RASYONEL KÖK TEOREMİ

Emre Alkan *

Bu yazıda rasyonel kök teoremini ele alacağız. $\sqrt{2}$ sayısının irrasyonel olduğunu hepimiz bilmekteyiz. Daha genel bir sonuç şöyledir.

N bir sayının m kuvveti değilse $\sqrt[m]{N}$ irrasyoneldir. Tersine $\sqrt[m]{N} = \frac{a}{b}$, $(a,b) = 1$ olsun $Nb^m = a^m$, a^m'in asal çarpanlarından herbirinin kuvveti m ile bölünür. Dolayısıyla N'nin asal çarpan kuvvetleri de m ile bölünmelidir ki bu mümkün değildir. $\sqrt[m]{N}$ sayısının $x^m - N = 0$ denkleminin bir kökü olduğuna dikkat edelim.

Teorem: (Rasyonel Kök Teoremi) c_i, $i = 1, 2, \cdots, m$ **tamsayı olmak üzere** $x^m + c_1x^{m-1} + \cdots + c_m = 0$ **denkleminin her kökü ya tamsayı ya da irrasyoneldir.**

Kanıt: $x = \frac{a}{b}$, $(a,b) = 1$ ve $b > 1$ denklemin bir kökü olsun. $a^m + c_1ba^{m-1} + \cdots + c_{m-1}b^{m-1}a + b^mc_m = 0$ elde edilir ki kolayca $b|a^m$ olacağı çıkar. $b > 1$ ise $p|b$ şeklinde bir p asal sayısı bulunabilir. $p|a^m$ ve $p|a$ elde edilir ki bu $(a, b) = 1$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla kökler ya tamsayı ya da irrasyoneldir.

Şimdi teoremin kullanılışını sergilemek amacıyla uygulamalar yapacağız.

Problem: $f(x)$ rasyonel katsayılı, derecesi en az 2 olan bir polinom olsun. Her $n \geq 1$ için, $f(a_{n+1}) = a_n$ olacak biçimde a_n rasyonel sayı dizisi var ise her $n \geq 1$ için $a_{n+k} = a_n$ olacak şekilde bir $k \geq 1$ sayısının varlığını gösteriniz.

Önce a_n dizisinin sınırlı olduğunu görelim. $f(x)$'in derecesi en az 2 olduğundan, $|x| \to \infty$ iken $|\frac{f(x)}{x}| = \frac{|f(x)|}{|x|} \to \infty$ yazılabilir. Şu halde $|a_1| \leq M$ ve $|x| \geq M$ için $|f(x)| \geq |x|$ olacak şekilde bir M sayısı bulunabilir. Herhangi bir $n > 1$ için $|a_n| > M$ ise $|a_{n-1}| = |f(a_n)| \geq |a_n| > M$ ve bu yinelenerek, $|a_1| > M$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla her $n \geq 1$ için $|a_n| \leq M$ olmalıdır.

Şimdi a_n dizisinin sonlu sayıda farklı terimden oluştuğunu görelim. Bunun için, her $n \geq 1$ ve a_n terimi hakkında Na_n tamsayı olacak şekilde bir N sayısı bulacağız. N sayısının ne olacağını kestirmek güçtür. Bir tümevarım kanıtı düşündüğümüzden tümevarım adımını ele alalım. Yani Na_n bir tamsayı olsun. Na_{n+1}'in $f(\frac{x}{N}) - a_n$ polinomunun bir kökü olduğu açıktır. b_i'ler ve c uygun tamsayılar olmak üzere, $f(x) = (b_kx^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots b_0)/c$ şeklinde yazılabilir. $cf(\frac{x}{N}) = b_k\frac{x^k}{N^k} + b_{k-1}\frac{x^{k-1}}{N_{k-1}} + \cdots + b_0$ ve $\frac{cN^k}{b_k}f(\frac{x}{N}) = x^k + b_{k-1}\frac{N}{b_k}x^{k-1} + \cdots + \frac{N^k}{b_k}$. Şu halde N sayısı b_k'nin bir tamkatı olacak şekilde seçilirse, $\frac{cN^k}{b_k}\{f(\frac{x}{N} - a_n\}$ tamsayı katsayılı monik bir polinom olur. Rasyonel kök teoremi ile Na_{n+1}'de bir tamsayı olmalıdır. Böylece tümevarım adımı tamamlanır. Tümevarımın başlangıcı için $a_1 = \frac{a}{b}$ ise $N = bb_k$ seçmek yeterli olur.

Böylece şunu elde ederiz. Sonsuz tane m_i sayıları için, $a_{m_i} = a_{m_i+k_i}$ olacak şekilde en küçük bir $k_i \geq 1$ sayısı vardır. Kolayca $a_{m_i}, a_{m_{i+1}}, \cdots, a_{m_{i+k_i-1}}$ terimleri farklıdır. Sonlu tane farklı terim olduğundan, sonsuz tane m_j sayıları için $a_{m_j} = a_{m_j+k}$ ve $k \geq 1$ olacak şekilde bir k sayısı vardır. Rasgele bir a_n alalım $m_j > n$ olacak şekilde bir m_j alırsak, $a_{m_j} = a_{m_{j+k}}$ olur. Bu eşitliğin her iki tarafına yeteri kadar f uygulanırsa, istenen $a_n = a_{n+k}$ elde edilir.

Teorem: (i) n **pozitif tamsayısı için,** $\cos\frac{\pi}{n}$ **sadece** $n = 1, 2, 3$ **iken rasyoneldir (ii)** $\sin\frac{\pi}{n}$ **ise sadece** $n = 1, 2, 6$ **iken rasyoneldir.**

Kanıt: $P_m(z)$, $m = 1, 2, \cdots$ polinom dizisini şöyle tanımlayalım. $P_1(z) = z - 1$, $P_2(z) = z^2 - z - 1$ ve $m > 2$ için $P_m(z) = zP_{m-1}(z) - P_{m-2}(z)$. Tümevarımla, $P_m(z + \frac{1}{z}) = \frac{z^{2m+1}+1}{z^m(z+1)}$ olduğunu görelim. $m = 1$ ve $m = 2$ için kolaylıkla eşitlik sağlanabilir. Tümevarım adımı için, $P_m(z + \frac{1}{z}) = (z + \frac{1}{z})P_{m-1}(z + \frac{1}{z}) - P_{m-2}(z + \frac{1}{z})$ yazılabilir. $P_{m-1}(z + \frac{1}{z})$ ve $P_{m-2}(z + \frac{1}{z})$ için tümevarım hipotezleri yerine konursa, sav kanıtlanmış olur. Şimdi yeni bir $Q_m(z)$, $m = 1, 2, \cdots$ polinom dizisini şöyle tanımlıyalım. $Q_1(z) = z + 1, Q_2(z) = z^2 + z - 1$ ve $m > 2$ için $Q_m(z) = zQ_{m-1}(z) - Q_{m-2}(z)$. Benzer şekilde tümevarımla, $Q_m(z + \frac{1}{z}) = \frac{z^{2m+1}}{z^m(z-1)}$ olduğu görülebilir. Şimdi $m \geq 1$ için $P_m(z) =$

* Boğaziçi Ünivresitesi, Matematik Bölümü öğrencisi

0 ve $Q_m(z) = 0$ denklemlerinin köklerini bulmaya çalışacağız. Kolayca $P_m(z)$ ve $Q_m(z)'$ nin z'ye göre m derece monik polinomlar olduğu görülebilir. Dolayısıyla Cebrin Ana teoremine göre $\mathbb{C}$'de m tane kök vardır. Eğer z, $\frac{z^{2m+1}+1}{z^m(z+1)} =$ 0'ı sağlıyorsa, $z + \frac{1}{z}, P_m(z) = 0$ denkleminin bir köküdür. Kolayca, $P_m(z + \frac{1}{z}) = 0$ denkleminin tüm kökleri, $z = \cos\frac{k\pi}{2m+1} + i\sin\frac{k\pi}{2m+1}$, $k = 1, 2, \cdots, 2m$ olarak verilir. Böylece $z + \frac{1}{z} = 2\cos\frac{k\pi}{2m+1}$, $k = 1, 2, \cdots, 2m$ olur. Şimdi şunu gözleyelim. Eğer z, $Q_m(z + \frac{1}{z}) = 0$ denkleminin bir kökü ise $-z$ de $P_m(z + \frac{1}{z}) = 0$ denkleminin bir köküdür. Böylece $Q_m(z + \frac{1}{z}) = 0$ denkleminin tüm kökleri, $z = \cos\frac{k2\pi}{2m+1} + i\sin\frac{k2\pi}{2m+1}$, $k = 1, 2, \cdots, 2m$ ile verilir. $z + \frac{1}{z} = 2\cos\frac{k2\pi}{2m+1}$, $k = 1, 2, \cdots, m$ olur ki böylece $Q_m(z) = 0$ denkleminin m kökü $z = 2\cos\frac{2k\pi}{2m+1}$, $k = 1, 2, \cdots, m$ olarak belirlenir. $-z = 2\cos(\pi - \frac{2k\pi}{2m+1})$, değerinin kolayca $P_m(z) = 0$ denkleminin bir kökü olduğu görülebilir. Böylece $P_m(z) = 0$'ın tüm kökleri $2\cos\frac{(2m+1-2k)\pi}{2m+1}$, $k = 1, 2, \cdots, m$ veya eşdeğer olarak $2\cos\frac{(2k-1)\pi}{2m+1}$, $k = 1, 2, \cdots, m$ şeklinde elde edilir. $k = 1$ alalım. Böylece $2\cos\frac{\pi}{2m+1}$, $P_m(z) = 0$'ın bir köküdür. $P_m(z)$ tamsayı katsayılı ve monik bir polinom olduğundan, rasyonel kök teoremi ile $2\cos\frac{\pi}{2m+1}$ ya tamsayıdır ya da irrasyoneldir. Tamsayı ise ancak $2\cos\frac{\pi}{2m+1} = 1$ olabilir. Bu ise $n = 3$ halidir. $\cos\pi$ ve $\cos\frac{\pi}{2}$'nin rasyonelliği açıktır. Her $n > 3$ tek sayısı için, $\cos\frac{\pi}{n}$'in irrasyonel olduğunu gördük. $n = 2^k r$, $2 \nmid r$ ve $k \geq 1$ olsun. $\cos\frac{\pi}{2^k r}$ rasyonel ise, $2\cos^2\frac{\pi}{2^k r} - 1 = \cos\frac{\pi}{2^{k-1} r}$'de rasyonel olur. Böylece devam edilirse, $\cos\frac{\pi}{r}$ rasyonel olur ki r tek olduğundan bu mümkün değildir. Burada $r = 1$ ve $r = 3$ durumlarını ayrıca ele almak gerekir. $r = 1$ için $n = 2^k$ olur. $\cos\frac{\pi}{2^k}$ rasyonel ise, $2\cos^2\frac{\pi}{2^k} - 1 = \cos\frac{\pi}{2^{k-1}}$'de rasyonel olur. Böylece devam ederek, $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ değerinin rasyonel olacağı elde edilir ki bu mümkün değildir. $r = 3$ için, $n = 2^k 3$ olur. Benzer şekilde, $\cos\frac{\pi}{2^k 3}$ rasyonel ise $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ değerinin rasyonel olacağı elde edilir ki bu da mümkün değildir. Böylece (i) kanıtlanmış olur. (ii) kısmını kanıtlamak için, $\sin\frac{\pi}{n}$ sayılarını ele alalım. $n = 2^k r$, $2 \nmid r$, $k \geq 2$ ve $r \geq 3$ olsun. $\sin\frac{\pi}{2^k r}$ rasyonel ise $\cos\frac{\pi}{2^{k-1} r} = 1 - \sin^2\frac{\pi}{2^k r}$ rasyonel olur. $k - 1 \geq 1$ ve $r \geq 3$ olduğundan bu mümkün değildir. $k = 1$ ise $n = 2r$ olur. $r > 3$ için kolayca çelişki elde edilir. $r = 1$ ve $r = 3$ için $\sin\frac{\pi}{2}$ ve $\sin\frac{\pi}{6}$ rasyonel olur. Öte yandan $r = 1$ ise $n = 2^k$ olur. $k = 1, 2$ halini biliyoruz. $k \geq 3$ kabul edelim. $\sin\frac{\pi}{2^k}$ rasyonel ise, $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$'nin rasyonel olduğu çıkar ki bu yine mümkün değildir. Şu halde n çift ise $\sin\frac{\pi}{n}$ sadece $n = 2$ ve $n = 6$ hallerinde rasyonel olur. Şimdi n tek olsun. $k = 1$ alalım. Böylece $2\cos\frac{2\pi}{2m+1}$, $Q_m(z) = 0$'in kökü olur. $Q_m(z)$ tamsayı katsayılı ve monik bir polinom olduğundan, rasyonel kök teoremi ile $2\cos\frac{2\pi}{2m+1}$ ya tamsayıdır ya da irrasyoneldir. $2\cos\frac{2\pi}{2m+1} = 2$ ise $\cos\frac{2\pi}{2m+1} = 1$ mümkün değil, $2\cos\frac{2\pi}{2m+1} = -2$ ise $\cos\frac{2\pi}{2m+1} = -1$ ve $2m + 1 = 2$ mümkün değil, $2\cos\frac{2\pi}{2m+1} = -1$ ise $m = 1$ olur. $2\cos\frac{2\pi}{2m+1} = 1$ ise $2m + 1 = 6$ mümkün değil. $2\cos\frac{2\pi}{2m+1} = 0$ ise $2m + 1 = 4$ mümkün değil. Dolayısıyla $\cos\frac{2\pi}{n}$ (n tek) sadece $n = 1, 3$ iken rasyoneldir. Eğer $n > 3$ tek sayısı için $\sin\frac{\pi}{n}$ rasyonel ise, $\cos\frac{2\pi}{n} = 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{n}$ rasyonel olur ki bu mümkün değil. $\sin\frac{\pi}{n}$, $n = 1$ için rasyonel ve $n = 3$ için irrasyonel olduğundan (ii) kanıtlanmış olur.

Şimdi bu teoremin geometrik bir uygulamasını vereceğiz.

Teorem: Kartezyen düzlemde yarıçap uzunluğu rasyonel olan bir çember üzerinde tüm köşe koordinatları rasyonel olan bir düzgün n-gen ($n \geq 3$) bulunamaz. ($n = 4$ hariç)

Tersine tüm köşe koordinatları rasyonel olan bir n-genin varlığını kabul edelim. Şu yardımcı sonucu kullanacağız.

Önerme: Köşe koordinatları $(x_1, y_1)(x_2, y_2)(x_3, y_3)$ olan bir üçgenin alanı,

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

determinantı ile verilir. Eğer köşe koordinatları rasyonel ise alan da rasyonel olur.

Kanıtı okuyucu kolayca yapabilecektir.

Düzgün n-genin alanı, sonlu sayıda ve herhangi ikisinin alanları kesişmeyecek şekilde üçgenlerin toplamı olarak yazılabilir. Tüm köşe koordinatları rasyonel olduğundan, Lemma ile n-genin alanı rasyonel olacaktır.

R rasyonel olmak üzere, çemberin yarıçapı ise n-genin alanı, $\frac{nR^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$ ile verilir. Kolayca $\sin\frac{2\pi}{n}$'in rasyonel olması gerektiği anlaşılır. Bunun için $\sin\frac{2\pi}{n}$ sayılarını rasyonellik bakımından inceleyelim. Şu yardımcı sonucu ele alacağız.

Önerme: $n \geq 3$ ise, $\sin\frac{2\pi}{n}$ sadece $n = 4$ ve $n = 12$ iken rasyoneldir.

Kanıt: n çift ise $n = 2m$, $m \geq 2$ şeklindedir. $\sin\frac{2\pi}{n} = \sin\frac{\pi}{m}$ olur. Teorem kulkanılırsa $\sin\frac{\pi}{m}$ sadece $m = 2,6$ iken rasyonel olur. Böylece, $\sin\frac{2\pi}{n}$, $n = 4,12$ iken rasyonel olur. n tek olsun. $\sin\frac{2\pi}{n}$ rasyonel ise, $\cos\frac{2^2\pi}{n} = 1 - 2\sin^2\frac{2\pi}{n}$ rasyonel olur. Kolayca her $k \geq 2$ için $\cos\frac{2^k\pi}{n}$ rasyonel olur. $k = \phi(n)$ alalım. Euler teoremi ile, $n|2^{\phi(n)} - 1$ olacağından, $\cos\frac{\pi}{n} = \cos\frac{2^k\pi}{n}$ ya da $\cos\frac{\pi}{n} = -\cos\frac{2^k\pi}{n}$ elde edilir. $\cos\frac{\pi}{n}$ $n = 1,2,3$ dışında irrasyonel olduğundan çelişki elde edilir $n \geq 3$ olduğundan, $n = 3$ haline ayrıca bakılırsa, $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olarak irrasyonel olur.

Şu halde Önerme ile, $n = 4$ ve $n = 12$ halleri dışında teoremimiz kanıtlanmış olur. $n = 12$ hali için şu yardımcı sonucu ele alacağız.

Önerme: **Kartezyen düzlemde köşe koordinatları rasyonel olan bir eşkenar üçgen yoktur.**

Kanıt: Tersine olduğunu varsayalım. Köşeler, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ olsun. Üçgenin alanı rasyonel olur. Bir kenarın uzunluğu, $((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)^{\frac{1}{2}} = a$ olsun. Alan, $a^2\sqrt{3}/4$ ile verilir fakat $a^2/4$ rasyonel olacağından, $\sqrt{3}$'ün rasyonel olması gerekir ki bu mümkün değildir.

Şu halde köşe koordinatları rasyonel olan bir düzgün onikigen olsaydı, onikigenin uygun üç köşesi alınarak köşe koordinatları rasyonel olan bir eşkenar üçgen elde edilirdi ki bu Önerme'ye ters düşer. Teorem $n = 12$ iken de doğrudur.

$n = 4$ halinde de teoremin tersine bir örnek verelim. $x^2 + y^2 = 1$ çemberi üzerinde $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$ noktalarını almak yeter.

Problem: Bir $n \geq 2$ sayısı için öyle $a_1, a_2, \cdots, a_n$ gerçel sayıları bulunuz ki, her $i = 1, 2, \cdots, n$ için a_i irrasyonel olsun $k \geq 2$ için, $a_k = 2a_{k-1}^2 - 1$ sağlansın ve $a_1 a_2 \cdots a_n$ rasyonel olsun. $m = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ için, $\cos\frac{2^m\pi}{2^n+1}$ sayılarının irrasyonel olduğu görülebilir. Bu sayılar, $a_k = 2a_{k-1}^2 - 1$ eşitliğini sağlarlar. Öte yandan $\pi_{m=0}^{n-1}\cos\dfrac{2^m\pi}{2^n+1} = \dfrac{1}{2^n}$ olmak üzere rasyoneldir (Kanıt okuyucuya bırakmıştır).

Yazıyı dikkat çekici bir sonuç ile bitirelim.

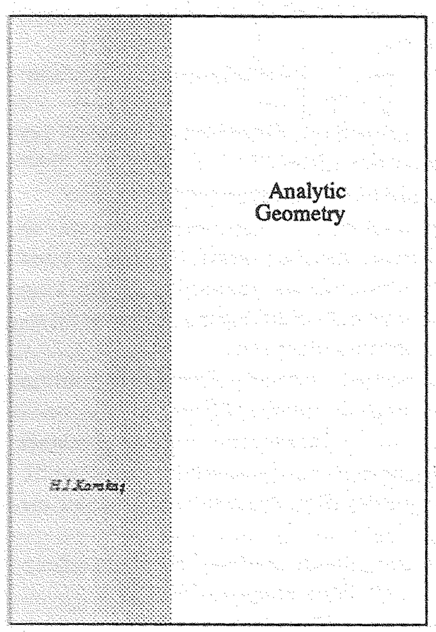
Önerme: **α, β irrasyonel sayıları için, α^β irrasyonel olmayabilir.**

$\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = \log_{\sqrt{2}}3$ **alalım. Kolayca $\alpha^\beta = 3$ alarak rasyonel olur. Son olarak β'nın irrasyonel olduğunu görelim. $\log_{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}$ ise, $3^{2b} = 2^a$ olur ki bu ancak $a = b = 0$ halinde mümkün olur.**

KAYNAKÇA

(1) G.H. Hardy, E.M. Wright, An Introduction to the Theory of Numbers, 5. Basım, 1979.

(2) American Mathematical Monthly, 1994, Problem 10369.



İÇİNDEKİLER