PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A106. $\frac{1}{\cos 0^\circ \cos 1^\circ}+\frac{1}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ}+\cdots+\frac{1}{\cos 88^\circ \cos 89^\circ}=\frac{\cos 1^\circ}{\sin^2 1^\circ}$ olduğunu kanıtlayınız. (*Turgay Uçkun*)

A107. Köşegenleri K noktasında kesişen $ABCD$ kirişler dörtgeninde AKB, BKC, CKD ve DKA üçgenlerinin çevrel çember yarıçapları sırayla R_a, R_b, R_c, R_d ise, $\frac{R_a+R_c}{R_b+R_d}=\frac{a+c}{b+d}$ olduğunu gösteriniz. (*Dinçer Akay*)

A108. Başlangıçta A noktasında bulunan bir kurbağa, her adımda eşit olasılıkla ya doğu ya da batı istikametinde sıçramaktadır. İlk sıçrayışı 64 metre, bundan sonraki her sıçrayışı bir öncekinin yarısı kadar olmaktadır. 400 sıçrama sonunda kurbağanın A noktasına 20 metreden daha yakında bulunması olasılığını hesaplayınız. (*Akın Bayazıt*)

A109. $\{F_n\}$ dizisi, $F_0=0$, $F_1=1$, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ $(n\geq 0)$ şeklinde tanımlanan Fibonacci dizisini gösterirse, her a ve b pozitif tamsayıları için, $F_k\equiv a \pmod{3^b}$ şeklinde bir k tamsayısı bulunabileceğini gösteriniz.

A110. $1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5,\ldots$ dizisinin n'yinci elemanını belirleyiniz. (Dizide her m sayısı, m kez tekrarlanmaktadır.) (*Yaman Duruman*)

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y106. Bir ABC üçgeninde A açısının içaçıortayı $[BC]$ kenarını L, ABC üçgeninin çevrel çemberini A ve N noktalarında kesiyor. L'den AB ve AC doğrularına inilen dikme ayakları sırayla K ve M ise, alan(ABC) = alan$(AKNM)$ olduğunu gösteriniz. (*Turgay Uçkun*)

Y107. ABC ve PQR üçgenleri verildiğinde herhangi bir X noktası için PX, QX, RX doğrularının DC, CA, AB doğrularını kestiği noktalar sırayla A_x, B_x, C_x olsun. $B_xC_x \parallel QR$, $C_xA_x \parallel RP$ ve $A_xB_x \parallel PQ$ olacak şekilde X noktasının varlığını gösteriniz. (*Hüseyin Demir*)

Y108. ABC üçgeninde $\widehat{ABC}=60^\circ$, $D\in[AC]$ için $AD=BC$'dir. $\widehat{BDC}=30^\circ$ ise, $\widehat{BAC}$'yi hesaplayınız. (*Ergün Yaraneri*)

Y109. ABC üçgeninde içmerkez I, içteğet çember yarıçapı r, çevrel çember yarıçapı R ve A açısı karşısındaki dışteğet çemberin yarıçapı r_a'dır. BIC üçgeninin çevrel çember yarıçapı R_A ise, $R_A^2=R(r_a-r)$ olduğunu gösteriniz. (*Ergün Yaraneri*)

Y110. n ne kadar büyük olursa olsun,

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}\leq 2$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu ve her n için toplamın $2-\frac{2}{2n+1}$ sayısından küçük olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜMLER

A96. Eğer $Z=\frac{(1+i)^3+(1+i)^6+\cdots+(1+i)^{12n}}{(1-i)^3+(1-i)^6+\cdots+(1-i)^{12n}}$ ise (n bir doğal sayı), $|Z|$'yi hesaplayınız. (*Hasan Kullap*)

Çözüm. $(1+i)^3=2(i-1)$, $(1-i)^3=-2(i+1)$, $(i-1)^2=-2i$, $(i+1)^2=2i$ ve $i^{2n}=(-1)^n$ olduğunu gözönünde bulundurarak

$$Z=\frac{[2(i-1)]^1+[2(i-1)]^2+\cdots+[2(i-1)]^{4n}}{[-2(i+1)]^1+[-2(i+1)]^2+\cdots+[-2(i+1)]^{4n}}$$

yazalım. Buradan

$$Z=\frac{2(i-1)\left[\frac{1-[2(i-1)]^{4n}}{1-2(i-1)}\right]}{-2(i+1)\left[\frac{1-[-2(i+1)]^{4n}}{1-2(i+1)}\right]}=\frac{1-i}{1+i}\,\frac{\frac{1-[4(i-1)^2]^{2n}}{3-2i}}{\frac{1-[4(i+1)^2]^{2n}}{3+2i}}$$
$$=\frac{1-i}{1+i}\,\frac{3+2i}{3-2i}\,\frac{1-[4(-2i)]^{2n}}{1-[4(2i)]^{2n}}$$
$$=\frac{1-i}{1+i}\,\frac{3+2i}{3-2i}\,\frac{1-4^{2n}2^{2n}(-1)^n}{1-4^{2n}2^{2n}(-1)^n}=\frac{1-i}{1+i}\,\frac{3+2i}{3-2i}$$

elde edilir. Her hangi bir ζ kompleks sayısı için $|\overline{\zeta}|=|\zeta|$ olduğundan $|Z|=1$ bulunur.

(**Çözenler:** *Atasağan Baykal, Boğaçhan Çelen, Hasan Denker, Aycan Dinler, Mehmet Ekmekçi, Erol Gedikli, Namık Gök, Ali Ekber Gürel, Muanner Keleş, Mustafa Kesal, Ülkü Öztaş, Ruhi Tabur, Ali Tombak, Nazım Utku, Ergün Yaraneri.*)

A97. Bir ABC üçgeninde $\widehat{ABC} = 18°$ ve $\widehat{ACB} = 54°$ ise, $\frac{|AB|}{|AC|}$ oranını hesaplayınız. (*Ali Akın*)

Çözüm. $ABXYZ$ düzgün beşgeninde $\widehat{ABZ}$'nin açıortayı $[AZ]$'yi C'de kessin. ABC üçgeninde $\widehat{ABC} = 18°$ ve $\widehat{ACB} = 54°$ olur. ABZ üçgeninde, açıortay teoreminden, $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BZ|}{|CZ|}$ yazılır. Her iki tarafı $|CZ|$ ile çarpıp $|AB|$ ile toplayarak

$$|BZ| + |AB| = \frac{|AB|}{|AC|}|CZ| + |AB| = \frac{|AB|}{|AC|}|AZ|$$

bulunur. $|AB| = |AZ|$ ve $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ için $|BZ| = \phi|AB|$ olduğu hatırlanarak $\frac{|AB|}{|AC|}|AB| = \phi|AB| + |AB|$ ve $\frac{|AB|}{|AC|} = \phi + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ elde edilir.

(**Çözenler:** *Şevket Emrah Aydın, Atasağun Baykal, Alper Çay, Hasan Denker, Mehmet Ekmekçi, Erol Gedikli, Namık Gök, Ali Ekber Gürel, Muammer Keleş, Mustafa Kesal, Seyhun Kesim, Levent Koçoğlu, Ülkü Öztaş, Ruhi Tabur, Ali Tombak, Turgay Uçkun, Nazım Utku, Ergün Yaraneri.*)

A98. Bir ABC üçgeninin içmerkezi O, A açısı karşısında oluştan teğet çemberin merkezi O' olsun. $|OO'| = \frac{|AB||AC|}{|AO|} - |AO|$ olduğunu gösteriniz. (*Ergün Yaraneri*)

Çözüm. $[BO]$, $[CO]$ doğruları iç açıortaylardır ve $|AO| = |AO'|$'dür. $[BO']$ ve $[CO']$ dış açıortaylardır. $\widehat{BAC} = 2a$ ve $\widehat{BCA} = 2x$ olsun. $\widehat{BAO'} = \widehat{OAC} = a$ ve $\widehat{AO'B} = \widehat{ACB}/2 = \widehat{OCA} = x$ olduğundan, ABO ve AOC benzerdir. Buradan $\frac{|AB|}{|AO|} = \frac{|AO'|}{|AC|} = \frac{|AO|+|OO'|}{|AC|}$ ve nihayet istenen sonuç elde edilir.

(**Çözenler:** *Ali Akın, Emrah Aydın, Atasağun Baykal, Hasan Denker, Yaman Duruman, Mehmet Ekmekçi, Namık Gök, Ali Ekber Gürel, Muammer Keleş, Mustafa Kesal, Ülkü Öztaş, Gültekin Pulat, Selami Rüzgar, Ruhi Tabur, Turgay Uçkun, Nazım Utku.*)

A99. Bir $ABCD$ karesinin içinde $\widehat{DAK} = \widehat{DCK} = 10°$ olacak şekilde bir K noktası ve BC kenarı üzerinde $\widehat{BAL} = 35°$ olacak şekilde L noktası işaretleniyor. $\widehat{AKL}$ açısını hesaplayınız. (*Alaattin Aktaş*)

Çözüm. $[AK] \cap [CD] = \{P\}$ ve $[CK] \cap [AD] = \{Q\}$ diyelim. $\widehat{DPK} = \widehat{DQK} = 80°$ olduğundan, $\widehat{AKC} = \widehat{PKQ} = 110°$ bulunur. Simetriden $K \in [DB]$ olduğu anlaşılır. Dolayısıyla $\widehat{BKC} = \widehat{AKB} = 55°$'dir. Öte yandan, $\widehat{BLA} = 55°$ olduğundan, $ABLK$ bir kirişler dörtgenidir. Buradan da $\widehat{AKL} = 90°$ bulunur.

(**Çözenler:** *Ali Akın, Şevket Emrah Aydın, Murat Aygen, Atasağun Baykal, Alper Çay, Hasan Denker, Aycan Dinler, Mehmet Ekmekçi, Erol Gedikli, Namık Gök, Ali Ekber Gürel, Muammer Keleş, Mustafa Kesal, Levent Koçoğlu, Ülkü Öztaş, Ruhi Tabur, Ali Tombak, Turgay Uçkun, Nazım Utku, Erol Ünal, Ergün Yaraneri.*)

A100. n basamaklı bir sayının, birler basamağı ve i'yinci basamağındaki rakamlarının yeri değiştirilerek bulunan sayı ile ilk sayının farkının mutlak değerinin rakamları toplamını x_i ile gösterelim. $x_2 + x_3 + \cdots + x_n$ toplamını hesaplayınız. (*Cem Güzel*)

Çözüm. Verilen n basamaklı sayıyı $a_n 10^{n-1} + \cdots + a_2 10 + a_1$ şeklinde yazarsak, birler basamağındaki rakamın i'yinci basamaktaki rakamla yer değiştirilmesi ile elde edilen sayının farkı mutlak değerce

$$|(a_k - a_1)10^{k-1} + (a_1 - a_k)| = |a_k - a_1|10^{k-1} - |a_k - a_1|$$

olur. $|a_k - a_1| = t$ dersek, bu farkı

$$t\underbrace{0\cdots0}_{k-1} - t = (t-1)\underbrace{9\cdots9}_{k-2}(10-t)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu farkın rakamları toplamı $x_k = (k-2)9 + t - 1 + 10 - t = (k-1)9$'dur. Bu durumda

$$\sum_{k=2}^{n} x_k = [1 + 2 + \cdots + (n-1)]9 = \frac{9}{2}n(n-1)$$

bulunur.

(**Çözenler:** *Şevket Emrah Aydın, Atasağun Baykal, Hasan Denker, Aycan Dinler, Yaman Duruman, Mehmet Ekmekçi, Ali Ekber Gürel, Namık Gök, Muammer Keleş, Mustafa Kesal, Ülkü Öztaş, Nazım Utku, Ergün Yaraneri.*)

Y96. Bir üçgenin a, b, c kenar uzunlukları ve r içteğet çember yarıçapı için $\frac{abc}{a+b+c} \geq 4r^2$ eşitsizliğinin geçerli olduğunu gösteriniz. Eşitliğin hangi hallerde sağlanacağını bulunuz. (*Tamer Adanır*)

Çözüm. Üçgenin çevrel çember yarıçapını R ve alanını da S ile gösterelim. $S = \frac{abc}{4R} = \frac{a+b+c}{2}r$ den $\frac{abc}{a+b+c} = 2Rr$ bulunur. $R \geq 2r$

olduğundan, $2Rr \geq 4r^2$ elde edilir. $R = 2r$ olması için üçgenin eşkenar olması gerek ve yeterlidir [1].

(**Çözenler:** *Ali Akın, Şevket Emrah Aydın, Murat Aygen, Atasağun Baykal, Alper Çay, Hasan Denker, Mehmet Ekmekçi, Erol Gedikli, Namık Gök, Ali Ekber Gürel, Mustafa Kesal, Levent Koçoğlu, Ruhi Tabur, Turgay Uçkun, Nazım Utku, Ergün Yaraneri.*)

Y97. Bir üçgenin S alanı ve r içteğet çember yarıçapı için $S \geq 3\sqrt{3}r^2$ eşitsizliğinin geçerli olduğunu gösteriniz. Eşitliğin hangi hallerde sağlanacağını bulunuz. (*Dinçer Akay*)

Çözüm. Üçgenin kenar uzunlukları a, b, c ve yarıçevresi de u olsun. Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği'nden $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ veya $(2u)^3 \geq 27abc$ elde edilir. $abc = 4uRr$ olduğundan, $(2u)^3 \geq 108Rur$ veya $2u^2 \geq 27Rr$ bulunur. $R \geq 2r$ eşitsizliğini kullanarak $2u^2R \geq 54Rr^2$, buradan da $u \geq 3\sqrt{3}r$ ve dolayısıyla $S = ur \geq 3\sqrt{3}r^2$ elde edilir. Eşitlik ancak üçgenin eşkenar olması halinde geçerli olur.

(**Çözenler:** *Tamer Adanır, Ali Akın, Murat Aygen, Atasağun Baykal, Alper Çay, Hasan Denker, Mehmet Ekmekçi, Namık Gök, Mustafa Kesal, Levent Koçoğlu, Murat Kurtoğlu, Ruhi Tabur, Turgay Uçkun, Nazım Utku.*)

Y98. x, y, a, b, c doğal sayılar olmak üzere

$$x^2 + a^3 = y^4$$
$$x^2 + a^3 + b^3 = y^4$$
$$x^2 + a^3 + b^3 + c^3 = y^4$$

denklemlerinin herbirinin sonsuz sayıda tamsayı çözümü olduğunu gösteriniz. (*Almas Rimov*)

Çözüm. $\frac{k(k+1)}{2} = m^2$ denkleminin doğal sayılar kümesinde bir çözümü (k_1, m_1) olsun. $k' = 4k_1(k_1+1)$ alalım.

$$\begin{aligned}\frac{k'(k'+1)}{2} &= 2k_1(k_1+1)[4k_1(k_1+1)+1] \\ &= 4m_1^2(2k_1+1)^2 = (2m_1(2k_1+1))^2\end{aligned}$$

olduğundan, $(4k_1(k_1+1), 2m_1(2k_1+1))$ de bir çözüm olur. $4k_1(k_1+1) > k_1$ olduğu için, $\frac{k(k+1)}{2} = m^2$ denkleminin doğal sayılar içinde bir çözümü $(8, 6)$ olduğundan, bu denkleme sonsuz çözüm yazılabileceği anlaşılır.

$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ olduğu hatırlanırsa,

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = n^3 + \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = n^3 + (n-1)^3 + \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = n^3 + (n-1)^3 + (n-2)^3 + \left(\frac{(n-2)(n-3)}{2}\right)^2$$

eşitlikleri yazılabilir. $\frac{n(n+1)}{2} = m^2$ denkleminin doğal sayılar içinde sonsuz tane çözümü olduğunu bildiğimizden, istenilen gösterilmiş olur.

(**Çözenler:** *Atasağun Baykal, Hasan Denker, Yaman Duruman, Muammer Keleş, Mehmet Kurtoğlu, Şahin Polat, Gültekin Pulat.*)

Y99. İçteğet çember yarıçapı r olan bir ABC üçgeninin içmerkezinin A, B, C köşelerine uzaklıkları sırasıyla X_A, X_B, X_C olsun. ABC üçgeninin A, B, C açıları karşısındaki dıştan teğet çemberlerin merkezlerinin içmerkeze uzaklıkları sırasıyla Y_A, Y_B, Y_C olsun. $r(Y_A + Y_B + Y_C) = X_AX_B + X_AX_C + X_BX_C$ olduğunu gösteriniz. (*Ergün Yaraneri*)

Çözüm. İçteğet çember merkezi I, A açısının karşısındaki dıştan teğet çemberin merkezi I' ve içteğet çemberin AB ve AC kenarlarına değdiği noktalar U ve T ile gösterilsin. AIT üçgeninden $X_A = \frac{r}{\sin(A/2)}$, CIT üçgeninden $X_C = \frac{r}{\sin(C/2)}$ ve IBU üçgeninden de $X_B = \frac{r}{\sin(B/2)}$ yazılır. Öte yandan, $II'C$ üçgeninden $|II'| = Y_A = \frac{X_C}{\sin(B/2)}$ elde edilir. Benzer şekilde $Y_B = \frac{X_A}{\sin(C/2)}$ ve $Y_C = \frac{X_B}{\sin(A/2)}$ yazılır. Bunlar istene sonucu verir.

(**Çözenler:** *Tamer Adanır, Ali Akın, Şevket Emrah Aydın, Atasağun Baykal, Hasan Denker, Mehmet Ekmekçi, Namık Gök, Muammer Keleş, Mustafa Kesal, Turgay Uçkun.*)

Y100. Bir ABC dik üçgeninde ($\hat{A} = 90°$), hipotenüse inilen dikme AD olsun. ABD ve ACD üçgenlerinin içmerkezlerini birleştiren doğru AB ve AC kenarlarını sırasıyla K ve L noktalarında kessin. ABC ve AKL üçgenlerinin alanları sırasıyla S ve S' ise, $S \geq 2S'$ olduğunu gösteriniz. (*Turgay Uçkun*)

Çözüm. ABD ve ACD üçgenlerinin içmerkezleri sırayla I_1 ve I_2 olsun. I_1 ve I_2, ilgili üçgenlerin açıortayların kesim noktasıdır. $\widehat{AI_1B} = 135°$ ve $\widehat{I_1AI_2} = 45°$ olduğundan, ABD ve CAD üçgenelrinin benzerliğini gözönüne