TOSUN İÇİN....

Bu yazıya adını veren kişi, kimimiz için Tosun, kimimiz için Tosun Bey, ama çoğumuz için Ağabeydir. Bu sayısı ile beşinci yaşına basan Matematik Dünyası da varlığını aynı kişiye, yani ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi, Türk Matematik Derneği ve TÜBİTAK Başkanı Prof.Dr. Tosun Terzioğlu'na borçludur. Boğazda bir yemek sırasında yakınlarna söylediği Matematik Dünyası fikri, yine onun UNESCO'dan sağladığı yardım ile yaşama geçebilmiştir. Dağıtımın ODTÜ'den yapıldığı ilk yıllarda onu toplantı salonunda paketleme yaparken görebilirdiniz.

Ülkemiz matematikçileri arasında en üretken araştırmacıların önünde yer alan Terzioğlu altmışın üzerindeki çalışması ile 1971 yılında Balkan Matematikçiler Birliği'nin genç araştırmacılara verdiği başarı ödülünü, 1974 yılında TÜBİTAK Teşvik Ödülünü, 1986 yılında da aynı kurumun Bilim Ödülünü hak etmiştir.

Newcastle ve Frankfurt Üniversitelerindeki eğitimi sonrası ODTÜ'ye katılan Tosun Terzioğlu, gerek burada gerekse başka üniversitelerde çalışan matematikçilerin çoğunun hocası olmuştur ve onlara sadece matematik değil, çoğunun yaşamla mücadelelerinde esin kaynağı olan insanlık öğretmiştir. Bu düşünceleri sadece ODTÜ Matematik Bölümü çalışanları değil, ülkemizde ve yurt dışında Tosun'u tanıyan herkesin paylaşacağını biliyoruz.

Ünlü matematikçi S. Ulam, "Bir Matematikçinin Serüvenleri" adlı kitabında matematikçilerin gerçeklerden kaçmak için matematik yaptıklarını, dış dünyadan koparak, mutluluğu bir çeşit manastır olarak gördükleri matematikte aradıklarını yazar. Ulam'a göre matematikçiler mutsuzluklardan kaçmak için matematik ile kendi kendine yeter bir dünya kurduklarını, bazılarının ise başka birşey yapamadıkları için matematik çalıştıklarını söyler. Oysa Tosun'u tanıyan herkes bu görüşlerin onun için yanlışlığına katılacaktır. Zira O, ülke sorunları ile her zaman yakından ilgilenmiş ve bu bağlamda üstüne düşen görevleri fazlası ile ve alçakgönüllülük ile yerine getirmiştir. İşte bu yurtseverlik şimdilerde onun TÜBİTAK Başkanlığı görevini yürütmesini gerektiriyor. Kendi deyimi ile "bu görevini daha rahat yerine getirmek için" 52 yaşında emekli olmak istedi. Matematik Dünyası'na gönül veren bizler, O'nun bu kararının yarattığı burukluğu artık hayatımızın bir parçası haline gelen siz okurlarımızla paylaşmak istedik. Sevdiklerimizin çoğu kez katılmadığımız kararlarını sırf onlara olan sevgi ve saygımızdan sessizce kabullendiğimiz gibi O'nunkini de kabullendik. Bizler, iki yıldır kapalı duran ofis kapısının, eskiden odasında çalışırken tuttuğu gibi yarı açık görme tutkusu ile yaşayacağız.

* * *

Son sayımızdan bu yana matematik dolu günler yaşadık Ankara'da. Moskova'dan gelen A. Helemski ve Petersburg'dan gelen A. Veksler, ODTÜ'de heyecan verici konuşmalar yaptılar. Dergimiz yazarlarından Boğaziçi Üniversitesi öğrencisi Emre Alkan'ın "Variations on Wolstenholme's Theorem" adlı araştırması American Mathematical Monthly dergisinin Aralık 1994 sayısında yayınlandı. Dergimizin problemlerini çözerek bir rekora doğru giden Kazakistanlı Almas Rimov aynı başarıyı öğrencisi olduğu ODTÜ Matematik Bölümü'nde de sürdürüyor. Genç arkadaşlarımızın başarıları ile övünüyoruz.

Geçtiğimiz yayın döneminde Matematik Dünyası'na katkıda bulunan herkese teşekkür ederiz. Bu dönemde yazı kurulunda yer alan Mefharet Alpseymen Kocatepe ve Mahmut Kuzucuoğlu arkadaşlarımıza yaptıkları değerli katkıları için teşekkür ederiz.

OYUNLAR (III)

Ali Nesin *

Yoksulluk Kader Değil

Bu dizinin son bölümünde yoksulu kazandıracağız. Küçük bir olasılıkla da olsa, yoksul kazanabilecek.

İki oyuncu yazı-tura oynuyorlar. İlk yazı-tura atışında ortaya 1 lira konuluyor. Oyunculardan biri, diyelim birinci oyuncu, kaybettikçe ortaya koyduğu parayı arttırıyor, bir önceki atışta kaybettiğinin iki katını koyuyor. Kazandığındaysa ortaya 1 lira koyuyor. Örneğin ilk atışta kaybederse, ikinci atışta ortaya 2 lira koyuyor. İkinci atışta da kaybederse, üçüncü atışta 4 lira koyuyor. Kazanana değin bu böyle sürüyor. Kazandığında gene 1 lira ortaya koyuyor. Birinci oyuncu stratejisini sürdürebildikçe sürdürüyor. Sürdüremediğinde, yani cebinde yeterli parası kalmadığında, oyun bitiyor. Bu dizinin ilk yazısında, iki oyuncunun da sonlu parası olduğunda oyunun uygulamada kesinlikle biteceğini kanıtlamıştık. Aynı oyunu oynayacağız. Ancak bu kez ikinci oyuncunun sonsuz parası olduğunu varsayacağız (zengin oyuncu). Birinci oyuncununsa yalnızca 1 lirası var (yoksul oyuncu). Yoksul, yukarıda açıkladığımız stratejiyle oynuyor. Eğer stratejisini sürdüremezse oyun bitiyor, oyun daha önce bitemez. Zenginin parası hiç bitmediğinden, zenginin oyunu kaybetme olasılığı yoktur.

Daha ilk yazı-tura atışında yoksul kaybederse, yoksul cebindeki tek lirayı kaybeder ve oyun hemen biter. Dolayısıyla en az 1/2 olasılıkla yoksul oyunu kaybedecektir. Yoksulun oyunu kaybetme olasılığını bulamadım. Yazının sonunda bu olasılığı bulmak için hesaplanması gereken bir sayıyı vereceğim.

Yoksul ilk atışta kazanıp ikinci atışta kaybederse ne olur? Oyun gene biter, ama bu kez yoksulun cebinde 1 lirası vardır. Yani yoksul 'tapi' kalkar. Çünkü birinci yazı-tura atışında kazanmıştır, dolayısıyla ikinci atıştan önce cebinde 2 lirası vardır. İkinci atışta kaybettiğinden 1 lirası kalmıştır. Bu kez ortaya 2 lira koyması gerekmektedir ve 2 lira koyacak parası yoktur. Demek ki en az 1/4 olasılıkla yoksul oyundan ne kazançlı ne de zararlı kalkar. Yoksulun oyundan ne kazançlı ne de zararlı kalkma olasılığını da bulamadım.

Daha önceki bölümlerdeki oyunların tersine bu oyunda yoksul kazanabilir. Öyle bir an gelebilir ki, yoksulun cebinde 1 liradan fazla para olmasına karşın, yoksul stratejisini sürdüremez (yani oyun biter). Örneğin, yoksul ilk dört atışta kazanır da sonraki iki atışta kaybederse yoksulun cebinde 2 lira olmasına karşın oyun biter. Okur bu savımı kendi kendine kolaylıkla doğrulayabilir. Demek ki en az $1/2^6 = 1/64$ olasılıkla yoksul oyundan kazançlı ayrılır. Yoksulun oyundan k lira kazançlı kalkma olasılığını da bilmiyorum[1].

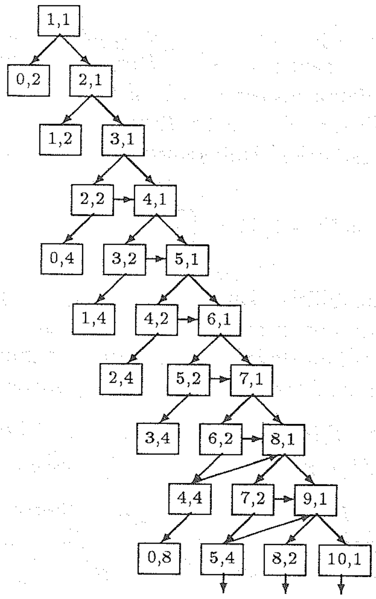
Bu oyun sonsuza dek sürebilir, örneğin fakir hep kazanırsa ... Ama göreceğiz ki oyunun sonsuza dek sürebilme olasılığı 0'dır. Bunu kanıtlayabildim! Dolayısıyla oyun % 100 (yani 1) olasılıkla biter. Demek ki oyun kuramsal olarak sonsuza dek sürebilse bile, uygulamada sonlu sayıda yazı-tura atışından sonra biter[2]. Bu

* California Üniversitesi (Irvine) Matematik Bölümü öğretim üyesi

[1] Bu hesaplayamadığım olasılıkların yaklaşık hesaplanabilmesi için gereken malzeme bu yazıda vardır. Dileyen okur bu sayıları yaklaşık hesaplayabilir. Bu tam olarak hesaplayamadığım olasılıklar henüz ad verilmemiş sayılar da olabilirler. Sözcük sayımız sonsuz ama yalnızca *sayılabilir* sonsuzlukta. Gerçel (reel) sayılarsa *sayılamaz* sonsuzlukta. Dolayısıyla her sayıya ad veremeyiz. Önemli bulduğumuz sayılara ad veririz. Örneğin π sayısı önemli olduğundan π'ye bir ad verilmiştir: π. π'nin karesinin ve karekökünün de adları vardır: π^2 ve $\sqrt{\pi}$. Tam olarak hesaplayamadığım bu üç olasılığa daha önce bir ad verilmiş midir bilmiyorum. Verilmemişse hiç bir zaman tam olarak hesaplayamayız. Nasıl π'nin kaç olduğunu hiçbir zaman tam olarak bilemeyeceksek ve ancak adını söyleyerek π'nin kimliğini belirtebiliyorsak, bu sayıları da hiçbir zaman bilemeyebiliriz, hatta daha önceden adı konmuş sayılarla arasında cebirsel bir bağıntı bile olmayabilir. Özet olarak demek istediğim, bu sayıların tam olarak hesaplanamayabilecekleri. Bu bağlamda akla gelen ilk soru şu: hesaplayamadığım olasılıklar kesirli sayılar mıdır? Pek sanmıyorum.

[2] Bu oyunun 1 olasılıkla bitmesi yoksulun cebindeki paraya bağlı değildir. Aşağıdaki şemadan da anlaşılacağı üzere, yoksulun cebinde 1 lira olduğunda oyun 1 olasılıkla biterse, yoksulun cebinde kaç para olursa olsun oyun gene 1 olasılıkla biter.

bölümde işte bu sonucu kanıtlayacağız.



Oyunun ilk anlarda alabileceği durumları gösteren bir şema çizeceğiz. Önce oyunun alabileceği durumlarını saptayalım. Oyunun her durumunu iki sayıyla gösterebiliriz. Birinci sayı, yoksulun cebindeki para olsun; ikinci sayıysa bir sonraki atış için ortaya koyulan (daha doğrusu yoksulun koyması gereken) para olsun. İkinci sayı hep 2'nin üstleri olmak zorunda, $1, 2, 4, 8, 16$ gibi. Oyunun en başındaki durum (1,1) durumu. Çünkü, yoksul oyuna 1 lirayla başlıyor ve ilk atışta ortaya 1 lira koyuyor. Bu durumda yoksul kazanırsa oyun (2,1) durumuna geçecek, kaybederse de (0,2) durumuna (ve oyun bitecek). (2,1) durumundan sonra oyun ya (1,2) durumuna ya da (3,1) durumuna erişir. Birinci şıkta oyun biter, ikinci şıkta sürer. Eğer bir durumdan sonra oyun bitmemişse, oyun iki durumdan birini alır: yoksul o atışta ya kazanmıştır ya da kaybetmiştir. Oyunun ilk birkaç yazı-tura atışında alabileceği durumlar yukarıda görülüyor.

Yukarıda da dediğimiz gibi oyunun sonsuza değin sürme olasılığının 0 olduğunu kanıtlayacağız. $(n, 2^k)$ durumuna gelme olasılığına $p(n, 2^k)$ diyelim. Örneğin,

$$\begin{aligned}
p(1,1) &= 1\\
p(0,2) &= 1/2\\
p(2,1) &= 1/2\\
p(1,2) &= 1/4\\
p(3,1) &= 1/4\\
p(2,2) &= 1/8\\
p(4,1) &= 1/8 + 1/16 = 3/16\\
p(0,4) &= 1/16\\
p(3,2) &= 1/16 + 1/32 = 3/32\\
p(5,1) &= 1/16 + 2/32 + 1/64 = 9/64
\end{aligned}$$

Oyunun sonsuza gidebilmesi için bütün $(n, 1)$ durumlarına ulaşılmalıdır. Bu, şemadan kolayca anlaşılıyor. Demek ki oyunun sonsuza dek sürebilme olasılığı, $p(n, 1)$ dizisinin n sonsuza gittiğinde aldığı değerdir. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} p(n, 1)$$

sayısını hesaplamamız gerekiyor. Bu sayının 0 olduğunu göreceğiz. Bu limitin sıfır olduğunu kanıtlamak için, aşağıdaki eşitliği bulmak yeterlidir:

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} p(2^n - 1, 1) = 0.$$

Bu son eşitliği kanıtlamak daha kolay olacak.

$p(n, 2^k)$ sayılarını bulmak istiyoruz. Bunun için biraz matematik yapmalıyız. Yapacağımız matematiği daha iyi anlaması için, okurun sık sık yukarıdaki şemaya bakması gerekecektir. İlk olarak, eğer $k > 0$ ise,

$$(1) \qquad p(n, 2^k) = \frac{p(n + 2^{k-1}, 2^{k-1})}{2}$$

eşitliğine dikkatinizi çekerim. Çünkü, eğer $k > 0$ ise, $2^k > 1$'dir ve dolayısıyla $(n, 2^k)$ durumuna gelmenin bir tek yolu vardır, o da bir önceki oyunda kaybetmiş olmak. Bir önceki oyunun durumu ne olabilir? $(n, 2^k)$ durumunda ortaya 2^k koyduğumuza göre, bir önceki oyunda ortaya 2^{k-1} koymuşuzdur (ve kaybetmişizdir). Dolayısıyla $(n, 2^k)$ durumuna ancak $(n + 2^{k-1}, 2^{k-1})$ durumundan geçilebilir. (1) eşitliği işte bu yüzden geçerlidir. (1) eşitliğinde k yerine $k-1$ ve n yerine $n + 2^{k-1}$ koyarsak,

$$p(n + 2^{k-1}, 2^{k-1}) = \frac{p(n + 2^{k-1} + 2^{k-2}, 2^{k-2})}{2}$$

eşitliği çıkar. Bu son eşitliği (1)'in sağ tarafına yerleştirerek,

$$p(n, 2^k) = \frac{p(n + 2^{k-1} + 2^{k-2}, 2^{k-2})}{4}$$

eşitliğini elde ederiz. Bunu böylece sürdürürsek,

$$p(n, 2^k) = \frac{p(n + 2^{k-1} + 2^{k-2} + \cdots + 2 + 1, 1)}{2^k}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikteki $2^{k-1}+2^{k-2}+\cdots+2+1$ sayısı 2^k-1 sayısına eşit olduğundan, eğer $k>0$ ise,

$$(2)\qquad p(n,2^k)=\frac{p(n+2^k-1,1)}{2^k}$$

eşitliği geçerlidir. (2) eşitliğinden, $p(n,2^k)$ sayılarını bulmak için, $p(n,1)$ sayılarını bulmamız gerektiği anlaşılıyor. Bu sayıları bulalım. $(n,1)$ durumuna ancak kazanarak gelinir. Yani $(n-1,1)$, $(n-2,2)$, $(n-4,4)$ gibi durumlardan. Dolayısıyla $p(n,1)$ sayısı,

$$\frac{p(n-1,1)}{2},\ \frac{p(n-2,2)}{2},\ \frac{p(n-4,4)}{2},\ldots$$

sayılarının, yani, bir k için, $p(n-2^k,2^k)/2$ biçiminde yazılabilen sayıların toplamıdır. (2) eşitliği $p(n-2^k,2^k)=p(n-1,1)/2^k$ eşitliğini verdiğinden, $p(n,1)$ sayısının $p(n-1,1)/2^{k+1}$ sayılarının toplamı olduğu anlaşılır. Ama buradaki k sayıları $n-2^k\geq 2^k$ koşulunu, yani $2^{k+1}\leq n$ koşulunu sağlamalıdır, çünkü aksi halde $(n-2^k,2^k)$ durumunda oyun bitmiştir ve bu durumdan $(n,1)$ durumuna geçilmez. $k(n)$, $2^k\leq n$ eşitsizliğini sağlayan k sayılarının en büyüğü olsun. Demek ki

$$\begin{aligned}p(n,1)&=\sum_{k=1}^{k(n)}\frac{p(n-1,1)}{2^k}\\&=p(n-1,1)\sum_{k=1}^{k(n)}\frac{1}{2^k}\\&=p(n-1,1)\left(1-\frac{1}{2^{k(n)}}\right).\end{aligned}$$

Bu eşitliği $n-1$ kez kullanarak,

$$p(n,1)=p(1,1)\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{2^{k(i)}}\right)$$

buluruz. Ama $p(1,1)=1$. Burada n yerine 2^n-1 alırsak,

$$(3)\qquad p(2^n-1,1)=\prod_{i=2}^{2^n-1}\left(1-\frac{1}{2^{k(i)}}\right)$$

buluruz. Şimdi k herhangi bir doğal sayı olsun. Hangi i sayıları için $k(i)=k$ eşitliğinin doğru olduğunu bulalım. i, $k(i)=k$ eşitliğini sağlayan bir sayı olsun. k sayısı, $2^k\leq i$ eşitsizliğini sağlayan sayıların en büyüğü olduğundan, $2^k\leq i<2^{k+1}$ eşitsizliği geçerlidir. Ve bunun tersi de doğrudur: eğer $2^k\leq i<2^{k+1}$ ise, $k(i)=k$ eşitliği geçerlidir. Bu eşitsizlikleri sağlayan kaç tane i sayısı vardır? Biraz düşünme, 2^k tane olduğunu gösterir. (3) eşitliğinin sağındaki çarpılacak terimler bu 2^k tane i sayısı için birbirlerine eşittirler. Dolayısıyla (3) eşitliğini,

$$(4)\qquad p(2^n-1,1)=\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)^{2^k}$$

olarak yazabiliriz. Bu eşitliği kullanarak $p(2^n-1,1)$ sayılarının n sonsuza gittiğinde sıfıra yakınsadıklarını kanıtlayacağız. Bunun için konumuzdan biraz uzaklaşıp iki önsav kanıtlayacağız:

Önsav 1. *Eğer $0<x<1$ ise ve $n>0$ bir doğal sayıysa, $(1-x)^n\leq 1-nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$.*

Kanıt. Eğer $n=1$ ise önsav elbette doğru. Şimdi önsavın n için doğru olduğunu varsayıp $n+1$ için kanıtlayalım. Demek ki

$$(1-x)^n\leq 1-nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$$

eşitliğini biliyoruz, daha doğrusu varsayıyoruz. Her iki tarafı da $1-x$ ile çarpalım: $0<1-x$ olduğundan, sağ tarafı açacak olursak,

$$(1-x)^{n+1}\leq 1-(n+1)x+\frac{n(n+1)}{2}x^2-\frac{n(n+1)}{2}x^3$$

buluruz. $x>0$ olduğundan,

$$(1-x)^{n+1}<1-(n+1)x+\frac{n(n+1)}{2}x^2.$$

elde ederiz. Demek ki önsav $n+1$ için doğru. Tümevarımla önsav her doğal sayı için doğrudur. Önsavımız kanıtlanmıştır.

Önsav 2. *$k\geq 1$ ise, $\left(1-\frac{1}{2^k}\right)^{2^k}<\frac{1}{2}$.*

Kanıt. Üstteki önsavda $x=1/2^k$ ve $n=2^k$ alalım.

$$\left(1-\frac{1}{2^k}\right)^{2^k}\leq 1-2^k\left(\frac{1}{2^k}\right)+\frac{2^k(2^k-1)}{2}\left(\frac{1}{2^{2k}}\right)$$

elde ederiz. Sağ taraftaki ilk iki terim sadeleşir. En sağdaki terimi hesaplayalım:

$$\frac{2^k(2^k-1)}{2^{2k+1}}=\frac{2^k-1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{k+1}}<\frac{1}{2}.$$

İkinci önsav da kanıtlanmıştır[3].

[3] Bu önsavın doğruluğu biraz analizle de çıkabilir. $(1-1/2^k)^{2^k}$ sayılarının $1/e$ sayısından (dolayısıyla $1/2$ sayısından da) küçük oldukları analiz kullanarak kolaylıkla kanıtlanabilir.