log_a x$ için gerekli ve yeterli koşul $x = a^y$ olmasıdır. Bu ise a tabanına göre logaritma fonksiyonu $\log_a x$ ile a^x fonksiyonunun birbirlerinin tersi olduğunu gösterir. $a = 2$ için $f(x) = \log_2 x$ fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x) = 2^x$ fonksiyonudur. Buradan $g(x) = (g \circ f \circ f^{-1})(x) = (g \circ f)(f^{-1}(x)) = g \circ f(2^x) = 2^x + 2$ bulunur.

24. *$\log_3(9 \cdot 3^{x+3}) = 3x + 1$ eşitliğinin çözüm kümesi nedir?*

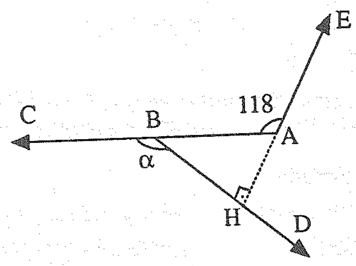
Çözüm. $y = \log_a x$ için gerekli ve yeterli koşul $x = a^y$ eşitliğinin sağlanmasıdır. $a = 3$ için, $\log_3(9 \cdot 3^{x+3}) = \log_3(3^2 \cdot 3^{x+3}) = \log_3 3^{x+5} = 3x + 1$ eşitliğinden $3^{x+5} = 3^{3x+1}$ veya $x + 5 = 3x + 1$ elde ederiz ki, bu da $x = 2$ verir.

25. *O merkezli $[AB]$ çaplı yarım çemberde AB yayı üzerinde $[OC] \perp [AD]$ olacak şekilde C ve D noktaları alınıyor. $\widehat{DAB} = 20°$ ve $\widehat{OCB} = \alpha$ ise, α kaçtır?*



Çözüm. OC ve OB kenarları yarıçapa eşit olduklarından COB üçgeni ikizkenar bir üçgendir. Bu nedenle AOC açısı 2α'dır. AD ve CO doğru parçalarının kesim noktası E ise, AOE dik üçgeninde $20° + 2\alpha = 90°$ eşitliğinden $\alpha = 35°$ elde edilir.

26. *A, B, C, D, E noktaları düzlemsel, $\vec{AE} \perp \vec{BD}$, $\widehat{CAE} = 118°$, ve $\widehat{CBD} = \alpha$ ise, α kaçtır?*



Çözüm. AE doğrusunun BD doğrusunu kestiği noktayı H ile gösterelim. BHA bir dik üçgen olarak verildiğinden, bir dış açı olan $\widehat{CBD} = 90° + 62° = 152°\alpha$'dır.

Değerlendirme

Bildiğimiz kadarı ile ÖYS sorularının değerlendirilmesi ilk kez yapılıyor. Matematik Dünyası, uzmanları çeşitli yönlerden bu sınavları değerlendirmeğe davet ediyor.

İlk bakışta sorular 3 bölüme ayrılabiliyor. Bunlardan ilki zaten birinci aşamada sorulan oldukça kolay sorular. İlk aşamada sınanan bilgi ve yeteneklerin bir kez daha sınanması ölçme ve değerlendirme uzmanları tarafından irdelenmelidir. İlk 26 sorudan bu türe örnekler 1, 3–7, 14 ve 25 numaralı sorulardır.

İkinci türden sorular konuların ana hatlarını bilen ve biraz da işlem yapma yeteneğini geliştirmiş öğrencilerin yapabileceği türden olanlar. Bunların örnekleri ise 2, 8–13, 15–20, 22–24 numaralı sorulardır.

Üçüncü türden sorular gerek birikim, gerek matematiksel yetenekleri gelişmiş öğrencileri ayırt etmek amacı ile sorulmuş olabilirler. 21 numaralı soru bu türe örnektir.

Ders programlarına göre incelendiğinde ilk 26 sorudan 7'sinin Orta 2 ve 6'sının Orta 3 sorusu olmak üzere 13 tanesinin ortaokul derslerinden, diğer 13 tanesinin ise Lise 1 derslerinden olduğu görülüyor. Oranlardaki isabet tartışılmalıdır. Bir yıl boyunca hazırlanan sorulardan 4 soruda iki basamaklı pozitif doğal sayı ifadesi yanıltıcı olabilir. Zira doğal sayılar tam sayılar içinde düşünüldüklerinde (sıfır dışında) pozitiftirler. Aynı özensizliği 8. soruda da görüyoruz. Sorunun gidişinden aritmetik ortalama anlaşılmasına karşın, açıkca belirtilmesinde