PROBLEMLERLE EĞLENELİM (Mİ?) (II)

Şafak Alpay *

$F_1 = F_2 = 1$ ve $n \geq 3$ için $F_n = F_{n-1}+F_{n-2}$ ile tanımlanan diziye *Fibonacci dizisi* denir [1]. Bir kaç elemanı

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \ldots$$

dir.

$F_3 = 2$, $F_5 = 5$, $F_7 = 13$, $F_{11} = 89$ hep asal sayılar olduklarından, asal $n > 2$ sayısına karşılık gelen her F_n Fibonacci sayısının asal olduğunu düşünebiliriz. Ancak $F_{19} = 4118 = 37 \cdot 113$ olduğundan bu doğru değildir. Ancak asal Fibonacci sayılarını üretecek bir yöntem de bilinmiyor. Esasında asal Fibonacci sayılarının sonsuz sayıda olup olmadıklarını bile bilmiyoruz.

Ama hemen görebileceğimiz şey birbirini izleyen F_n ve F_{n+1} Fibonacci sayılarının aralarında asal olduğudur. F_n ve F_{n+1}'in birden büyük d gibi bir böleni olsun. F_{n+1} ve F_n'nin farkı olan $F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$ de d ile bölünecektir. $F_n - F_{n-1} = F_{n-2}$ olduğundan F_{n-2} de d ile bölünecektir. Bu şekilde geriye doğru çalışarak F_{n-3}, F_{n-4}, ve sonuçta da varacağımız F_1'in de d ile bölünebileceğini görürüz ki, bu bir çelişkidir.

Her asal p sayısı için p ile bölünebilen sonsuz tane Fibonacci sayısı vardır; daha da ilginci Fibonacci dizisinde bunlar eşit uzaklıktadırlar. Örneğin 3 sayısı dizide dördün katlarında oturan sayıları, 5 sayısı beşin katlarında oturan sayıları böler.

Fibonacci sayıların bilinen birçok özelliği vardır. Bunların bir kısmını aşağıda soracağız. Şimdi bazılarını görelim.

$$\begin{aligned} F_1 &= F_3 - F_2 \\ F_2 &= F_4 - F_3 \\ &\vdots \\ F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n \\ F_n &= F_{n+2} - F_{n+1} \end{aligned}$$

yazıp, taraf tarafa toplayarak

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1 \quad (1)$$

elde ederiz. Diğer bir özellikleri ise $n \geq 2$ için

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n-1}$$

olduğudur. Bunu görmek için sol tarafa E deyip

$$\begin{aligned} E &= F_n(F_{n-1} + F_{n-2}) - F_{n-1}F_{n+1} \\ &= (F_n - F_{n+1})F_{n-1} + F_nF_{n-2} \end{aligned}$$

yazalım. $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ olduğundan parantez içindeki ifade $-F_{n-1}$'dir ve $E = (-1)(F_{n-1}^2 - F_nF_{n-2})$ olur. Benzer yöntem ile

$$F_{n-1}^2 - F_nF_{n-2} = (-1)(F_{n-2}^2 - F_{n-1}F_{n-3})$$

elde ederiz; yukarıda yerine koyarsak $E = (-1)^2(F_{n-2}^2 - F_{n-1}F_{n-3})$ haline gelir. $n-2$ adımdan sonra, varacağımız eşitlik

$$\begin{aligned} E &= (-1)^{n-2}(F_2^2 - F_3F_1) \\ &= (-1)^{n-2}(1^2 - 2 \cdot 1) = (-1)^{n-1} \end{aligned}$$

olacaktır. Bu bilgiler ile aşağıdaki soruları yanıtlayabilirsiniz.

1. Her pozitif tamsayı Fibonacci sayılarının toplamı olarak yazılabilir. Örneğin, $5 = F_3 + F_4$, $6 = F_1 + F_3 + F_4$, $7 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$. 50, 75, 100 ve 125'i Fibonacci sayılarının toplamı olarak yazınız.

2. (a) Tek indeksli ilk n Fibonacci sayısının toplamının $F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$ olduğunu gösteriniz. (İpucu: $F_1 = F_2$, $F_3 = F_4 - F_2$, $F_5 = F_6 - F_4$, $\ldots$; taraf tarafa toplayın.)

(b) $F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$ eşitliğini (a)'yı ve (1)'i kullanarak gösteriniz.

(c) $F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \cdots + (-1)^{n+1}F_n = (-1)^{n+1}F_{n-1} + 1$ eşitliğini gösteriniz.

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

3. 2 ve 5'ten farklı her asal p sayısı için F_{p-1} veya F_{p+1} sayısı p ile bölünür. Bu önermeyi 7, 11, 13 ve 17 için sağlayınız.

4. $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ eşitliğini kullanarak birbirini izleyen Fibonacci sayılarının aralarında asal olduğunu gösteriniz.

5. (a) İki Fibonacci sayısının en büyük ortak böleni de Fibonacci sayısıdır: $d = \text{EBOB}(n, m)$ ise $\text{EBOB}(F_n, F_m) = F_d$'dir. Bu önermeyi (F_9, F_{12}) ve (F_{15}, F_{20}) çiftleri için sağlayınız.

   (b) Yukarıdaki önermeyi kullanarak $2 < n$ ise $F_n|F_m$ olması için gerekli ve yeterli koşulun $n|m$ olduğunu gösteriniz.

6. Aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız. Hepsinde bir önceki problem gerekli olabilir!

   (a) $2|F_n \iff 3|n$

   (b) $3|F_n \iff 4|n$

   (c) $4|F_n \iff 6|n$

   (d) $5|F_n \iff 5|n$

7. $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$ eşitliğini gösteriniz. (İpucu: $F_n^2 = F_n(F_{n+1} - F_{n-1}) = F_n F_{n+1} - F_n F_{n-1}$ işinize yarayabilir.)

Aşağıdaki sorular Diophantus'un ünlü kitabı *Arithmetica*'dan: yani yaklaşık 1800 yaşında.

8. 16 sayısını iki karenin toplamı olarak yazınız.

9. Karesi alınıp, değerine eklendiğinde yine bir kare elde edilen iki sayı bulunuz.

10. 6 ve 7 sayıları kendisinden çıkartıldığında yine kare elde edilen sayıyı bulunuz.

11. Çarpımları toplamlarına veya kendilerine eklendiğinde kare elde edilen iki sayı bulunuz.

12. Alanı kenarlarına eklendiğinde kare olan ve çevresi de küp olan dik üçgeni bulunuz.

13. 20, 30 ve 40 sayıları verilsin. Öyle üç sayı bulunuz ki herhangi ikisinin toplamı verilen sayılardan birisi olsun.

14. Toplamları ve çarpımları verilen bir sayı olan iki sayıyı bulunuz.

15. Toplamları ve karelerinin toplamı verilen sayılar olan iki sayı bulunuz.

16. Farkları verilen bir sayı olan iki kare bulunuz.

17. Verilen iki sayıdan çıkartıldığında farkların kare olduğu sayıyı bulunuz.

18. Kareleri toplamlarına eklendiğinde kare elde edilen iki sayı bulunuz.

19. İkisi çarpılıp üçüncüsüne eklendiğinde kare elde edilen üç sayı bulunuz.

20. İkisi çarpılıp üçüncüsünün karesine eklendiğinde kare elde edilen üç sayıyı bulunuz.

21. Farkları ve küplerinin farkları verilen sayılar olan iki sayıyı bulunuz.

22. Çarpımları ile toplandıklarında bir küp veren iki sayıyı bulunuz.

23. Hipotenüsünden kenarlarından biri çıkartıldığında bir küp elde edilen dik üç geni bulunuz.

Şimdi de değişik dönemlerden birkaç soru.

24. (Bu problem 1202'de Fibonacci tarafından sorulmuş [1].) 2,3,4,5,6 ile böldüğünde 1,2,3,4,5 kalanını veren ve 7'nin katı olan sayıyı bulunuz.

25. (Bu problem Regiomontanus (1436–1476) tarafından sorulmuş.) 10, 13 ve 17 ile böldüğünde 3, 11 ve 15 kalanını veren sayıyı bulunuz.

26. (Bu problemi 1770'te Euler sormuş.) 100 sayısını öyle iki parçaya bölünüz ki biri 7, diğeri 11 ile bölünebilsin.

27. (Son sorumuz 1114–1185 yılları arasında yaşamış 12. yüzyılın önde gelen Hint matematikçisi Bhaskara'dan.) Hangi sayı 6 ile böldüğünde 5 kalanını, 5 ile böldüğünde 4 kalanını, 4 ile böldüğünde 3 kalanını ve 3 ile böldüğünde 2 kalanını verir?

KAYNAKÇA

[1] Ş. Alpay, *Karanlık Çağın Aydınlığı: Fibonacci*, *Bilim ve Ütopya*, Ocak, 1995.