Şimdi (4)'teki sayıların sıfıra yakınsadığını kanıtlayabiliriz. İkinci önsavı ve (4) eşitliğini kullanarak, $p(2^n - 1, 1) \leq 1/2^{n-1}$ buluruz. n sonsuza gittiğinde sağdaki terimler 0'a yakınsadığından, $p(2^{n-1}, 1)$ sayıları da sıfıra yakınsar. Demek ki oyunun sonsuza dek sürme olasılığı 0'dır, ve oyun 1 olasılıkla biter.

Oyundan yoksulun zararlı (yani 0 lirayla) kalkma olasılığı nedir? Bu olasılığı bulmak için $p(0, 2^k)$ sayılarını toplamalıyız.

$$p_0 = \sum_{k=1}^{\infty} p(0, 2^k)$$

olsun. p_0, yoksulun oyundan zararlı kalkma olasılığıdır. (2) eşitliğinde $n = 0$ alırsak, $p(0, 2^k) = p(2^k - 1, 1)/2^k$ buluruz. (4) eşitliğini de kullanarak,

$$p(0, 2^k) = \frac{1}{2^k} \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{2^i}\right)^{2^i}$$

elde ederiz. Dolayısıyla,

$$p_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{2^i}\right)^{2^i}$$

olur. Bu sayıyı hesaplayamadım.

II. Ulusal Matematik Olimpiyadı 2. Aşama Sınavı

Ali Doğanaksoy *

TÜBİTAK Bilim Adamı Yetiştirme Grubu tarafından düzenlenen II Ulusal Matematik Olimpiyadı ikinci aşama sınavı 23-24 Aralık 1994 tarihlerinde Ankara'da yapıldı. Bayram Yenikaya ve Halil Bayrak Altın madalya; Ethem Çanakoğlu, Mehmet Ekmekçi ve İsrafil Bahçeci gümüş madalya aldılar. Bronz madalyaları ise Özgür Aydın, Ali Ekber Gürel, Köksal Karakaş, Fatih Zihni Oktay, Suat Namlı, Emre Sucu, İzel Sulam. Özgür Sümer ve Fahri Turan aldılar. Bu sayımızda verdiğimiz bu sınavın sorularının yanıtlarını gelecek sayımızda bulabilirsiniz.

Birinci Gün, 23 Aralık 1994

1. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\sqrt{n}$ sayısına en yakın tam sayıya a_n diyelim. Buna göre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^3}$$

toplamını hesaplayınız.

2. Bir $ABCD$ kirişler dörtgeninde, $m\widehat{BAD} < 90°, m\widehat{BCA} = m\widehat{DCA}$ dır $[DA]$ üzerinde $|BD| = 2|DE|$ koşulunu sağlayan E noktasından geçen ve $[CD]$ kenarına paralel olan doğru $[AC]$ küşegenini F noktasında kestiğine göre,

$$\frac{|AC| \cdot |BD|}{|AB| \cdot |FC|} = 2$$

olduğunu gösteriniz.

3. Düzlemde ikişer kesişen ve herhangi üçü aynı noktadan geçmeyen n tane mavi doğru çiziliyor. Bu doğruların kesiştiği noktalara 'mavi nokta' dersek, $\binom{n}{2}$ tane mavi noktamız olur. Daha sonra bir mavi doğru ile birleştirilmemiş olan bütün mavi nokta çiftlerinden geçen kırmızı doğrular çiziliyor. İki kırmızı doğrunun kesiştiği noktaya 'kırmızı nokta'; bir mavi ve bir kırmızı doğrunun kesiştiği noktaya da 'mor nokta' diyelim. Bu işlemden sonra en fazla kaç tane mavi, kırmızı ve mor nokta olur?

İkinci Gün, 24 Aralık 1994

4. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ artan bir fonksiyon olsun. Her $u \in \mathbb{R}^+$ için $\{f(t) + \frac{u}{t} : t > 0\}$ kümesinin en büyük alt sınırına $g(u)$ diyelim.

(a) $x \leq g(xy)$ ise $x \leq 2f(2y)$.

(b) $x \leq f(y)$ ise $x \leq g(xy)$

5. $s \geq 1$ ve $t \geq 1$ olmak üzere

$$t^2 + 1 = s(s+1)$$

eşitliğini sağlayan tüm (s, t) sıralı tam sayı ikililerini bulunuz.

6. Bir ABC üçgeninin iç teğet çemberi $[BC]$ ve $[CA]$ kenarlarına sıra ile D ve E noktalarında değmektedir. $[CB]$ üzerine $[CK] = [BD], [CA]$ üzerinde $|AE| = |CL|$ koşulunu sağlayan K ve L noktaları için $AK \cap BL = \{P\}$ dir. İç teğet çemberin merkezi $I, [BC]$ nin orta noktası Q ve ABC üçgeninin ağırlık merkezi G olduğuna göre

(a) $IQ // AK$,

(b) Alan $(AIG) =$ Alan (QPG)

olduğunu ispatlayınız.

III. Ulusal Matematik Olimpiyadı 1. Aşama sınavı Mayıs 1995 ayı içerisinde yapılacaktır.

* ODTÜ Matematik Bölümü Öğretim Üyesi