alarak, I_1BD ve I_2AD üçgenleri benzerdir diyebiliriz. Buradan $\frac{|BD|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|I_1D|}{|I_2D|}$ ve $\frac{|I_1D|}{|AB|} = \frac{|I_2D|}{|AC|}$ elde edilir. $\widehat{I_1DI_2} = \widehat{BAC} = 90^\circ$ olduğundan, I_1DI_2 ve BAC benzerdir. $\widehat{I_1BD} = \theta$ dersek, $\widehat{I_2I_1D} = \widehat{CBA} = 2\theta$'dır. Böylece $\widehat{KI_1B} = 45^\circ - \theta$ ve $\widehat{LKA} = 45^\circ$ olup, AKL'nin bir ikizkenar dik üçgen olduğu anlaşılır. DAI_2 ve LAI_2 üçgenleri AAA bağıntısıyla benzer olduklarından, bu üçgenler eş olup, $|AD| = |AL| = |AK|$ elde edilir. O halde

$$S' = \frac{|AK|\,|AL|}{2} = \frac{|AD|^2}{2} = \frac{|BD|\,|BC|}{2},$$

$$S = \frac{(|BD| + |DC|)|AD|}{2}$$

$$= \frac{(|BD| + |DC|)\sqrt{|BD|\,|BC|}}{2}$$

eşitliklerinden $\frac{S}{S'} = \frac{|BD| + |DC|}{\sqrt{|BD|\,|DC|}}$ olur ve nihayet Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği'nden $S \geq 2S'$ sonucu elde edilir.

(**Çözenler:** *Tamer Adanır, Şevket Emrah Aydın, Ayhan Aziz, Atasağun Baykal, Hasan Denker, Mustafa Kesal, Ergün Yaraneri.*)

KAYNAKÇA

[1] C. Koç, *Bir Üçgene Ait Çemberler*, *Matematik Dünyası*, **2**, sayı 1, 17–21 (1992).

PROBLEM SEMİNERLERİ

TÜBİTAK Bilim Adamı Yetiştirme Grubu'nca Mart 1995 tarihinden itibaren matematik problem seminerlerine başlanmıştır. Ayda iki kez Çarşamba günleri 15:00–17:00 saatleri arasında, şimdilik sadece Ankara'da yapılacak olan seminerlere yaz aylarında ara verilecek ve Ekim 1995'ten itibaren yeniden devam edilecektir.

Seminerlerde ele alınacak problemler *Matematik Dünyası* ile *Bilim ve Teknik* dergilerinde yayımlanacaktır. Seminerlere, liseli gençliğin yanısıra lise matematik öğretmenlerinin ve matematiğe ilgi duyan herkesin katılması beklenmektedir. Bu seminerlere mektupla katılmak da mümkündür.

Ali Doğanaksoy (ODTÜ) ve Semih Koray (Bilkent Üniversitesi) gözetiminde, geçmiş yıllarda matematik olimpiyatlarına katılmış olan Selçuk Ateşkan, Oytun Eskiyenentürk, Tolga Etgü, Barış Fidan, Özcan Öztürk ve Çetin Ürtiş tarafından yürütülen problem seminerleri, TÜBİTAK Bilim Adamı Yetiştirme Grubu, Atatürk Bulvarı, No: 221, Kavaklıdere, Ankara (Telefon: (312) 468 53 00 / 2201) adresinde yapılmaktadır. Mektupla katılmak isteyenler aynı adrese başvurabilirler.

Problem Semineri 95/1, 18 Mart 1995

1. İki kişilik bir oyunda başlangıçta $n \geq 2$ kibritten oluşan bir öbek bulunmaktadır. Birinci oyuncu bu öbeği boş olmayan iki öbeğe ayırır. İkinci oyuncu, bu iki öbekten birini seçer ve bu öbeği (mümkünse) yine boş olmayan iki öbeğe ayırır. Sıra yeniden kendisine gelen birinci oyuncu, aynı seçeneklerle karşı karşıyadır. Oyun, oyunculardan biri tek kibritten oluşan bir öbeği seçene kadar devam eder. Oyunu tek kibritlik öbeği seçen oyuncu kazanır. Bu oyunu, n'nin hangi değerleri için mutlaka birinci, hangi değerleri içinse mutlaka ikinci oyuncunun kazanabileceğini bulunuz.

2. Tek kişilik bir oyuna sırayla n_1, n_2 ve n_3 kibritten oluşan üç öbek kibritle başlanır. Oyuncu, her seferinde kibrit öbeklerinden ikisini seçerek (mümkünse) birinden diğerine, ikinci öbekteki kibrit sayısını eskisinin iki katına çıkartacak kadar kibrit aktarır. Hangi (n_1, n_2, n_3) dağılımları için, yukarıdaki işlemi sonlu sayıda yineleyerek, kibritleri iki öbekte toplamanın mümkün olduğunu saptayınız.

3. İki kişi tarafından oynanan bir oyuna, sırayla $n_1, \ldots, n_p$ kibritten oluşan p öbek kibritle başlanır. Birinci oyuncu bu p öbekten birini seçer ve bu öbekten en az bir olmak üzere istediği sayıda kibriti alarak oyundan çıkartır. İkinci oyuncu oyundan henüz çıkartılmamış kibritlerle aynı işlemi yapar. Sıra tekrar birinci oyuncuya gelir ve oyun kibritlerin hepsi oyundan çıkartılana kadar sürer. Son kibrit grubunu oyundan çıkartan oyuncu oyunu kazanır. Her $p \geq 1$ tamsayısı için, oyunu mutlaka birinci (ikinci) oyuncunun kazanmasını mümkün kılan tüm $(n_1, \ldots, n_p)$ dağılımlarını bulunuz.

4. Yine iki kişilik bir oyunda, başlangıçta sırayla n_1 ve n_2 kibritten oluşan iki öbek bulunmaktadır. Oyuncular sırayla bu öbeklerden kibrit alarak oyundan çıkartırlar. Sırası gelen oyuncu, ya öbeklerden birini seçerek bu öbekten en az bir olmak üzere istediği sayıda kibriti alır, ya da her iki öbekten de eşit ve pozitif sayıda kibriti oyundan çıkartır. Son kibriti oyundan çıkartan oyuncu oyunu kazanır. $t = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ olması durumunda $(n_1, n_2) = ([kt], [kt^2])$ ya da $(n_1, n_2) = ([kt^2], [kt])$ olmasını sağlayacak bir k tamsayısının bulunması durumunda, oyuna ikinci sırada başlayan oyuncunun oyunu mutlaka kazanabileceğini, bunun dışındaki tüm durumlarda ise, oyuna ilk sırada başlayan oyuncunun oyunu mutlaka kazanmasının mümkün olduğunu kanıtlayınız.

Problem Semineri 95/2, 22 Mart 1995

1. Verilen üç çemberi dik kesen bir çember çiziniz.

2. Kenarları verilen üç noktadan geçen ve köşeleri verilen bir çember üzerinde bulunan bir üçgen çiziniz.

3. Eşit kenarları verilen bir çemberin içinde verilmiş iki noktadan geçen ve köşeleri çemberin üzerinde bulunan bir ikizkenar üçgen çiziniz.

4. Verilen bir üçgenin içine, her biri üçgenin iki kenarına ve diğer iki çembere teğet üç çember çiziniz.

Problem Semineri 95/3, 5 Nisan 1995

1. 20 lirası olan bir kumarbazın 40 liraya ihtiyacı vardır. Rulette tek-çift oynamaya karar verir. Buna göre, her seferinde ya teklere ya da çiftlere para yatıracak, sonucun para yatırdığı seçenekle çakışması durumunda yatırdığı paranın iki mislini geri alacak, aksi halde ise yatırdığı parayı yitirecektir. Ruletin her dönüşünde çift gelme olasılığı 18/37'dir. Kumarbaz, şu iki yoldan birini izlemeyi düşünmektedir: Birincisi, parasının tamamını tek seferde çiftlere yatırmaktır; ikincisi ise her seferinde çiftlere bir lira yatırıp, bu şekilde ya toplam parasını 40 liraya çıkana ya da tüm parasını kaybedene kadar devam etmektir. Bu yollardan hangisini izlediği takdirde kumarbazın amacına ulaşma olasılığı daha yüksektir?

2. A ve B tarafından oynanan bir oyunda, $0 < p < 1/2$ olmak üzere, A'nın kazanma olasılığı p, B'ninki ise $1-p$'dir. Bir parti, çift sayıda oyundan oluşmaktadır. Oyuncular kazandıkları her oyun için bir puan almakta, toplam puanı daha yüksek olan partiyi kazanmaktadır. Parti kaç oyundan oluşursa A'nın partiyi kazanma olasılığı en yüksek olur?

3. Hiç parası olmayan bir kumarbazın 200 liraya ihtiyacı vardır. Kendisine bir şans tanımak isteyen kumarhane sahibi aşağıdaki şekilde 100 oyun oynamasına izin verir. Kumarbaz, her seferinde $N \geq 1$ tamsayısı seçerek, $2/(N+1)$ olasılıkla N lira kazanıp, $(N-1)/(N+1)$ olasılıkla 1 lira kaybedecektir. Ancak 1'den büyük bir N seçebilmesi için en az 1 lirasının bulunması gerekmektedir. Bu kumarbaz nasıl bir yol izlerse amacına ulaşma olasılığı en yüksek olur?

4. Olasılık hesabına meraklı bir sultan, vezirini ödüllendirmek ister. 100 adet keseye, farklı herhangi ikisine değişik sayıda olmak üzere altın koydurur. Vezir, keseleri açarak içlerinde kaç altın olduğuna bakar. Her açtığı kesede iki seçeneği vardır. Ya bu keseyi seçer ya da daha önce açmadığı keselerden birine geçer. Sonuçta seçtiği kese, 100 keseden içinde en çok altının bulunduğu kese ise, vezir bu altınların hepsini kazanır. Aksi takdirde, ödüle ilişkin tüm şansını kaybeder. Vezir nasıl bir yol izlerse ödülü kazanma olasılığı en yüksek olur?

Problem Semineri 95/4, 19 Nisan 1995

1. İki tamsayının kareleri toplamı olarak yazılabilen tüm asal sayıları bulunuz.

2. İki tamsayının kareleri toplamı olarak yazılabilen tüm tamsayıları bulunuz.

3. Üç tamsayının kareleri toplamı olarak yazılabilen tüm tamsayıları bulunuz.

4. Dört tamsayının kareleri toplamı olarak yazılabilen tüm tamsayıları bulunuz.

Çözümler

Bu sayımızda 95/1 seminerinde yer alan problemlerin tam çözümlerini veriyoruz. Haziran 1995 sayımızda 95/2, 95/3 ve 95/4 seminerlerinin çözümleri verilecektir. Mayıs ve Haziran aylarında yapılacak olan 95/5, 95/6 ve 95/7 seminerlerinin problemleri *Bilim ve Teknik* dergisinde yayınlanacaktır.

Problem Semineri 95/1

Yönetim: Oytun Eskiyenentürk, Çetin Ürtiş

1. $n = 2$ ya da $n = 3$ durumunda, birinci oyuncu verilen kibrit öbeğini nasıl ikiye ayırırsa ayırsın, bu iki öbekten en az biri 1 kibritten oluşur ve ikinci oyuncu bu öbeği seçerek oyunu kazanır. $n = 4$, $n = 5$ ve $n = 6$ durumlarında ise, birinci oyuncu verilen öbeği sırayla 2–2, 2–3 ve 3–3 şeklinde ayırırsa, ikinci oyuncu kendini, oyuna 2 ya da 3 kibritlik bir öbekle başlayan bir "birinci oyuncu" konumunda bulur ve dolayısıyla oyunu kaybeder. Oyunu mutlaka birinci oyuncunun kazanmasını mümkün kılan n tamsayılarının kümesini N_1, ikinci oyuncunun kazanmasını sağlayanları ise N_2 ile gösterirsek, $2, 3 \in N_2$ ve $4, 5, 6 \in N_1$ olur. Şimdi $N_1 = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 2,\ n \equiv 0, 1 \text{ ya da } 4 \pmod 5\}$ ve $N_2 = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 2,\ n \equiv 2 \text{ ya da } 3 \pmod 5\}$ olduğunu iddia ediyoruz. Bu iddiamızı tümevarımla kanıtlayacağız.

Bir $n \geq 6$ tamsayısının şu koşulu sağladığı varsayalım: Her $2 \leq k \leq n$ tamsayısı için, $k \equiv 0, 1$ ya da $4 \pmod 5$ ise, $k \in N_1$; $k \equiv 2$ ya da $3 \pmod 5$ ise, $k \in N_2$ olsun. Şimdi $n+1 \equiv 0, 1, 2, 3, 4 \pmod 5$ durumlarını ayrı ayrı ele alacağız.

Önce $n + 1 \equiv 0 \pmod 5$ olduğunu kabul edelim. Birinci oyuncu verilen öbeği 3 ve $n - 2$ kibritten oluşan iki öbeğe ayırırsa, $n - 2 \equiv 2 \pmod 5$ olduğundan, tümevarım varsayımına göre $3, n - 2 \in N_2$ olur. İkinci oyuncu, bu iki öbekten hangisini seçerse seçsin, bu öbekle oyuna başlayan "birinci oyuncu" konumuna gireceğinden, oyunu kaybeder. Dolayısıyla bu durumda $n + 1 \in N_1$ olur.

$n + 1 \equiv 1 \pmod 5$ durumunda da birinci oyuncu, öbeği 3 ve $n - 2$ kibritlik iki öbeğe ayırarak, $n - 2 \equiv 3 \pmod 5$ olduğundan, benzer biçimde oyunu kazanmayı garantiler. $n + 1 \equiv 4 \pmod 5$ durumunda ise, $n - 1 \equiv 2 \pmod 5$ olur ve dolayısıyla birinci oyuncu, bu kez verilen öbeği 2 ve $n - 1$ biçiminde ayırarak, ikinci oyuncu ne yaparsa yapsın oyunu kazanabilir. Sonuç olarak, $n + 1 \equiv 0, 1$ ya da $4 \pmod 5$ ise, tümevarım varsayımı dolayısıyla $n + 1 \in N_1$ olur.

Şimdi de $n + 1 \equiv 2 \pmod 5$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $n + 1 \in N_2$ olduğunu göstermek için, $1 < l < n$ koşulunu sağlayan her l tamsayısı için, ya $l \in N_1$ ya da $n + 1 - l \in N_1$ kanıtlamamız yeterli olacaktır. $l \equiv 0, 1$ ya da $4 \pmod 5$ ise bu koşul sağlanır. Öte yandan, $l \equiv 2 \pmod 5$ ise, $n + 1 - l \equiv 0 \pmod 5$ ve $l \equiv 3 \pmod 5$ ise de $n+1-l \equiv 4 \pmod 5$ olacağından, istenen koşul yine sağlanmış olur. Yani $n + 1 \in N_2$'dir. Benzer biçimde $n + 1 \equiv 3 \pmod 5$ ise, her $1 < l < n$ tamsayısı için, $l \equiv 2 \pmod 5$ durumunda $n+1-l \equiv 1 \pmod 5$ ve $l \equiv 3 \pmod 5$ durumunda ise $n+1-l \equiv 0 \pmod 5$ olduğundan, yine $n + 1 \in N_2$ sonucu elde edilir.

Özetle, başlangıçtaki kibrit sayısı $n \equiv 0, 1$ ya da $4 \pmod 5$ ise oyunu mutlaka birinci oyuncu, $n \equiv 2$ ya da $3 \pmod 5$ durumunda ise mutlaka ikinci oyuncu kazanır.

2. Genelliği yitirmeden $0 < n_1 \leq n_2 \leq n_3$ olduğunu kabul edelim. Bölme algoritmasına göre, $n_2 = n_1 q + r$ ve $0 \leq r < n_1$ olacak şekilde q ve r tamsayıları bulunur. Şimdi q sayısını iki tabanına göre yazalım. $q \geq 1$ olduğundan, $k \geq 0$, $m_0, m_1, \ldots, m_{k_1} \in \{0, 1\}$ ve $m_k = 1$ olmak üzere, $q = m_0 + 2m_1 + \cdots + 2^k m_k$ olur. Şimdi sırayla $i = 0, 1, \ldots, k$ için aşağıdaki aktarma işlemlerini yapalım: i'yinci aktarmada, $m_i = 1$ ise ikinci öbekten birinciye, $m_i = 0$ ise üçüncü öbekten yine birinciye $2^i n_1$ tane kibrit aktaralım. Bu şekilde her seferinde birinci öbekteki kibrit sayısını iki katına çıkacağı gibi, ikinci öbekteki kibrit sayısının bu işlemlerin gerçekleştirilmesine yeteceği açıktır. Öte yandan, bu işlemler sırasında üçüncü öbekten birinci öbeğe en fazla $(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1})n_1$ kibrit aktarılacağı ve $2^k n_1 \leq n_2 \leq n_3$ olduğu için, üçüncü öbekte de yeterli sayıda kibrit vardır.

$r = 0$ durumunda, yukarıdaki işlem dizisi sonucunda bütün kibritler iki öbekte toplanmış olur. Diğer taraftan $r > 0$ ise, aynı zamanda $r < n_1 \leq n_2 \leq n_3$ olduğundan, en az sayıda kibrit içeren öbek ya da öbeklerdeki kibrit sayısı küçültülmüş olur. Dolayısıyla her seferinde öbekleri yeniden büyüklük sırasına göre dizerek ve yukarıdaki işlem dizisini sonlu sayıda uygulayarak bir öbeği ortadan kaldırabiliriz. Diğer bir deyişle, tüm (n_1, n_2, n_3) negatif olmayan tamsayı sıralı üçlüleri için, kibritleri istenilen biçimde en fazla iki öbekte toplayabiliriz.

3. $n_1, n_2, \ldots, n_p$ sayılarından en büyüğünün iki tabanına göre yazılımında kullanılan rakam sayısı $l + 1$ olsun. Bu sayıları, gerekirse başlangıç rakamının sıfır olmasına izin vermek suretiyle, $l+1$ rakamlı olarak iki tabanına göre yazalım. Bu durumda her $k \in \{1, \ldots, p\}$ için $\alpha_0^k, \alpha_1^k, \ldots, \alpha_l^k \in \{0, 1\}$ ve en az bir $j \in \{1, \ldots, p\}$ için $\alpha_l^j = 1$ olmak üzere, $n_k = \alpha_l^k 2^l + \alpha_{l-1}^k 2^{l-1} + \cdots + \alpha_1^k 2 + \alpha_0^k$ olur. Her $i \in \{0, 1, \ldots, l\}$ için de $a_i = \sum_{k=1}^{p} \alpha_i^k$ olsun. Şimdi N_1 ile, $a_0, a_1, \ldots, a_l$ sayılarından en az birinin tek olmasına yol açan tüm $(n_1, n_2, \ldots, n_p)$ dağılımlarının kümesini gösterelim. N_1 kümesinin, oyunu mutlaka birinci oyuncunun kazanmasını mümkün kılan tüm $(n_1, n_2, \ldots, n_p)$ dağılımlarının kümesi olduğunu, N_1 kümesine ait olmayan herhangi bir başlangıç dağılımının ise oyunu mutlaka ikinci oyuncunun kazanmasını mümkün kıldığını iddia ediyoruz.

Şimdi N_1 kümesine ait bir $(n_1, n_2, \ldots, n_p)$ dağılımını ele alalım. Bu durumda a_j tek sayı ve her $i \in \{j+1, \ldots, l\}$ için, a_i çift sayı olacak şekilde bir $j \in \{0, 1, \ldots, l\}$ bulunur. O zaman da $\alpha_j^t = 1$ olacak şekilde en az bir $t \in \{1, \ldots, p\}$ vardır. Birinci oyuncu t'yinci öbekten pozitif ve uygun sayıda kibrit uzaklaştırarak bu öbekte kalan kibrit sayısını, $\bar{\alpha}_{j-1}^t, \ldots, \bar{\alpha}_1^t, \bar{\alpha}_0^t$ sayıları $\{0, 1\}$ kümesinden istenildiği gibi seçilmek üzere

$$\bar{n}_t = \alpha_l^t 2^l + \cdots + \alpha_{j+1}^t 2^{j+1} + 0 \cdot 2^j + \bar{\alpha}_{j-1}^t 2^{j-1} + \cdots + \bar{\alpha}_1^t 2 + \bar{\alpha}_0^t$$

sayısına indirebilir. Bunun sonucunda ortaya çıkan $(n_1, \ldots, n_{t-1}, \bar{n}_t, n_{t+1}, \ldots, n_p)$ dağılımına karşılık gelen a_i toplamlarını $\bar{a}_i$ $(i = 0, 1, \ldots, l)$ ile gösterirsek, $\bar{a}_l = a_l, \ldots, \bar{a}_{j+1} = a_{j+1}, \bar{a}_j = a_j - 1$ çift sayılar olur. Ayrıca, her $i \in \{0, 1, \ldots, j-1\}$ için, a_i çift ise $\bar{\alpha}_i^t = \alpha_i^t$, a_i nin tek olduğu durumda da α_1^t'yi $\{\bar{\alpha}_i^t, \alpha_1^t\} = \{0, 1\}$ olacak şekilde seçmek suretiyle, birinci oyuncu $\bar{a}_{j-1}, \ldots, \bar{a}_1, \bar{a}_0$ toplamlarının da çift sayılar haline gelmesini sağlayabilir. Sonuçta $\bar{a}_0 = \bar{a}_1 = \cdots = \bar{a}_l = 0$ haline gelmiş olursa, birinci oyuncu bu hamlede son kibrit öbeğini ortadan kaldırmış olacağı için oyunu kazanır. Aksi halde, ikinci oyuncu $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_l$ toplamlarının çift sayılar olduğu bir dağılımla karşı karşıya kalır. Bu durumda ikinci oyuncu, öbeklerin hangisinden ve pozitif olmak üzere hangi sayıda kibrit uzaklaştırırsa uzaklaştırsın, yeni dağılımın yol açtığı toplamlardan en az biri mutlaka tek sayı haline gelecektir. Dolayısıyla, son kibrit öbeği ortadan kaldırılmamış olacağı gibi, birinci oyuncu başlangıçtaki gibi bir yol izleyerek, bu toplamların hepsini yine çift sayı haline getirebilir. Sonuçta kibritlerin hepsi tükeneceği için, a_i toplamlarının hepsinin sıfıra eşit olduğu, yani kibrit dağılımının $(0, 0, \ldots, 0)$ haline geldiği bir duruma ulaşılacaktır. Ancak 0 çift sayı olduğundan, bu dağılıma ulaşıldığında sıra ikinci oyuncuya gelmiş, yani son kibrit grubunu birinci oyuncu çıkarmış olacaktır. Dolayısıyla oyunu birinci oyuncu kazanacaktır.

Şimdi de başlangıçtaki $(n_1, n_2, \ldots, n_p)$ dağılımının N_1 kümesine ait olmadığı duruma bakalım. Bu durumda $a_0, a_1, \ldots, a_p$ toplamlarının hepsi çift olur. Birinci oyuncu hangi hamleyi yaparsa yapsın, ikinci oyuncuyu bu toplamlardan en az birisinin tek olduğu bir dağılımla karşı karşıya bırakır. Dolayısıyla, ikinci oyuncu kendisini N_1 kümesine ait bir dağılımla oyuna başlayan "birinci oyuncu" konumunda bulur ve yukarıdaki birinci oyuncu gibi davranarak oyunu kazanır.

4. Oyunun herhangi bir anındaki durum, x birinci, y ise ikinci öbekte kalan kibrit sayısını göstermek üzere (x, y) sıralı ikilisiyle gösterilebilir. Dolayısıyla, düzlemde koordinatları negatif olmayan tamsayılar olan noktaların kümesini $\mathbb{Z}_+^2$ ile gösterirsek, oyuncuların oyun sırasında karşılaşabilecekleri tüm durumlar, $\mathbb{Z}_+^2$'ya ait noktalarla temsil edilebilir. (x, y) durumuyla karşılaşan bir oyuncu, karşı taraf ne yaparsa yapsın oyunu mutlaka kazanmasını sağlayacak bir yol izleyebiliyorsa, (x, y)'ye *kazanan bir durum* diyeceğiz. Bir oyuncu (x, y) durumundan hareketle ne yaparsa yapsın, hasmı oyunu mutlaka kendisine kazandıracak bir yol izleyebiliyorsa, o zaman da (x, y)'ye ***kaybeden bir durum*** diyeceğiz. Buna göre $(0, 0)$ kaybeden bir durumdur, çünkü bir oyuncunun $(0, 0)$ durumuyla karşılaşması, karşı tarafın son kibriti oyundan çıkartarak oyunu kazanmış olması demektir. $(0, 0)$'ın kaybeden bir durum olması ise, kendilerinden hareketle tek hamlede $(0, 0)$'a ulaşmanın mümkün olduğu tüm durumların kazanan durum olmasını gerektirir. Yani $x = 0$, $y = 0$ ve $x = y$ doğruları üstündeki $(0, 0)$ dışında $\mathbb{Z}_+^2$'ya ait bütün noktalar kazanan durumları temsil eder.

Şimdi (a, b) herhangi bir kaybeden durum olsun. O zaman $\{(a, y) : y > b\} \cup \{(x, b) : x > a\} \cup \{(x, y) : y = x + (b - a),\ x > a\}$ kümesindeki $\mathbb{Z}_+^2$'ya ait her noktadan (a, b)'ye tek hamlede ulaşılabileceği için bu noktaların tümü kazanan durumları temsil eder. Diğer taraftan, $\{(a, y) : y < b\} \cup \{(x, b) : x < a\} \cup \{x, y) : y = x + (b - a),\ x < a\}$ kümesindeki $\mathbb{Z}_+^2$'ya ait her noktaya (a, b)'den tek hamlede ulaşılabileceği için, bu noktaların da tümü kazanan durumları temsil eder. Başka bir deyişle, (a, y) kaybeden bir durumsa, $x = a$, $y = b$ ve $y = x + (b - a)$ doğruları üstündeki $\mathbb{Z}_+^2$'ya ait ve (a, b)'den farklı tüm noktalar kazanan durumları temsil eder. Öte yandan simetri nedeniyle, (a, b)'nin kaybeden bir durum olması, (b, a)'nın da kaybeden bir durum olmasını ve dolayısıyla $x = b$, $y = a$ ve $y = x + (a - b)$ doğruları üstündeki $\mathbb{Z}_+^2$'ya ait (b, a) dışındaki bütün noktaların da kazanan durumları temsil ediyor olmasını gerektirir. Şimdi tümevarımla kaybeden durumların kümesini karakterize edeceğiz. $a_0 = b_0 = 0$ diyelim. (a_0, b_0) kaybeden bir durum olduğu gibi, $b_0 = a_0 + 0$'dır ve x koordinatı sıfırdan küçük ya da eşit olan bütün kaybeden durumlar $\{(a_0,b_0)\}$ kümesine aittir. Şimdi pozitif bir n tamsayısı için, kaybeden durumlardan oluşan

$$\{(a_0b_0),(a_1,b_1),(b_1,a_1),\ldots,(a_{n-1},b_{n-1}),(b_{n-1},a_{n-1})\}$$

kümesinin x koordinatı a_{n-1}'den küçük ya da eşit olan bütün kaybeden durumları içerdiğini ve her $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ için $b_k = a_k + k$ olduğunu kabul edelim. a_n sayısı, $\{a_0,a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots,a_{n-1},b_{n-1}\}$ kümesine ait olmayan en küçük pozitif tamsayı ve $b_n = a_n + n$ olsun. Şimdi (a_n,b_n)'nin kaybeden bir durum olduğunu göstereceğiz. Bunu yaparsak, x koordinatı a_n olan başka kaybeden durum olmaması ve tümevarım varsayımı nedeniyle,

$$\{(a_0,b_0),(a_1,b_1),(b_1,a_1),\ldots,(a_{n-1},b_{n-1}),(b_{n-1},a_{n-1}),(a_n,b_n),(b_n,a_n)\}$$

kümesi, x koordinatı a_n'den küçük ya da eşit olan tüm kaybeden durumları içerecek ve dolayısıyla kaybeden durumlar kümesi karakterize edilmiş olacaktır.

Önce bir $0 \le x < a_n$ tamsayısı için (x,b_n) noktasının kazanan bir durumu temsil etmediğini farzedelim. O zaman $x = a_k$ ya da $x = b_k$ olacak şekilde bir $k \in \{0,1,\ldots,n_1\}$ bulunur. Hem (a_k,b_k) hem de (b_k,a_k) kaybeden durumlar olduğundan, $\{(a_y,y) \in \mathbb{Z}_+^2 : y \neq b_1\} \cup \{(b_k,y)\in\mathbb{Z}_+^2 : y \neq a_k\}$ kümesindeki bütün noktalar kazanan durumları temsil eder. Dolayısıyla, ya (a_k,b_n) kaybeden bir durum ve $b_n = b_k$, ya da (b_k,b_n) kaybeden bir durum ve $b_n = a_k$ olur. $a_k < a_n$ ve $k<n$ olduğu için, birinci durumda $b_n = b_k = a_k + k < a_n + n = b_n$ çelişmesi, ikinci durumda ise $b_n = a_k < a_n < b_n$ çelişmesi elde edilir. Dolayısıyla $\{(x,b_n)\in\mathbb{Z}_+^2 : x < a_n\}$ kümesindeki bütün noktalar kazanan durumları temsil eder.

Şimdi de (a_n,y) kazanan bir durum olmayacak şekilde bir $0 \le b_n$ tamsayısının bulunduğunu farzedelim. $y < a_n$ ise, $y = a_k$ ya da $y = b_k$ olacak şekilde bir $k \in \{0,1,\cdots,n-1\}$ bulunur. (a_k,b_k) ve (b_k,a_k) kaybeden durumlar olduğundan, ya $(a_n,a_k) = (b_k,a_k)$ ya da $(a_n,b_k) = (a_k,b_k)$ olur. Oysa $a_n \neq b_k$ ve $a_n \neq a_k$ olduğu için, bu durumda istenen çelişme elde edilir. Şimdi de $y \ge a_n$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $b_n = a_n + n$ ve dolayısıyla $l = y - a_n < n$ olur. Ancak (a_l,b_l) kaybeden bir durumdur ve $y = x + l$ doğrusu üstünde $\mathbb{Z}_+^2$'ya ait (a_l,b_l) dışındaki bütün noktalar kazanan durumları temsil eder. Bu yüzden $(a_n,y) = (a_l,b_l)$ olur ki, bu da $a_n \neq a_l$ ile çelişir. Dolayısıyla $\{(a_n,y)\in\mathbb{Z}_+^2 : y < b_n\}$ kümesindeki bütün noktalar da kazanan durumları temsil eder. Benzer biçimde, $\{(x,y)\in\mathbb{Z}_+^2 : y = x = n, x < a_n\}$ kümesinin de bütünüyle kazanan durumlardan oluştuğu görülür. Sonuç olarak, (a_n,b_n)'den hareketle tek hamlede ulaşılabilecek tüm durumlar kazanan durumlar olduğu için, (a_n,b_n) kaybeden bir durumdur. Çözümü tamamlamak için önce aşağıdaki teoremi kanıtlayacağız: α ve β, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} = 1$ *koşulunu sağlayan pozitif irrasyonel sayılar olsun. O zaman her pozitif tamsayı,* $[\![n\alpha]\!]$ *ve* $[\![n\beta]\!]$ $(n\in\mathbb{Z}^+)$ *sayılarından tam olarak birine eşittir.* $S = \{n\alpha : n\in\mathbb{Z}^+\}\cup\{n\beta : n\in\mathbb{Z}^+\}$ diyelim. S'ye ait tüm sayılar birden büyük irrasyonel sayılardır. N herhangi bir pozitif tamsayı olsun. S'ye ait N'den küçük elemanlar, $\alpha, 2\alpha,\ldots,[\![\frac{N}{\alpha}]\!]\alpha, \beta,2\beta,\ldots,[\![\frac{N}{\alpha}]\!]\beta$'dır. Bunların sayısı ise, $[\![\frac{N}{\alpha}]\!] + [\![\frac{N}{\beta}]\!]$'dır. α ve β irrasyonel oldukları için $\frac{N}{\alpha} - 1 < [\![\frac{N}{\alpha}]\!] < \frac{N}{\alpha}$ ve $\frac{N}{\beta} - 1 < [\![\frac{N}{\beta}]\!] < \frac{N}{\beta}$ olur. Buradan da $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} = 1$ olduğu için, $N-2 < [\![\frac{N}{\alpha}]\!]+[\![\frac{N}{\beta}]\!] < N$ elde edilir. Dolayısıyla $[\![\frac{N}{\alpha}]\!]+[\![\frac{N}{\beta}]\!] = N-1$'dir. Her N pozitif tamsayısı için S'ye ait N'den küçük eleman sayısının $N-1$ olması, her k pozitif tamsayısı için $(k,k+1)$ aralığında S'ye ait tam olarak bir elemanın bulunduğu anlamına gelir. Bu da, kanıtlamaya çalıştığımız önermeye eşdeğerdir.

Şimdi $t = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ olmak üzere, $\alpha = t$ ve $\beta = t^2$ alalım. O zaman α ve β irrasyonel sayılar olur. Ayrıca $t^2 = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5}) = t+1$ ve dolayısıyla $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} = \frac{1}{t^2} + \frac{t+1}{t^2} = 1$'dir. Yukarıdaki teoreme göre her pozitif tamsayı, $[\![nt]\!]$ ve $[\![nt^2]\!]$ $(n\in\mathbb{Z}^+)$ sayılarından tam olarak birine eşittir. Dolayısıyla her n pozitif tamsayısı için, $\{0,[\![t]\!],[\![t^2]\!],\ldots,[\![(n-1)t^2]\!]\}$ kümesine ait olmayan en küçük pozitif tamsayı $[\![nt]\!]$'dir. Ayrıca $[\![nt^2]\!] = [\![n(t+1)]\!] = [\![nt]\!] + n$'dir. Bu iki özellik ise (a_n,b_n) dizisini tanımlayan özellikler olduğundan, her $n\in\mathbb{Z}^+$ için, $a_n = [\![nt]\!]$ ve $b_n = [\![nt^2]\!]$ olur. $\mathbb{Z}_+^2$'ya ait her noktanın ya kaybeden ya da kazanan bir durumu temsil ettiği kolaylıkla görülür. Başlangıçtaki kibrit dağılımı kazanan bir durumu temsil ediyorsa birinci, kaybeden bir durumu temsil ediyorsa, yani $([\![nt]\!],[\![nt^2]\!])$ ya da $([\![nt^2]\!],[\![nt]\!])$ biçimindeyse, ikinci oyuncu oyunu kazanır.