1. Dereceden İki ve Üç Bilinmeyenli Diofant Denklemleri

Selma Atabey *

Tanım:
$a, b, c, x, y, z, m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$ax + by + cz = m \quad (1)$$

şeklindeki bir denkleme üç bilinmeyenli Diofant denklem denir. Eğer a, b, c katsayılarından biri 0 ise elde edilen denklem 1. dereceden iki bilinmeyenli Diofant denklemidir.

Temel Teorem: Tam Sayılar kümesinde (1) denkleminin çözümü olması için gerek ve yeter şart a, b, c sayılarının $EBOB$ (en büyük ortak bölen)'inin m'yi bölmesidir (burada ve makalenin geri kalan kısmında a'nın b'yi bölmesi ifadesinden a'nın b'yi *kalansız* böldüğünü anlayacağız).

İspat:

x_0, y_0, z_0 tamsayıları (1) denkleminin çözümü olsun. O zaman $ax_0 + by_0 + cz_0 = m$ denklemi sağlanır.

a, b ve c sayılarının $EBOB$'i d olsun.

O zaman a, b, c sayıları

$a = dq_1$, $b = dq_2$, $c = dq_3$ $(q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{Z})$ şeklinde yazılabilirler.

$ax_0 + by_0 + cz_0 = m$ denkleminde a, b, c sayıları yerlerine sırasıyla dq_1, dq_2, dq_3 alınırsa $d(q_1x_0 + q_2y_0 + q_3z_0) = m$ olur.

Dolayısıyla d m'yi böler.

a, b, c sayılarının $EBOB$'i de ve $d|m$ olsun. O zaman $m = dq$ $(q \in Z)$ dir.

Bezont teoreminden dolayı $Aa+Bb+Cc = d$ denklemini sağlayacak şekilde A, B, C tamsayıları bulunabilir.

Son denklemin her iki tarafını q ile çarparsak

$(qA)a+(qB)b+(qC)c = qd = m$ elde edilir.

Dolayısıyla $x_0 = qA$, $y_0 = qB$, $z_0 = qC$ tamsayıları (1) denkleminin çözümüdür.

Örnek: Aşağıdaki denklemlerin tam sayılar kümesinde çözümleri var mıdır?

1) $3x - 6y + 15z = 7$
2) $105x + 56y = 42$
3) $2x + 5y + 7z = 8$
4) $104x + 65y = 43$

Çözüm:

1) $(3, 6, 15) = 3$ ve $3 \nmid 7$ olduğundan $3x - 6y + 15z = 7$ denkleminin tamsayılar kümesinde çözümü yoktur.

2) $(105, 56) = 7$ ve $7|42$ olduğundan bu denklemin tam sayılar kümesinde çözümü vardır.

3) ve 4) okuyucuya bırakılmıştır.

Diofant denklemlerinin çözümlerini Euler yöntemi ile bulacağız. Bu yöntemi örneklerin çözümünde açıklayacağız.

Örnek: Aşağıdaki denklemlerin tam sayilar kümesinde çözümlerini bulunuz.

1) $5x - 7y = 8$
2) $153x - 34y = 51$
3) $3x - 12y + 18z = 7$
4) $2x + 5y + 7z = 8$

Çözüm:

1) $(5, 7) = 1$ ve $1|8$ olduğundan denklemin tam sayılar kümesinde çözümü vardır.

Katsayısı mutlak değerce küçük olan terimi çekerek $x = \frac{8+7y}{5} = \frac{5+3+5y+2y}{5} = 1 + y + \frac{3+2y}{5}$ buluruz. x in tamsayı olması için $\frac{3+2y}{5}$ in de tam sayı olması gereklidir. $\frac{3+2y}{5} = z$ diyelim. $\Rightarrow 3 + 2y = 5z$ olur.

Aynı yöntem bu denkleme de uygulanır.

$$y = \frac{5z-3}{2} = \frac{4z+z-2-1}{2} = 2z - 1 + \frac{z-1}{2}.$$

y nin tamsayı olması için $\frac{z-1}{2}$ in de tam sayı olması gerekir. $\frac{z-1}{2} = u$ diyelim. $\Rightarrow z - 1 = 2u$, yani, $z = 1 + 2u$ olur. Tekrar geri dönerek x ile y'yi u cinsinden ifade edelim.

$$y = \frac{5z-3}{2} = \frac{5(1+2u)-3}{2} = 5u + 1$$

$$x = \frac{8+7y}{5} = \frac{8+7(5u+1)}{5} = 7u + 3$$

Burada $u \in \mathbb{Z}$ dir.

2) $(153, 34) = 17$ ve $17|51$ olduğu için denklemin tamsayılar kümesinde çözümü vardır.

* Atatürk Anadolu Lisesi, Matematik öğretmeni

Aynı yöntem ile $y=\frac{153x-51}{34}=\frac{136x+17x-34-17}{34}=4x-1+\frac{17x-17}{34}$.

$\frac{17x-17}{34}\in\mathbb{Z}$ olmalı. $\frac{17x-17}{34}=u\Rightarrow 17x-17=34u$ Yani $x-1=2u$ dir. Buradan $x=2u+1$ buluruz. x'in bu ifadesini yukarıda yerine koyarak $y=\frac{153x-51}{34}=\frac{153(2u+1)-51}{34}=\frac{306u+153-51}{34}=9u+3$

Yani her $u\in\mathbb{Z}$ için $x=2u+1$, $y=9u+3$ denklemin bir çözümüdür.

3) $(3,12,18)=3$ ve $3\nmid 8$ olduğu için denklemin tam sayılar kümesinde çözümü vardır.

Burada da katsayısı mutlak değerce en küçük olan terimi çekersek

$$\begin{aligned} x &= \frac{8-7z-5y}{2} \\ &= \frac{8-6z-z-4y-y}{2} \\ &= 4-3z-2y+\frac{z+y}{2} \end{aligned}$$

$\frac{z+y}{2}\in\mathbb{Z}$ olmalı. $\frac{z+y}{2}=u$ dersek $z+y=2u$ olur. Buradan da $z=2u-y$ bulunur.

$$\begin{aligned} x &= \frac{8-7z-5y}{2} \\ &= \frac{8-7(2u-y)-5y}{2} \\ &= 4-7u+y \end{aligned}$$

Yani, $\left.\begin{aligned} x&=4-7u+y \\ z&=2u-y \end{aligned}\right\}$ olur.

Burada $u\in\mathbb{Z}$ dir.

Yukarıdaki örneklerde görüldüğü gibi, parametrelerinin sayısının, bilinmeyenlerin sayısının bir eksiği olduğu görülür.

Örnek: 100 kişiye (erkekler, kadınlar, çocuklar) toplam 100 lira para verilmiştir. Her bir erkeğe 5 lira, her bir kadına 3 lira ve her bir çocuğa 0,5 lira verilmiş olduğuna göre erkeklerin, kadınların ve çocukların sayısını bulunuz.

Çözüm: x:erkeklerin sayısı, y:kadınların sayısı, $(100-x-y)$:çocukların sayısı olsun.

$5x+3y+\frac{1}{2}(100-x-y)=100$ Ya da $9x+5y=100$ olur. $(9,5)=1$ ve $1|100$ olduğu için tam sayılar kümesinde çözümü vardır.

Euler yöntemi ile $y=20-2x+\frac{x}{5}$ bulunur. $\frac{x}{5}\in\mathbb{Z}$ olmalı. $\frac{x}{5}=t$ diyelim.

$x=5t$ ve $y=20-9t$ olur.

$x>0$, $y>0$, $t>0$ ve $t<2\frac{2}{9}$ olmalı. Dolayısıyla $t=1$ veya $t=2$ dir. $t=1$ için $x=5$, $y=11$, $z=84$ $t=2$ için $x=10$, $y=2$, $z=88$ bulunur.

Örnek: Bir çocuk babasına, "Doğduğun günü 12 ile, doğduğun ayı da 31 ile çarpıp, bu çarpımların toplamını bana söylersen ben de sana doğum gününü söyleyebilirim" diyor. Babanın doğduğu günü ve ayı bulunuz.

Çözüm:

x- doğduğu gün $\qquad 0\le x\le 31$

y-doğduğu ay $\qquad 0\le y\le 12$

$$12x+31y=98$$

$x=8-3y+\frac{2+5y}{12}$ olur.

$\frac{2+5y}{12}=z$ olsun.

$$2+5y=12z\Rightarrow y=\frac{12z-2}{5}=2z+\frac{2z-2}{5}$$

$$\frac{2z-2}{5}=t\Rightarrow 2z-2=5t\Rightarrow z=\frac{5t+2}{2}=$$

$=2t+1+\frac{t}{2}$

$\frac{t}{2}=v\Rightarrow t=2v$

$z=40+1+v=5v+1$

$y=12v+2$

$x=3-31v$ bulunur.

x ile y nin tanımlarından $-\frac{25}{31}\le v<\frac{6}{31}$ ve $-\frac{1}{6}\le v\le\frac{5}{6}$ olmalı. Buradan $v=0$, dolayısıyla $x=6$ ve $y=2$ elde edilir. Sonuç olarak babanın doğum günü 6 Şubat tır.

Soru: Toplam 73 soru çözen bir çocuk, bir kaç gün 11'er soru, kalan günlerde de 8'er soru çözmüştür. Bu soruları bu çocuk kaç günde çözmüştür?

Soru: Aşağıdaki Diofant denklemlerin tam sayılar kümesinde çözümlerini bulunuz.

1) $122x+284y=100$

2) $5x+4y-2z=6$

Not: (Bezout Teoremi)

$a_1,a_2,\cdots,a_n$ sayıları verilsin. $(a_1,a_2,\cdots,a_n)=$ $=u_1a_1+u_2a_2+\cdots+u_na_n$ olacak şekilde $u_1,u_2,\cdots,u_n$ bulunabilir.

(Burada $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ ile $a_1,a_2,\cdots,a_n$ sayılarının $EBOB$'i gösterilmiştir.)