

GEOMETRİK EŞİTSİZLİKLER (III)

Emre Alkan *

Bu yazıda yine problemler ile uğraşacağız

Problem. Bir ABC üçgeninin ağırlık merkezi G ve alanı S olsun. Şunu gösteriniz:

$$S \leq \frac{\sqrt{3}}{4} (|GA||GB| + |GA||GC| + |GB||GC|).$$

Lemma. Aynı düzlemde, doğrusal olmayan A, B, C noktaları verilsin. Düzlemde öyle bir tek P noktası vardır ki, $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2$ minimum olur.

Kanıt. Genelliği bozmadan A, B, C 'nin koordinatları $(0, 0)$, $(1, 0)$ ve (a, b) olsun. Rasgele bir (x, y) alalım. Böylece

$$\begin{aligned} &|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 \\ &= 3x^2 + 3y^2 - 2(a+1)x - 2by + a^2 + b^2 + 1 \end{aligned}$$

olur. Bu ifadeyi $f(x, y)$ ile gösterelim. $\frac{2}{3}[a^2 + b^2 - a + 1] \leq f(x, y)$ olduğunu görelim. Son eşitsizlik kolayca

$$0 \leq \left(x - \frac{a+1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{3}\right)^2$$

şeklinde yazılabilir. Eşitlik ancak $x = (a+1)/3$ ve $y = b/3$ halinde olur. Bu noktanın ABC 'nin ağırlık merkezi olduğu gözlenebilir.

Çözüm. İki ayrı duruma bakacağız: (1) ABC 'nin, $2\pi/3$ 'ten büyük veya eşit bir açısı yoktur; (2) (1)'in tam tersi.

(1) Bu durumda ABC 'nin içinde öyle bir P noktası bulunabilir ki, (i) $\sphericalangle APB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle CPA = \frac{2\pi}{3}$ olur; (ii) düzlemdeki herhangi bir P' için

$$|PA| + |PB| + |PC| \leq |P'A| + |P'B| + |P'C|$$

gerçeklenir. (İspat için [3]'ye bakılabilir.) A, B, C noktalarının P 'ye olan uzaklıklarına sırasıyla p, q, r , G 'ye olan uzaklıklarına da s, t, u diyelim. G ağırlık merkezi ise Lemma ve bu

sonuç kullanılarak, $s^2 + t^2 + u^2 \leq p^2 + q^2 + r^2$ ile $p + q + r \leq s + t + u$ eşitsizlikleri elde edilir. Birinci eşitsizlikten

$$\begin{aligned} &(s + t + u)^2 - 2(st + su + tu) \\ &\leq (p + q + r)^2 - 2(pq + pr + qr) \end{aligned}$$

çıkar. Şimdi ikinci eşitsizlik kullanılarak, $pq + pr + qr \leq st + su + tu$ elde edilir.

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}(pq + pr + qr)$$

olacağından istenen eşitsizlik bu halde elde edilir.

(2) Genelliği bozmadan $\sphericalangle BAC \geq 2\pi/3$ kabul edelim. Şu sonucu kullanacağız: Düzlemdeki her P için

$$|AB| + |AC| \leq |PA| + |PB| + |PC|$$

olur. (İspat için [3]'ye bakılabilir.) Lemma ve bu sonuç kullanılarak $s^2 + t^2 + u^2 \leq c^2 + b^2$ ile $c + b \leq s + t + u$ eşitsizlikleri elde edilir. Bunlardan (1)'e benzer şekilde $cb \leq st + su + tu$ elde edilir. Öte yandan,

$$S = \frac{1}{2}cb \sin(\sphericalangle BAC) \leq \frac{\sqrt{3}}{4}cb$$

olacağından istenen eşitsizlik bu durumda da elde edilir.

Problem. Bir ABC üçgeninin içinde alınan bir O noktası için, OA, OB, OC doğruları kenarları sırasıyla A', B', C' 'nde kessin.

(i) $\frac{|AA'|}{|OA'|} = x$, $\frac{|BB'|}{|OB'|} = y$ ve $\frac{|CC'|}{|OC'|} = z$ ise, xyz minimum olacak şekilde O noktalarını bulunuz.

(ii) $\frac{|OA|}{|OA'|} = x$, $\frac{|OB|}{|OB'|} = y$ ve $\frac{|OC|}{|OC'|} = z$ ise, $x^4 + y^4 + z^4$ minimum olacak şekildeki O noktalarını bulunuz.

* Boğaziçi Üniversitesi Matematik Bölümü öğrencisi

Çözüm. (i) O 'dan kenarlara indirilen dikme uzunlukları h'_a, h'_b, h'_c olsun. h_a, h_b, h_c de üçgenin yükseklikleri olsun. $x = \frac{h_a}{h'_a}$, $y = \frac{h_b}{h'_b}$ ve $z = \frac{h_c}{h'_c}$ yazılabilir. S, S_1, S_2, S_3 sırayla ABC, OAB, OBC, OCA üçgenlerinin alanları olsun. Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği'nden, $S \geq 3(S_1 S_2 S_3)^{1/3}$ ve böylece de $abch_a h_b h_c \geq 27 abh'_a h'_b h'_c$ elde edilir ki bu $xyz \geq 27$ demektir. xyz 'nin minimum olması için $S_1 = S_2 = S_3$, yani O noktası ABC 'nin ağırlık merkezi olmalıdır.

(ii) Menelaus Teoremi'yle,

$$\frac{|A'C|}{|A'B| + |A'C|} \frac{|C'B|}{|C'A|} \frac{|OA|}{|OA'|} = 1,$$

ve böylece

$$x = \frac{|OA|}{|OA'|} = \frac{|C'A|}{|C'B|} \left[1 + \frac{|A'B|}{|A'C|} \right] = \frac{|C'A|}{|C'B|} + \frac{|C'A|}{|C'B|} \frac{|A'B|}{|A'C|}$$

olur. Ceva Teoremi'yle $\frac{|C'A|}{|C'B|} \frac{|A'B|}{|A'C|} = \frac{|B'A|}{|B'C|}$ olduğundan, $x = \frac{|C'A|}{|C'B|} + \frac{|B'A|}{|B'C|}$ ve benzer şekilde

$$y = \frac{|A'B|}{|A'C|} + \frac{|C'B|}{|C'A|} \quad \text{ve} \quad z = \frac{|A'C|}{|A'B|} + \frac{|B'C|}{|B'A|}$$

elde edilir. $a, b \in \mathbb{R}^+$ için $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ olduğu için $x + y + z \geq 6$ elde edilir. Öte yandan $xyz = x + y + z + 2$ olduğu gösterilebilir (bunu okuyucuya bırakıyoruz). Böylece $xyz \geq 8$ olur. Bilinen eşitsizlikler yardımıyla,

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + z^4 &\geq x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2 \\ &\geq xyz(x + y + z) \geq 48 \end{aligned}$$

elde edilir. $x^4 + y^4 + z^4$ minimum ise $x = y = z = 2$ olmalı ve yine O ağırlık merkezi olmalıdır.

(ii) için bir genelleştirme olan şunu göstereceğiz: Her $n \geq 1$ tamsayısı için, $x^{2^n} + y^{2^n} + z^{2^n}$ minimum ise O ağırlık merkezi olmalıdır.

$x, y, z > 0$ ve $xyz = x + y + z + 2$ olduğunu biliyoruz.

Lemma. $a, b, c \geq 0$ ve $a + b + c$ sabit ise $ab + ac + bc$ toplamı $a = b = c$ iken maksimumdur.

Kanıt. a 'yı sabit tutalım. $b + c$ sabit olduğundan $a(b + c) = ab + ac$ sabit olur. İfadeyi büyütme için bc en büyük yapılmalıdır. $b + c$ sabit olduğundan bu $b = c$ iken olur. a, b, c simetrik olduğundan Lemma elde edilir.

Tümevarım yapacağız. $n = 1$ için $x^2 + y^2 + z^2$ 'nin minimumunu arıyalım. $xyz = t$ koyup, Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği'yle $t - 2 \geq 3t^{1/3}$ ve böylece $xyz = t \geq 8$ elde edilir. Aynı anda $x + y + z \geq 6$ olur.

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz)$$

yazıp $x + y + z = k$ dersek, Lemma'yı kullanarak $k^2 - \frac{2k^2}{3} = \frac{k^2}{3}$ 'ün minimumunu ararız; bu ise açıkça $x + y + z = k = 6$ ve $x = y = z$ halinde olur. Dolayısıyla O ağırlık merkezidir. Şimdi de iddia $x^{2^n} + y^{2^n} + z^{2^n}$ için doğru olsun ve $x^{2^{n+1}} + y^{2^{n+1}} + z^{2^{n+1}}$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} x^{2^{n+1}} + y^{2^{n+1}} + z^{2^{n+1}} \\ = (x^{2^n} + y^{2^n} + z^{2^n})^2 - 2(x^{2^n} y^{2^n} + x^{2^n} z^{2^n} + y^{2^n} z^{2^n}) \end{aligned}$$

ve $x^{2^n} + y^{2^n} + z^{2^n} \geq 3 \cdot 2^{2^n}$ olur. $x^{2^n} + y^{2^n} + z^{2^n} = k = \text{sabit}$ denirse, Lemma ile $k^2 - \frac{2k^2}{3} = \frac{k^2}{3}$ 'ün minimumu aranır. Kolayca $\frac{k^2}{3} \geq 3 \cdot 2^{2^{n+1}}$ olacağından tümevarım tamamlanır.

Problem. a, b, c bir üçgenin kenarları olsun. $2(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) = abc(a + b + c) + a^4 + b^4 + c^4$ ise, üçgenin eşkenar olduğunu gösteriniz.

Lemma. Her ABC üçgeni için u yarıçevre, r ve R iç ve çevrel yarıçaplar ise,

$$a \cos A + b \cos B + c \cos C = \frac{2ur}{R}$$

olur. (Kanıt okuyucuya bırakılmıştır.)

Lemma ve $R \geq 2r$ olduğu kullanılırsa, $a \cos A + b \cos B + c \cos C \leq u$ elde edilir. Bu ise kenarlar cinsinden

$$2(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) \leq abc(a + b + c) + a^4 + b^4 + c^4$$

verir. Eşitlik ancak üçgen eşkenarken vardır.

Problem. Bir ABC üçgeninde iç ve çevrel yarıçaplar r ve R ise,

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{5}{8} + \frac{r}{4R}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $\sin \frac{A}{2} = x$, $\sin \frac{B}{2} = y$ ve $\sin \frac{C}{2} = z$ alınırsa $\frac{r}{4R} = xyz$ olur. Şu halde

$$xy + xz + yz - xyz \leq \frac{5}{8}$$

olduğu görülmelidir. $x + y + z$ sabit iken,

$$xy + xz + yz - xyz = z(x + y) + xy(1 - z).$$

z 'yi sabit tutalım. Böylece $z(x + y)$ sabit olur ve $xy(1 - z)$ ifadesi maksimum yapılmalıdır. $1 - z$ pozitif olacağından, ifade $x = y$ halinde maksimum olur. x, y, z simetrik olduğundan, ifade $x = y = z$ halinde maksimum olur. $x + y + z \leq 3/2$ olacağını okuyucu gösterebilir. Şimdi, $x + y + z \in (0, 3/2]$ iken $xy + xz + yz - xyz$ ifadesinin maksimumuna bakalım. $x = y = z = k$ alarak $k \in (0, 1/2]$ iken $f(k) = 3k^2 - k^3$ 'ün maksimumunu arayalım. $f'(k)$ bu aralıkta pozitif olduğu için, $f(k)$ bu aralıkta artandır. Dolayısıyla maksimumların maksimumu $x = y = z = k = 1/2$ halinde olur.

Problem. (i) Çevreleri sabit kalmak üzere, kenar sayıları artan bir düzgün çokgenler dizisinin alanlarının artan bir dizi oluşturduğunu gösteriniz.

(ii) Alanları sabit kalmak üzere, kenar sayıları artan bir düzgün çokgenler dizisinin çevrelerinin azalan bir dizi oluşturduğunu gösteriniz.

Çözüm. (i) $m > n \geq 3$ olmak üzere, m ve n kenarı bulunan düzgün çokgenleri alalım. a ve b sırayla kenar uzunlukları olsun. Çevreler eşit ise $ma = nb$ yazılabilir. Alanlar için

$$A_m = \frac{1}{4}ma^2 \cot \frac{\pi}{m} \quad \text{ve} \quad A_n = \frac{1}{4}nb^2 \cot \frac{\pi}{n}$$

doğrudur. $A_n < A_m$ olduğunu görmek yeterli olacaktır.

$nb^2 \cot \frac{\pi}{n} < ma^2 \cot \frac{\pi}{m}$ eşitsizliği, $a^2 = n^2b^2/m^2$ olduğundan, $m \tan \frac{\pi}{m} < n \tan \frac{\pi}{n}$ eşitsizliğine eşdeğerdir. Bunu görebilmek için $f(x) = x \tan \frac{\pi}{x}$ 'in azalan olduğunu görelim. $f'(x) = \tan \frac{\pi}{x} - \frac{\pi/x}{\cos^2(\pi/x)} < 0$ olduğunu görmek için, $\sin \frac{2\pi}{x} < \frac{2\pi}{x}$ olduğu görülmelidir ki bu bilinen $\sin \alpha < \alpha$ eşitsizliğidir ($0 < \alpha$ için).

(ii) Okuyucuya bırakılmıştır.

Problem. R yarıçaplı bir çemberin içine iki eşkenar üçgen çiziliyor. Eşkenar üçgenlerin ortak alanı S olsun. $2S \geq R^2\sqrt{3}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Şekil çizilirse eşkenar üçgenlerin kesişimlerinden oluşan altı üçgenin eş oldukları gözlemlenir. Bunun sonucu olarak bu üçgenlerin alanları sabittir ve eşkenar üçgenin bir kenarına

yani $R\sqrt{3}$ 'e eşittir. Çevreleri sabit üçgenler arasında maksimum alanlı eşkenar üçgendir. Bunu görmek için kenarların birini sabit tutarız; diğer köşe bir elips üzerinde hareket eder ve alan diğer iki kenar eşitken en büyük olur. Kenarlar simetrik olduğundan iddia doğrulanır. Üçgenlerden birinin alanı T ise, $3T \leq R^2\sqrt{3}/4$ yazılabilir. $S = 3\sqrt{3}R^2/4 - 3T$ olduğundan istenen eşitsizlik elde edilir.

Düzeltilmeler. [1]'deki Problem 2'nin yayımlanan çözümünden daha kısa bir çözüm şöyle verilebilir: Sözü geçen uzunlukların en az biri r 'den küçük veya eşit olmalıdır. Şu halde $r \leq 12^{-3/4}(\frac{abc}{r})^{1/2}$ olduğunu görmek yeter. Bu ise $24\sqrt{3}r^3 \leq abc$ demektir. r sabit tutulurken, üçgen eşkenarsa abc minimum olmaktadır. Son eşitsizliğin doğruluğu açıktır. Böylece problemi iyi kuramamış olduğumuzu anlıyoruz. Yaptığım çözümün gidişine uygun problem şu olmalıdır:

Problem 2'. a, b, c bir üçgenin kenarları olmak üzere, $|B_3C_1||B_1C_2||B_2C_3| \leq \frac{\sqrt{3}}{72}abc$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Şunları göstermiştik:

$$|B_3C_1||B_1C_2||B_2C_3| = |B_3C_2||B_1C_3||B_2C_1|,$$

$$|B_1C_3||B_2C_3||B_2C_1||B_3C_1||B_3C_2||B_1C_2| \leq \frac{(abc)^2}{3^34^3}.$$

İstenen bunlardan elde edilir.

[2]'deki Problem 5 iyi kurulmamış bir problem. Çözümde $\sum \frac{1}{p}$ 'nin iraksaklığını kullanmak gereksiz. Onun yerine şu problem daha uygun olabilir:

Problem 5'. $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{p^k}$ dizisini ele alalım.

Bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Yeterince büyük her m tamsayısı için $[m - \varepsilon, m]$ aralığında a_n dizisinin en az bir terimi vardır.

Çözüm. n yeterince büyük ise $a_{n+1} - a_n < \varepsilon$ olacağı gözlenebilir. Şu halde m yeterince büyük bir tamsayı ise, $\{a_n\}$ iraksak olduğundan, $a_n < m - \varepsilon$ 'dur $a_{n+1} \geq m$ gibi bir durum olamaz. Öte yandan, a_n dizisinin hiç bir teriminin tamsayı olmadığını görmek kolaydır. Böylece $[m - \varepsilon, m]$ aralığına dizinin bir terimi düşer.