

GERÇEL SAYILARDA DOKUZ TEMEL EŞDEĞERLİK

Nurettin Ergun *

1. Amaç

Matematikteki temel ve önemli kavram ve yöntemlerin pek çoğu gerçel (= reel) sayıların ana özelliklerinden soyutlama ve genelleştirme yoluyla elde edilmiştir dersek hiç abartmış olmayız. Gerçel sayıların kesin, sağlıklı ve eksiksiz inşalarına ulaşmak matematiğin yüzlerce yılını almıştır. Bu nitelikteki inşalara ancak 1870'li yıllarda Heine, Dedekind ve Cantor gibi usta matematikçilerin çabalarıyla ulaşılmıştır. Peki gerçel sayılar nedir? Gerçel sayılar herşeyden önce tam sıralanmış, değişmeli bir Arşimet cisimidir. Yani gerçel sayılar kümesi \mathbb{R} üzerinde değişimlilik özelliğine sahip çarpma ve toplama işlemleri tanımlıdır ve bu işlemler *cisim* aksiyomlarını gerçekleştirir. Okuyucunun cisim adı verilen cebirsel yapıyı az çok tanıdığını varsayıyoruz. Sonra \mathbb{R} kümesinin çarpma ve toplama işlemlerine göre kapalı olan öyle özel bir \mathbb{R}^+ altkütmesi vardır ki, her bir $x \in \mathbb{R}$ için ya $x \in \mathbb{R}^+$, ya $x = 0$, ya da $-x \in \mathbb{R}^+$ bağdaşmaz durumlarından birisi geçerlidir. Bu özel altkütmeye pozitif gerçel sayılar kümesi denir. Ancak ve yalnız $x - y$ bu kümeye ait olduğunda $y < x$ yazılır. Dikkat edilirse ya $x < y$, ya $x = y$, ya da $y < x$ gerçekleşecek, başka bir deyişle farklı iki gerçel sayıdan birisi mutlaka diğerinden "büyük" olacaktır. Bu biçimde tanımlanan büyüklük küçüklük ilişkisine belirlenen sıralamaya *doğrusal sıralama* ya da *tam sıralama* denir. Ancak $x = y$ ya da $x < y$ geçerliyse $x \leq y$ yazılır. Üstelik herhangi bir $x \in \mathbb{R}^+$ için $x < n$ olacak biçimde bir n doğal sayısı vardır. Bu son özelliğe de gerçel sayıların *Arşimet özelliği* denir. Peki bu cebirsel özellikler gerçel sayıları olağanüstü önemli kılmaya yeterli midir? Hayır! Onu gerçekten olağanüstü yapan bu yazıda kısaca değinilecek olan dokuz temel özelliğidir. Bu temel özelliklerin matematiksel mantık açısından tümüyle eşdeğer olduklarını kanıtlamak bu yazının amacı olacaktır. Bu yazıyı, örneğin $a < b$ ve $c \in \mathbb{R}^+$ ise $ac < bc$

gerçeklendiğini kanıtlayabilen ve kavrama isteği ile okuyan her okuyucu kolaylıkla kavrayacaktır inancındayız. Şimdi bu temel 9 özelliği görüp tanımadan önce bazı hazırlıklar yapalım.

2. Hazırlık

$\{1, 2, 3, \dots\}$ doğal sayılar kümesine \mathbb{N} diyeceğiz. $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ eşitsizliklerini gerçekleyen tüm x gerçel sayılarının kümesini her zaman olduğu gibi $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ işaretiyle göstereceğiz. Bu kümeye x_0 gerçel sayısının ε yarıçaplı *açık dolay* ya da *açık komşuluğu* denir. Bu dolay bu yazıda $D(x_0, \varepsilon)$ işaretiyle gösterilecektir. \mathbb{R} kümesinin bir A altkütmesine, ancak ve yalnız, her elemanının uygun bir açık dolayını kapsayabiliyorsa *açık küme* denir. O halde \mathbb{R} kümesinde boş olmayan herhangi bir açık kümenin sayılamaz sonsuz elemanı vardır, neden? $\mathbb{R} \setminus A$ tümleyen kümesi açık küme ise ancak bu takdirde A kümesine *kapalı küme* denir. (a, b) ve (a, ∞) şeklindeki aralıklar, $a < b$ ne olursa olsun açık kümedirler. Gerçekten $x \in (a, b)$ ise, $\varepsilon_x < \min\{x - a, b - x\}$ gerçekleyen pozitif ε_x gerçel sayısı sayesinde $a < x - \varepsilon_x < x + \varepsilon_x < b$ ve dolayısıyla $D(x, \varepsilon_x) \subseteq (a, b)$ gerçekleştiğini kolayca görebiliriz. $y \in (a, \infty)$ ise $\delta_y < y - a$ gerçekleyen pozitif δ_y sayesinde $a < y - \delta_y < y + \delta_y$ ve sonunda $D(y, \delta_y) \subseteq (a, \infty)$ bulunur. Gerek $[0, 1)$ aralığı, gerekse $(0, 1)$ aralığındaki tüm rasyonel sayıların kümesi ne açık ne de kapalıdır, neden? Peki acaba $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ altkütmesi neden kapalıdır? Çünkü tümleyeni olan

$$(-\infty, 0) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right) \cup (1, \infty)$$

kütmesi açıktır, peki neden? Evet haklısınız, herhangi sayıda açık kümenin birleşiminin açık olduğunu kanıtlamak güç değildir. $(-\infty, a)$ aralığının açık ve dolayısı ile tümleyeni $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ açık kümesi olan $[a, b]$ aralığının kapalı olduğunu gözlemek de kolaydır. $\varepsilon^* = \min\{\varepsilon, \delta\}$

* İstanbul Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi

olmak üzere daima $D(x, \varepsilon^*) \subseteq D(x, \varepsilon) \cap D(x, \delta)$ olduğunda iki açık kümenin kesişiminin de açık olduğunu kolayca gözlemleyebiliriz. Bir takım açık kümelerin oluşturduğu bir \mathcal{G} ailesine, ancak ve yalnız $A \subseteq \bigcup\{G : G \in \mathcal{G}\}$ kapsaması geçerliyse, başka bir deyişle her $a \in A$ için $a \in G$ gerçekleşecek biçimde bir $G \in \mathcal{G}$ bulunabiliyorsa, A kümesinin bir *açık örtülüşü* denir. Örneğin kolayca gözlemlenebileceği gibi

$$G = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{3}{2} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

ve

$$G^* = \left\{ \left(\frac{2}{2n+1}, \frac{2}{2n-1} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

açık aralık aileleri sırasıyla $(0, 1)$ ve $E = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ kümelerinin birer açık örtülüşüdür. Oysa yine kolayca görülebileceği gibi \mathcal{G} ailesinin uygun sonlu sayıda üyesinin $(0, 1)$ aralığını "örtbilmesi" olanaklı değildir. Aynen G^* ailesindeki hiçbir sonlu üyeli altaile E kümesini "örtmez." Her açık örtülüşünden seçilmiş uygun sonlu sayıda üye ile örtülebilmeyi başaran bir altkümeye *tıkız küme* (= kompakt küme) denir. Demek ki $(0, 1)$ aralığı ile $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ kümesi tıkız değildir. Dikkat edilirse

$$\mathbb{R} = (-1, 1) \cup (-2, 2) \cup (-3, 3) \cup \dots$$

geçerlidir; oysa sağ yandaki açık aralıkların yalnızca sonlu tanesi ile \mathbb{R} kümesini örtmek olanaklı değildir. Demek ki \mathbb{R} kümesi de tıkız değildir. Peki hangi altkümeler tıkızdır? Bekleyelim! Bir x_0 gerçel sayısına, ancak her $0 < \varepsilon$ için $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ açık dolayında A kümesinden sonsuz tane eleman bulunabilirse, A kümesinin bir *yığılma noktası* denir. Her dolayda A kümesinden sonsuz tane eleman bulunması koşuluyla her dolayda $A \setminus \{x_0\}$ kümesinden en az bir eleman bulunması koşulu, belki şaşırtıcı gelebilir ama, eşdeğer koşullardır. Bu eşdeğerliği göstermeyeceğiz. Bu önermenin tersinin doğru olması gerekmez. Aslında bir gerçel sayılar dizisinin yığılma noktaları, o dizinin yakınsak olan tüm alt-dizilerinin limit noktalarıdır. Söz gelimi $a_n = (-1)^n$ dizisinin yığılma noktaları $x = -1$ ve $x = 1$ 'dir; oysa $\{a_1, a_2, a_3, \dots\} = \{-1, 1\}$ kümesinin, yukarıda anlatılan nedenlerden ötürü hiç yığılma noktası yoktur. Tüm elemanları birbirinden farklı bir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayılar dizisinin tüm yığılma noktaları ile $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ kümesinin

yığılma noktaları ise tastamam aynıdır. Okuyucunun, ancak bir ve yalnız bir yığılma noktasına sahip olan bir gerçel sayılar dizisinin yakınsak olabildiği gerçeğini bildiğini varsayıyoruz. Bu ve benzeri bilgiler için [1]'e bakılabilir. Aynı yazıda supremum ve infimum kavramları da tanımlanmaktadır. Dikkat: Herhangi bir K kapalı altkümesinin tüm yığılma noktaları zorunlu olarak K kümesine ait olurlar; çünkü $\mathbb{R} \setminus K$ açık kümesinin tüm noktalarının, K kümesi ile ayrık olan, yani $\mathbb{R} \setminus K$ tarafından kapsanan, en az bir açık dolay vardı, anımsadık değil mi? Son olarak, $[a, b]$ şeklindeki bir aralık tarafından kapsanabilen bir altkümeye gerçel sayılarda *sınırlı küme* denildiğini belirtelim. Yukarıda sözü geçen E kümesi sözgelimi sınırlıdır, neden? Şimdi de birkaç temel eşitsizliği kısaca elde edelim. $n \in \mathbb{N}$ ve $x, y \in \mathbb{R}$ ne olursa olsun geçerli olan

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

özdeşliğini göstermek çok kolaydır; sağ yandaki ikinci parantez içindeki tüm terimleri önce x ile sonra $-y$ ile çarpıp gerekli kısaltmaları yapmak yeterlidir. Hem x ve hem de y sıfırdan farklı olduklarında, sözü edilen ikinci parantez içinde toplama katılan terim sayısı n 'dir. O halde x pozitif gerçel sayısı ve $n \in \mathbb{N}$ ne olursa olsun

$$n \leq (1+x)^{n-1} + (1+x)^{n-2} + \dots + (1+x) + 1$$

olduğundan, yukardaki özdeşlik nedeniyle kolayca

$$(1+x)^n - 1 = (1+x)^n - 1^n = x((1+x)^{n-1} + (1+x)^{n-2} + \dots + (1+x) + 1)$$

ve sonuçta ünlü Bernoulli eşitsizliği

$$1 + nx \leq (1+x)^n \quad (x \in \mathbb{R}^+)$$

elde edilir.¹ Dikkat edilirse özellikle $x = 1$ olarak $n < 1 + n \leq 2^n$ bulunur. Benzer biçimde aynı özdeşlik ve benzer düşüncelerle $0 < x < 1$ için önce $1 - (1-x)^n \leq nx$ ve dolayısıyla $1 - nx \leq (1-x)^n$ geçerli olduğunu görebiliriz. İki teriminin açılım bağıntısı olan

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n}y^n$$

¹ Bu eşitsizlik aslında $-1 < x$ gerçekleyen tüm x gerçel sayıları için geçerlidir.

ve onun kolay bir sonucu olan

$$2^n = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

sanıyoruz ki okur tarafından bilinmektedir.

3. Dokuz Temel Özellik

(1) **Dedekind kesim özelliği:** \mathbb{R} kümesi, ikisi birden boştan farklı ve her $a \in A$ ve her $b \in B$ için $a < b$ gerçekleşecek biçimde A ve B altkümelerinin birleşimi ise, ya

$$A = (-\infty, \gamma], \quad B = (\gamma, \infty),$$

ya da

$$A = (-\infty, \gamma), \quad B = [\gamma, \infty)$$

gerçeklenecek biçimde (kesim sayısı adını alan) tek bir γ gerçel sayısı vardır.

(2) **Supremum özelliği:** \mathbb{R} 'nin boştan farklı ve üstten sınırlı her altkümesinin (tek) bir supremumu vardır.

(3) **İnfimum özelliği:** \mathbb{R} 'nin boştan farklı ve alttan sınırlı her altkümesinin (tek) bir infimumu vardır.

(4) **Bağlantılılık özelliği:** \mathbb{R} kümesinde hem açık hem kapalı hiç bir özaltküme yoktur.

(5) **SMDY özelliği:** \mathbb{R} kümesindeki her sınırlı monoton dizi yakınsaktır.

(6) **Heine-Borel özelliği:** \mathbb{R} kümesinde kapalı ve sınırlı her aralık tıktır.

(7) **Bolzano-Weierstrass özelliği:** Sonsuz noktalı her sınırlı gerçel sayılar kümesinin en az bir yığılma noktası vardır.

(8) **Cantor azalan aralıklar özelliği:** Her $n \in \mathbb{N}$ için $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ gerçekleyen ve uzunlukları sifra yakınsayan herhangi bir kapalı ve sınırlı aralıklar dizisinin kesişim kümesi tek elemanlıdır.

(9) **Tamlık özelliği:** \mathbb{R} kümesindeki her Cauchy dizisi yakınsaktır.

4. Eşdeğerlik Kanıtlanması

Yukarıdaki dokuz özellik birbirlerine eşdeğerdirler. Kanıtlama (1) \Rightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1) ve (2) \Rightarrow (6) \Rightarrow (7) \Rightarrow (5) \Rightarrow (1) gerektirme zincirleri gösterilerek yapılacaktır. (2) \Rightarrow (8) \Rightarrow (9) \Rightarrow (2) gerektirme zinciri ise, Cauchy dizilerine ait temel bazı bilgileri elde etmek bu yazıyı uzatacağı için yapılmayacaktır.

(1) \Rightarrow (2): Boştan farklı ve üstten sınırlı herhangi bir $A \subseteq \mathbb{R}$ altkümesinin kesin üst sınırlar kümesi olan

$$\begin{aligned} & \{x \in \mathbb{R} : \text{her } a \in A \text{ için } a < x\} \\ & = \{x \in \mathbb{R} : A \subseteq (-\infty, x)\} \end{aligned}$$

kümesi U_A ile gösterilsin. x_0 gerçel sayısı A kümesinin bir üst sınırı ise $1 + x_0$ gerçel sayısı U_A kümesine aittir. $A \cap U_A = \emptyset$ nedeniyle $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R} \setminus U_A$ ve üstelik her $y \in \mathbb{R} \setminus U_A$ ve her $x \in U_A$ için $y < x$ gerçekleştiği kolayca görülebildiğinden, (1) özelliği nedeniyle bu parçalanışın γ gibi tek bir kesim sayısı vardır. $\gamma = \sup A$ olur, neden? Çünkü ister $\mathbb{R} \setminus U_A = (-\infty, \gamma)$ ve $U_A = (\gamma, \infty)$, isterse $\mathbb{R} \setminus U_A = (-\infty, \gamma)$ ve $U_A = [\gamma, \infty)$ gerçekleşmiş olsun, her $a \in A$ için $a \leq \gamma$ gerçekleştiği ve her bir $0 < \varepsilon$ için $\gamma - \varepsilon \notin U_A$ nedeniyle $\gamma - \varepsilon \leq a_\varepsilon$ gerçekleyen bir $a_\varepsilon \in A$ elemanının varlığı kolaylıkla görülecektir. Bunlar $\gamma = \sup A$ demektir.

(2) \Leftrightarrow (3): Altan sınırlı ve boş olmayan bir $A \subseteq \mathbb{R}$ altkümesi için $-A = \{-a : a \in A\}$ kümesinin boş olmadığını, üstten sınırlı olduğunu ve $-\sup(-A) = \inf A$ gerçekleştiğini görmek güç değildir. Ashında (2) ve (3) özellikleri denktir, neden?

(3) \Leftrightarrow (2) \Rightarrow (4): $A \neq \mathbb{R}$ altkümesinin hem açık hem kapalı olduğunu varsayalım. Bir $x_0 \notin A$ gerçel sayısı var olduğundan, her $a \in A$ için ya $a < x_0$, ya da $x_0 < a$ gerçekleşir. O halde $A = (A \cap (-\infty, x_0)) \cup ((x_0, \infty) \cap A)$ olur. $A \cap (-\infty, x_0)$ kesişim kümesi boş olmak zorundadır. Apaçıktır ki x_0 gerçel sayısı ile üstten sınırlı olan bu açık küme boş olmasaydı, (3) \Leftrightarrow (2) özelliği nedeniyle $\alpha = \sup(A \cap (-\infty, x_0))$ supremumu var olacak, $\alpha \leq x_0$ gerçekleşecek ve üstelik α gerçel sayısı A 'nın bir yığılma noktası olacaktır; çünkü her $0 < \varepsilon$ için $\alpha - \varepsilon < a_\varepsilon < x_0$ ve dolayısıyla $\alpha - \varepsilon < a_\varepsilon < \alpha$ gerçekleşecek biçimde bir tane (ashında sonsuz tane) $a_\varepsilon \in A$ vardır, neden? A kapalı olduğundan $\alpha \in A$ ve sonuçta $\alpha < x_0$ bulunacaktı. O halde A açık olduğundan $D(\alpha, \delta_0) \subseteq A$ gerçekleyen $0 < \delta_0$ vardır. Şimdi

$$\alpha < y < \min\{x_0, \alpha + \delta_0\}$$

gerçekleyen y gerçel sayısı için

$$y \in [\alpha, \alpha + \delta_0] \cap (-\infty, x_0) \subseteq A \cap (-\infty, x_0)$$

nedeniyle $y \leq \alpha$ çelişkili sonucu doğacaktı. Tümüyle benzer düşüncelerle $(x_0, \infty) \cap A$ kesişim kümesi boş olmalıdır. Sonuçta bunların birleşimi olan A boş olmak zorundadır. Demek ki \mathbb{R} 'nin

boş olmayan hiçbir özaltkümeleri hem açık hem kapalı olamaz.

(4) \Rightarrow (1): Boştan farklı A ve B altkümeleri (i) $\mathbb{R} = A \cup B$ ile (ii) her $a \in A$ ve her $b \in B$ için $a < b$ koşullarını gerçeklesin. Her $a \in A$ için $(-\infty, a) \subseteq A$ ve her $b \in B$ için $(b, \infty) \subseteq B$ gerçekleştiği apaçiktır. Bu parçalanışın bir kesim sayısı tanımlanamazdı, özellikle her bir $a \in A$ için $a < x_a$ gerçekleyen en az bir $x_a \in A$ var olurdu, neden? Benzer olarak her bir $b \in B$ için $y_b < b$ gerçekleyen bir $y_b \in B$ var olurdu.

$$\delta_a = \frac{x_a - a}{2} \quad \text{ve} \quad \delta_b = \frac{b - y_b}{2}$$

yazılırsa her $a \in A$ ve her $b \in B$ için $D(a, \delta_a) \subseteq A$ ve $D(b, \delta_b) \subseteq B$ gerçekleşirdi. Sonuçta A ve B kümeleri açık (ve birbirlerinin tümleyeni olduklarından) aynı zamanda kapalı olurlardı. Bu (4) özelliğine aykırıdır.

(2) \Rightarrow (6): $[a, b]$ kapalı ve sınırlı aralığı $\mathcal{G} = \{G_\alpha : \alpha \in I\}$ açık kümeler ailesi tarafından örtülsün. Ancak ve yalnız bir $x \in [a, b]$ gerçel sayısı için $[a, x]$ aralığı bu ailenin sonlu tane uygun üyesi tarafından örtülebiliyorsa $x \in A$ yazılınsın. Amacımız $b \in A$ göstermektir. Böyle tanımlanan A kümesi boş değildir, çünkü $a \in G_{\alpha_0}$ olacak biçimde bir $\alpha_0 \in I$ indisi ve G_{α_0} kümesi açık olduğundan $D(a, \delta_a) \subseteq G_{\alpha_0}$ gerçekleşecek biçimde $0 < \delta_a$ vardır. $(a, a + \delta_a) \subseteq A$ kapsamı apaçiktır. $A \subseteq [a, b]$ ve (2) özelliği nedeniyle $\xi = \sup A$ vardır ve $a + \frac{\delta_a}{2} \leq \xi \leq b$ olur. $\xi < b$ olsaydı $\xi \in G_{\alpha_1}$ gerçekleyen pozitif ε_0 sayesinde

$$\begin{aligned} \left[a, \xi + \frac{\varepsilon_0}{2} \right] &= \left[a, \xi - \frac{\varepsilon_0}{2} \right] \cup \left[\xi - \frac{\varepsilon_0}{2}, \xi + \frac{\varepsilon_0}{2} \right] \\ &\subseteq [a, y_0] \cup G_{\alpha_1} \end{aligned}$$

elde edilirdi. Burada, supremum tanımı gereği var olan $y_0 \in A$ elemanı

$$a < \xi - \frac{\varepsilon_0}{2} < y_0 < \xi = \sup A$$

gerçeklemektedir. Sonuçta $[a, \xi + \frac{\varepsilon_0}{2}]$ aralığı \mathcal{G} ailesinin sonlu tane üyesi tarafından örtülebilir olduğundan $\xi + \frac{\varepsilon_0}{2} \in A$ ve $\xi + \frac{\varepsilon_0}{2} \leq \sup A = \xi$ çelişkisi doğardı. Demek ki hem $\xi = b$ ve hem de $b \in A$ gerçekleşmesi gerektiği artık anlaşılmuştur, nasıl?

(6) \Rightarrow (7): Sonsuz elemanlı $A \subseteq \mathbb{R}$ altkümeleri $A \subseteq [a, b]$ gerçeklesin. A kümesinin hiç yığılma noktası olmasaydı her $x \in A$ için öyle bir $\varepsilon_x \in \mathbb{R}^+$ olurdu ki $(D(x, \varepsilon_x) - \{x\}) \cap A = \emptyset$ ve

dolayısıyla $D(x, \varepsilon_x) \cap A = \{x\}$ gerçekleşir. $[a, b]$ kapalı ve sınırlı aralığı tüm bu $[x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x]$ açık aralıkları ile $\mathbb{R} \setminus A$ açık kümesinin (bu küme neden açıktır?) oluşturduğu aile tarafından örtülür, nasıl? Oysa bu örtülüğün herhangi bir üyesi A kümesinden en fazla bir eleman kapsadığından bu ailenin sonlu sayıda üyesinin $[a, b]$ aralığını (ve sonuçta A kümesini) örtmesi (6) hipotezine aykırıdır. Demek ki A 'nın en az bir yığılma noktası var olmalıdır.

(7) \Rightarrow (5): $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ gerçel sayılar dizisi monoton (örneğin monoton artan) ve sınırlı olsun. O halde $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots \leq \alpha_0$ gerçekleşir. Bu dizinin tüm elemanlarının kümesi $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ apaçiktır ki $A \subseteq [a_1, \alpha_0]$ nedeniyle sınırlıdır. Eğer A kümesinin sonsuz elemanı varsa (7) özelliği nedeniyle A kümesinin var olan yığılma noktası $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ dizisinin yığılma noktası ve aslında limit noktası olur, neden? A kümesinin yalnızca sonlu tane elemanı varsa, her $n \geq n_0$ için $a_n = a_{n_0}$ gerçekleşecek biçimde bir n_0 doğal sayısı vardır ve dizi elbette a_{n_0} gerçel sayısına yakınsar.

(5) \Rightarrow (2): Üstten sınırlı ve boş olmayan $A \subseteq \mathbb{R}$ altkümelerinin elbette x_0 gibi bir kesin üst sınırı vardır. Şimdi $a_0 \in A$ alınsın, sabit tutulsun ve $0 < \delta = x_0 - a_0$ yazılınsın. U_A her zaman olduğu gibi A 'nın kesin üst sınırlarının kümesini gösterebilir.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \leq x_n \leq x_0$,

$$x_n \in U_A \quad \text{ve} \quad x_n - \frac{\delta}{2^n} \notin U_A \quad (*)$$

gerçekleyen bir $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ kesin üst sınırlar dizisinin varlığını tümevarımla tanımlayabiliriz. $[a_0, x_0]$ aralığının orta noktası $\frac{1}{2}(x_0 + a_0) \in U_A$ ise $x_1 = \frac{1}{2}(x_0 + a_0)$, yok eğer $\frac{1}{2}(x_0 + a_0) \notin U_A$ ise $x_1 = x_0$ tanımlansın. Kolaylıkla $x_1 \leq x_0$, $x_1 \in U_A$ ve $x_1 - \frac{\delta}{2} \notin U_A$ gerçekleşir. (*) koşulları gerçekleşecek şekilde x_1, x_2, \dots, x_n tanımlanmış olsun. $[x_n - \frac{\delta}{2^n}, x_n]$ aralığının orta noktası olan $\frac{1}{2}(2x_n - \frac{\delta}{2^n}) = x_n - \frac{\delta}{2^{n+1}}$ eğer U_A kümesine aitse $x_{n+1} = x_n - \frac{\delta}{2^{n+1}}$; ait değilse $x_{n+1} = x_n$ tanımlansın. Yine kolayca $x_{n+1} \leq x_n$, $x_{n+1} \in U_A$ ve $x_{n+1} - \frac{\delta}{2^{n+1}} \notin U_A$ gözlenecektir. Monoton azalan $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ dizisinin (5) özelliği ile varlığı güvence altına alınan $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ limit noktası, $\ell = \sup A$ gerçektir; çünkü her $a \in A$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $a < x_n$ nedeniyle kolayca $a \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell$ geçerlidir ve üstelik $0 < \varepsilon$ verildiğinde Arşimet özelliği nedeniyle var olan ve $\frac{\delta}{\varepsilon} < n$ gerçekleyen $n \in \mathbb{N}$ yardımıyla $\frac{\delta}{2^n} < \varepsilon$ ve

$\ell - \varepsilon \leq x_n - \varepsilon < x_n - \frac{\delta}{2^n}$ ve $x_n - \frac{\delta}{2^n} \notin U_A$ nedeniyle $\ell - \varepsilon < x_n - \frac{\delta}{2^n} < a_n$ olacak biçimde bir $a_n \in A$ var olmak zorundadır.

5. Uyarı ve Bir Uygulama

Gerçel sayıların Dedekind kesim özelliği gerçekleşecek biçimde bir inşası ilk kez büyük Alman usta Richard Dedekind tarafından 1872'de verilmiştir. Dolayısıyla gerçel sayılar (i) tam sıralanmış, (ii) değişmeli, (iii) Dedekind kesim özelliğine sahip, bir (iv) Arşimet cisimidir. Sonuçta \mathbb{R} kümesi için (1) özelliği ve dolayısıyla yukarıdaki tüm dokuz özellik geçerlidir ve yukarıda verilen eşdeğerlik kanıtlaması, aynı zamanda bu özelliklerin \mathbb{R} kümesindeki geçerliliklerinin kanıtlanması olmaktadır. Şimdi supremum özelliğinin basit fakat olağanüstü önemli bir uygulamasını görelim: Köklü değerlerin (radikallerin) varlığı!

Önerme. $0 < a$ gerçel sayısı ve n sabit doğal sayısı verildiğinde $x^n = a$ gerçekleyen (tek) bir pozitif x gerçel sayısı vardır.

Kanıtlama. $E = \{y \in \mathbb{R} : y^n < a\}$ kümesi boş değildir, çünkü $0 \in E$ 'dir. Arşimet özelliği nedeniyle $\frac{1}{n_0} < n_0$ gerçekleyen n_0 doğal sayısı için $(\frac{1}{n_0})^n < \frac{1}{n_0} < a$ nedeniyle $\frac{1}{n_0} \in E$ gerçekleşir. O halde Bernoulli eşitsizliği yardımıyla $0 < x = \sup E \leq 1 + a$ geçerlidir, neden? Amacımız $x^n < a$ ve $a < x^n$ gerçekleşemeyeceğini kanıtlamak olacaktır. $x^n < a$ geçerli olsaydı, Arşimet özelliği ile $\frac{(2^n - 1)(1+x)^{n-1}}{a - x^n} < m$ gerçekleyen $m \in \mathbb{N}$ var olur ve sonuçta

$$\left(x + \frac{1}{m}\right)^n = x^n + \binom{n}{1} \frac{x^{n-1}}{m} + \binom{n}{2} \frac{x^{n-2}}{m^2} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{m^n}$$

$$\begin{aligned} & + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{m^n} \\ & < x^n + \frac{(1+x)^{n-1}}{m} \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2} \right. \\ & \quad \left. + \dots + \binom{n}{n} \right] \\ & = x^n + \frac{(2^n - 1)(1+x)^{n-1}}{m} < a \end{aligned}$$

nedeniyle $x + \frac{1}{m} \leq \sup E = x$ çelişkisi doğardı. Eğer $a < x^n$ olsaydı, bu kez de $\frac{x}{m} + \frac{nx^{n-1}}{x^n - a} < N$ gerçekleyen $N \in \mathbb{N}$ sayesinde

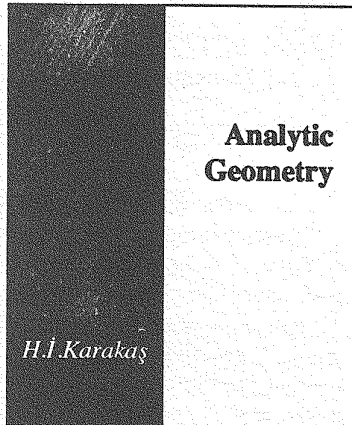
$$\left(x - \frac{1}{N}\right)^n = x^n \left(1 - \frac{1}{Nx}\right)^n \geq x^n \left(1 - \frac{n}{Nx}\right) > a$$

olduğunu gözleyerek, supremum tanımı gereği var olan uygun bir $y \in E$ yardımıyla $a < (x - \frac{1}{N})^n < y^n$ ve sonuçta $y \notin E$ çelişkisi doğardı. Demek ki $x^n = a$ gerçekleşmelidir. Varlığı kanıtlanan bu pozitif x gerçel sayısı apaçıktır ki tektir ve $\sqrt[n]{a}$ işareti ile gösterilir.

Not. Dedekind'in inşasını öğrenmek isteyen okuyuculara aşağıdaki iki kitabı salık veririz. [2] bir klasik, [3] daha çağdaştır.

KAYNAKÇA

- [1] Y. Avcı & N. Ergun, *Limitler, Limitler, Matematik Dünyası*, 4, Sayı 1, 12-16 (1994).
- [2] E. Landau, *Foundations of Analysis*, Chelsea, 1951.
- [3] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3. baskı, McGraw-Hill, New York, 1976.



- 1 Fundamental Principle of Analytic Geometry
- 2 Cartesian Coordinates
- 3 Vectors in the Plane
- 4 Conic Sections
- 5 Vectors in Three Space

254 sayfa

İsteme Adresi: ODTÜ Matematik Bölümü