Gene [2]'deki Problem 7 ise şöyle ifade edilse daha iyi olurdu:

Problem 7'. *$2x^4 - y^4 = 1$ olacak şekilde her (x, y) pozitif tamsayı ikilisine karşılık, $(m^2 - 2mn - n^2)^2 = 1$ olacak şekilde (m, n) pozitif ikilisi olduğunu gösteriniz.*

KAYNAKÇA

[1] E. Alkan, *Geometrik Eşitsizlikler II*, *Matematik Dünyası*, **2**, sayı 1, 22–23, (1992).

[2] E. Alkan, *Sayılar Teorisinde Çözülememiş Problemler*, *Matematik Dünyası*, **3**, sayı 3, 17–21, (1993).

[3] H. Dörrie, *100 Great Problems of Elementary Mathematics, Their History And Solutions*, 361–363.

$a\sqrt{x} + b\sqrt{y} + c\sqrt{z} = d$ ŞEKLİNDEKİ DİOFANT DENKLEMİ

Selma Atabey *

$\sqrt{2}$ sayısının irrasyonel olduğu olduğu çok eskiden beri biliniyor. Bu sonucu değişik yönlerde genişletebiliriz. Bunlardan biri $a\sqrt{p} + b\sqrt{q} + c\sqrt{r}$ şeklindeki sayıların ne zaman rasyonel sayılar olduklarıdır. Bu sorunun cevabı da yazının başlığındaki denklemin tamsayı çözümleri ile bulunur. Tamsayılarda çözümü aranan bir denkleme, eski Yunanlı bir matematikçinin adından *Diofant denklemi* adı verilir.

1. Aritmetiğin Temel Teoremi

Teorem. *Her $n > 1$ doğal sayısı, $p_1 < \cdots < p_k$ asal sayılar ve $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ doğal sayılar olmak üzere, $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ biçiminde tek türlü gösterilir.*

Lemma 1. *n bir pozitif tamsayı olsun. $\sqrt{n}$ sayısı rasyonel sayı ise, n sayısı tam karedir.*

Kanıt. p ve q tamsayı ve $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$ olsun. $(p, q) = 1$ olduğunu düşünebiliriz. Aritmetiğin Temel Teoremi'nden ve $nq^2 = p^2$ eşitliğinden dolayı, n sayısının yukarıdaki biçimde yazılışında her asal çarpanın kuvveti çifttir, yani n tam karedir.

Lemma 2. *$k \geq 1$ olsun. $a_1, a_2, \ldots, a_k$ pozitif tamsayıları, herhangi ikisinin çarpımı bir sayının karesi olacak biçimde verilsin. O zaman $a_i = b_i^2 c$ $(1 \leq i \leq k)$ şeklindedir. Burada b_i ve c pozitif tamsayılardır.*

Kanıt. a bir pozitif tamsayısı ve $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ olsun. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ sayılarının 2 ile bölümünden kalanları incelenerek $a = b^2 c$ yazılabilir. Burada c, asal sayıların çarpımıdır.

$a_i = b_i^2 c_i$ olsun. Her a_i için farklı olan c_i sayısının aslında aynı olduğunu göstereceğiz. $a_i a_j = (b_i b_j)^2 c_i c_j$ sayısının tam kare olduğu biliniyor. $(b_i b_j)^2 c_i c_j = a_{ij}^2$ olsun. O zaman $\sqrt{c_i c_j} = \frac{a_{ij}}{b_i b_j}$ sayısı rasyoneldir ve Lemma 1'den dolayı $c_i c_j$ tam karedir. c_i sayılarını asal sayıların çarpımı olarak yazarsak, $c_i c_j$ tam kare olduğundan, c_i'nin her asal çarpanı c_j'nin de asal çarpanı olmak zorundadır. Aynı şey, c_i ile c_j'nin yerini değiştirdiğimizde de doğrudur. Başka sözlerle, $i, j = 1, \ldots, k$ için $c_i = c_j$'dir.

2. $a\sqrt{x} + b\sqrt{y} + c\sqrt{z} = d$ Diofant Denkleminin Çözümü

Bu denklemin çözümünün 1. dereceden üç bilinmeyenli Diofant denkleminin çözümüne dönüştüğünü göstereceğiz [1].

Önce $d = 0$ durumunu gözönüne alalım.

Teorem 1. *p, q, r sayıları, $ap + bq + cr = 0$ denklemini sağlayan tamsayılar ve s keyfi bir doğal sayı olsun. $a\sqrt{x} + b\sqrt{y} + c\sqrt{z} = 0$ denkleminin tamsayılar kümesinde tüm çözümleri*

$$x = p^2 s, \qquad y = q^2 s, \qquad z = r^2 s \tag{1}$$

formülleri ile verilir.

* Ankara Atatürk Anadolu Lisesi matematik öğretmeni

Kanıt. x, y, z sayıları (1) şeklinde ise, verilen denklemi sağlarlar. Bunun tersine, $a\sqrt{x_0} + b\sqrt{y_0} + c\sqrt{z_0} = 0$ olsun. O zaman, $a\sqrt{x_0} + b\sqrt{y_0} = -c\sqrt{z_0}$'dir. Son denklemin her iki tarafının karesini alırsak,

$$\sqrt{x_0 y_0} = \frac{c^2 z_0 - a^2 x_0 - b^2 y_0}{2ab}$$

olur, yani $\sqrt{x_0 y_0}$ sayısı rasyoneldir. Lemma 1'den dolayı $x_0 y_0$ tam karedir. Benzer şekilde $x_0 z_0$ ve $y_0 z_0$ sayılarının da tam kare oldukları gösterilir. Böylece Lemma 2'den dolayı x_0, y_0, z_0 sayıları (1) şeklindedir.

Teorem 2. *p, q, r sayıları $ap + bq + cr = d$ denklemini sağlayan tamsayılar olsun. $d \neq 0$, $a\sqrt{x} + b\sqrt{y} + c\sqrt{z} = d$ denkleminin tamsayılar kümesinde tüm çözümleri $x = p^2$, $y = q^2$, $z = r^2$ formülleri ile verilir.*

Kanıt. $a\sqrt{x_0} + b\sqrt{y_0} + c\sqrt{z_0} = d$ olsun. $a\sqrt{x_0} + b\sqrt{y_0} = d - c\sqrt{z_0}$ denkleminin her iki tarafının karesini alırsak,

$$2ab\sqrt{x_0 y_0} + 2cd\sqrt{z_0} + \sqrt{(a^2x_0 + b^2y_0 - c^2z_0 - d^2)^2} = 0$$

olur. Bu eşitlikten, Teorem 1 ve Lemma 1'den dolayı z_0 tam karedir. Benzer şekilde x_0 ve y_0 da tam karedir.

Sonuç. *a, b, c, p, q, r tamsayılar olmak üzere, $a\sqrt{p} + b\sqrt{q} + c\sqrt{r}$ sayısının rasyonel olması için gerek ve yeter şart p, q, r sayılarının tam kareler olmalarıdır.*

Örneğin, $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ sayısı irrasyoneldir.

Soru 1. *$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{z}}$ denkleminin tamsayılar kümesinde çözümünü bulunuz.*

Çözüm. (x, y, z) bu denklemin bir çözümü olsun. O zaman, $\sqrt{yz} + \sqrt{xz} - \sqrt{xy} = 0$ olur. Teorem 1'den dolayı xz, yz ve xy sayıları aşağıdaki türdendir:

$$xz = p^2 s, \qquad yz = q^2 s, \qquad xy = (p+q)^2 s.$$

Bu denklemlerden $\sqrt{s} = \dfrac{xyz}{pq(p+q)s}$ olduğu bulunur. Yani $\sqrt{s}$ rasyonel sayıdır. Lemma 1'den dolayı, s tam karedir. O zaman $xz = p^2 s_1^2$, $yz = q^2 s_1$, $xy = (p+q)^2 s_1^2$'dir. Buradan

$$x = \frac{p(p+q)}{q} s_1, \quad y = \frac{q(p+q)}{p} s_1, \quad z = \frac{pq}{p+q} s_1$$

olur. $(p, q) = 1$ olduğunu düşünebiliriz. Bu durumda $(p+q, p) = 1$ ve $(p+q, q) = 1$'dir. Yukarıdaki eşitliklerden dolayı $pq(p+q)$ sayısı s_1 sayısını böler. $s_1 = pq(p+q)r$ olsun. O zaman

$$x = p^2(p+q)^2 r, \quad y = q^2(p+q)^2 r, \quad z = p^2 q^2 r \tag{2}$$

olur. Öte yandan, bu şekilde verilen sayılar verilen denklemi sağlıyor ve denklemin tüm çözümleri (2) formüllerinden bulunur.

Örnek. $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{1980}}$ denkleminin tam sayılar kümesinde tüm çözümleri şu ikililerdir:

$$x = 2^2 5^2 55 \qquad x = 7^2 55$$
$$y = 3^2 5^2 55 \qquad y = 6^2 7^2 55$$

$$x = 4 \cdot 1980 \qquad x = 3^2 2^6 55$$
$$y = 4 \cdot 1980 \qquad y = 2^6 55$$

$$x = 3^4 55$$
$$y = 2^2 3^4 55$$

Çünkü $1980 = 2^2 3^2 55$'tir.

Soru 2. *$n > 1$ bir doğal sayı olsun. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{n}$ denkleminin tam sayılar kümeside kaç tane çözümü vardır?*

Çözüm. Lemma 2'nin kanıtında olduğu gibi $n = r^2 s$ olduğu gösterilebilir. (Burada s ile farklı olan asal sayıların çarpımı gösterilmiştir). Teorem 1'den dolayı $x = p^2 s$ ve $y = q^2 s$'dir. Bu değerleri verilen denkleme alırsak, işlemlerden sonra $p + q = r$ bulunur. Bu denklemin pozitif tamsayılar kümesinde $r + 1$ tane çözümü vardır; dolayısıyla soruda verilen denklemin de pozitif tamsayılarda $r + 1$ tane çözümü vardır.

Örnek. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1980$ denkleminin tamsayılar kümesinde 56 tane çözümü vardır, çünkü $1980 = 6^2 55$'tir.

Alıştırma Soruları. 1. *a, b, c, d tamsayılar olsun. Aşağıdaki denklemlerin tamsayılar kümesindeki çözümlerini bulunuz.*

(a) $\frac{a}{\sqrt{x}} + \frac{b}{\sqrt{b}} = \frac{c}{\sqrt{z}}$

(b) $a\sqrt{x} + b\sqrt{y} + c\sqrt{z} + d\sqrt{t} = 0$

2. *Aşağıdaki denklemlerin kaçar tane çözümü vardır?*

(a) $\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z} = \sqrt{1980}$

(b) $\frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{y}} = \frac{3}{\sqrt{1980}}$

3. *Her doğal sayı n için, $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}$ sayısının irrasyonel olduğunu kanıtlayınız.*