TRİGONOMETRİK DENKLEMLERİN ÇÖZÜLMESİ

C. Alparslan Ertuğ *

1. Giriş

Bilinmeyen bir açının trigonometrik fonksiyonlarını içeren denklemlere *trigonometrik denklemler* denir. Trigonometrik denklemi sağlayan açı değerleri denklemin kökleridirler ve periyodik olmak gibi önemli bir özellikleri vardır. 0 ile 2π arasında bulunan köklere denklemin özel çözümleri denir.

Trigonometrik denklemlerin çözüm yöntemlerini açıklamaya başlamadan önce, trigonometrik oranları eşit olan açılar arasındaki bağıntıları özetlemekte yarar vardır:

$$
\begin{aligned}
\sin x = \sin\alpha \text{ ise,} \quad x &= 2k\pi + \alpha \\
\text{ve} \quad x &= (2k\pi + 1)\pi - \alpha; \\
\cos x = \cos\alpha \text{ ise,} \quad x &= 2k\pi \pm \alpha; \\
\tan x = \tan\alpha \text{ ise,} \quad x &= k\pi + \alpha
\end{aligned}
$$

bağıntıları geçerli olmaktadır. Yukarıdaki formüllerde $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ olarak alınacaktır.

2. Trigonometrik Denklem Tipleri

Çözüm yöntemlerinin açıklanmasını kolaylaştırmak açısından, trigonometrik denklemleri aşağıdaki biçimde sınıflayacağız:

- Basit Denklemler
- Cebirsel Biçime Dönüşebilen Denklemler
- Homojen Denklemler
- Simetrik Denklemler
- Klasik Denklemler
- Genel Denklemler
- Yukarıdaki Tiplerden Birine Dönüşebilen Denklemler

Şimdi sırasıyla bu denklem tiplerini ve çözüm yöntemlerini ele alalım.

* Gemi inşaatı mühendisi

2.1. Basit Denklemler

Aynı açının, aynı ya da farklı iki trigonometrik oranının birbirine eşit olması veya sözkonusu açının bir trigonometrik oranın bir sayıya eşit olması biçiminde verilirler.

Örnek 1. $\sin x = \frac{1}{2}$ *denkleminin çözüm kümesini bulunuz.*

Çözüm. Sinüsü $\frac{1}{2}$ olan en küçük açının $\frac{\pi}{6}$ olduğunu biliyoruz. O halde verilen denklemi şöyle yazabiliriz: $\sin x = \sin\frac{\pi}{6}$. Sinüsleri eşit olan açıların özelliklerinden yararlanarak

$$
\begin{aligned}
x &= 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{ve} \\
x &= (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}
\end{aligned}
$$

çözümlerini elde ederiz.

Örnek 2. $\sin x = \cos x$ *denkleminin çözüm kümesini bulunuz.*

Çözüm. $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ özelliğini kullanırsak denklem şöyle olur: $\sin x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$. Buradan da

$$
\begin{aligned}
x &= 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \\
x &= k\pi + \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

bulunur.

Örnek 3. $\tan x = -1$ *denkleminin çözüm kümesini bulunuz.*

Çözüm. $\tan\frac{3\pi}{4} = -1$ olduğundan, denklemi $\tan 3x = \tan\frac{3\pi}{4}$ biçiminde yazabiliriz. Sonra da tanjantları eşit olan açıların özelliklerini kullanarak çözüm kümesini elde ederiz:

$$3x = k\pi + \frac{3\pi}{4}, \qquad x = \frac{k}{3}\pi + \frac{\pi}{4}.$$

2.2. Cebirsel Biçime Dönüştürülebilen Denklemler

Aynı açının aynı trigonometrik oranlarının çeşitli kuvvetlerini içeren denklemlerdir. Farklı trigonometrik oranları içeren bazı denklemler de uygun dönüşümler yapılarak bu biçime dönüştürülebilirler.

Örnek 4. $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ *denklemini çözünüz.*

Çözüm. $\sin x = t$ dönüşümünü yaparsak denklem, cebirsel biçime döner:

$$2t^2 + t - 1 = (2t-1)(t+1) = 0.$$

Bu denklem çözülürse, $t_1 = \frac{1}{2}$ ve $t_2 = -1$ kökleri elde edilir. Bulduğumuz bu t değerlerini kullanarak x değerlerini elde ederiz:

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \\ x_1 &= 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x_2 &= (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \sin x &= -1 = \sin\frac{3\pi}{2} \\ x_3 &= 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \\ x_4 &= (2k+1)\pi - \frac{3\pi}{2} = 2k\pi - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Örnek 5. $2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0$ *denkleminin çözüm kümesini bulunuz.*

Çözüm. $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ değerini denklemde yerine koyalım:

$$\begin{aligned} 2(1-\cos^2 x) + 3\cos x - 3 &= 0 \\ 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

$\cos x = t$ $(-1 \le t \le 1)$ dönüşümünü yapalım:

$$2t^2 - 3t + 1 = (2t-1)(t-1) = 0$$

$t_1 = \frac{1}{2}$ ve $t_2 = 1$ kökleri elde edilir. Bunlar kullanılarak denklemin çözüm kümesi bulunur:

$$\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3},$$

$$x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad \text{ve} \quad x_2 = 2k\pi - \frac{\pi}{3};$$

$$\cos x = 1 = \cos 0, \qquad x_3 = 2k\pi.$$

2.3. Klasik Denklemler

$a\sin x + b\cos x = c$ biçimindeki denklemlere *klasik denklem*ler denir. Klasik tipte bir denklemi çözerken, denklemin iki tarafını kosinüslü terimin katsayısına bölerek

$$\frac{a}{b}\sin x + \cos x = \frac{c}{b}$$

eşitsizliği elde edilir; $\tan\varphi = \frac{a}{b}$ dönüşümünü yaparak da

$$\begin{aligned} \tan\varphi\sin x + \cos x &= \frac{c}{b} \\ \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\sin x + \cos x &= \frac{c}{b} \\ \sin\varphi\sin x + \cos\varphi\cos x &= \frac{c}{b}\cos\varphi \\ \cos(x-\varphi) &= \frac{c}{b}\cos\varphi \end{aligned}$$

denklemini elde ederiz. $|\frac{c}{b}\cos\varphi| \le 1$ koşulu sağlanıyorsa, bu denklemin çözümü vardır ve çözüm, kosinüsleri eşit açıları içeren basit bir denklemin çözülmesinden ibaret olacaktır.

Örnek 6. $2\sin x + 3\cos x = 3$ *denkleminin çözüm kümesini bulunuz.*

Çözüm. $\cos x$'in katsayısı ile denklemin iki tarafını bölelim: $\frac{2}{3}\sin x + \cos x = 1$. $\tan\varphi = \frac{2}{3}$ olacak biçimde bir φ açısı tanımlayalım:

$$\begin{aligned} \tan\varphi\sin x + \cos x &= 1 \\ \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\sin x + \cos x &= 1 \\ \sin\varphi\sin x + \cos\varphi\cos x &= \cos\varphi \\ \cos(x-\varphi) &= \cos\varphi \end{aligned}$$

$$x_1 - \varphi = 2k\pi - \varphi, \qquad x_1 = 2k\pi;$$

$$x_2 - \varphi = 2k\pi + \varphi, \qquad x_2 = 2k\pi + 2\varphi.$$

Örnek 7. $\cos 3x + \sin 3x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *denklemini çözünüz.*

Çzüm. $\tan\varphi = 1$ diyelim. $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ve $\cos\frac{\sqrt{\pi}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ olacaktır. Buradan

$$\begin{aligned} \cos 3x + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\sin 3x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos 3x\cos\varphi + \sin\varphi\sin 3x &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi \\ \cos(3x-\varphi) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ değerini yerine koyarsak, $\cos(3x-\varphi) = \frac{\pi}{3}$ denklemi elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned} 3x_1 - \frac{\pi}{4} &= 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x_1 &= \frac{2}{3}k\pi + \frac{7\pi}{36} \\ 3x_2 - \frac{\pi}{4} &= 2k\pi - \frac{\pi}{3} \\ x_2 &= \frac{2}{3}k\pi - \frac{\pi}{36} \end{aligned}$$

kökleri bulunur.

2.4. Homojen Denklemler

$f(\sin x, \cos x) = 0$ biçiminde verilmiş bir denklemde, $\sin x$ ve $\cos x$'in dereceleri birbirine eşitse, bir *homojen denklem* sözkonusudur. $a\sin x + b\cos x = 0$ birinci dereceden, $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$ ise ikinci dereceden homojen denklemlerdir. Bu tip denklemler uygun dönüşümler yapılarak cebirsel hale dönüştürülebilirler.

Örnek 8. $5\sin^2 x - 2\cos^2 x - 3\sin x\cos x = 0$ *denkleminin çözüm kümesini bulunuz.*

Çözüm. Denklemin iki tarafını $\cos^2 x$ ile bölelim: $5\tan^2 x - 3\tan x - 2 = 0$. $\tan x = t$ dönüşümünü yapalım:

$$5t^2 - 3t - 2 = (5t+2)(t-1) = 0$$

Denklemi cebirsel hale dönüştürmüş olduk. Şimdi de bunu çözelim: $t_1 = -\frac{2}{5}$ ve $t_2 = 1$. $\tan\varphi = -\frac{2}{5}$ olacak biçimde bir φ açısı tanımlarsak,

$$\tan x = \tan\varphi, \qquad x_1 = k\pi + \varphi;$$

$$\tan x = 1 = \tan\frac{\pi}{4}, \qquad x_2 = k\pi + \frac{\pi}{4}.$$

kökleri elde edilir.

Zaman zaman verilen denklemi homojen hale getirmek için, bazı terimleri $\sin^2 x + \cos^2 x$ ile çarpmak gerekir:

Örnek 9. $2\sin 3x = 3\cos x + \cos 3x$ *denklemini çözünüz.*

Çözüm. $\sin 3x = 3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x$ ve $\cos 3x = \cos^3 x - 3\sin^2 x\cos x$ değerlerini yerlerine koyalım. Ara işlemler yapıldıktan sonra düzenlenerek şu denklem elde edilir:

$$-2\sin^3 x + b\sin x\cos^2 x \\ - 3\cos x - \cos^3 x + 3\sin^2 x\cos x = 0.$$

Burada $-3\cos x$ terimini $\sin^2 x + \cos^2 x$ ile çarpalım. Ara işlemleri yapıp düzenlersek,

$$\sin^3 x - 3\sin x\cos^2 x + 2\cos^3 x = 0;$$

$cos^3 x$ ile bölersek,

$$\tan^3 x - 3\tan x + 2 = 0$$

elde ederiz. $\tan x = t$ dönüşümünü yaparak denklemi cebirsel hale dönüştürelim:

$$t^2 - 3t + 2 = (t-1)^2(t+2) = 0.$$

$t_1 = 1$ ve $t_2 = -2$ kökleri bulunur. Buradan da;

$$\tan x = 1 = \tan\frac{\pi}{4}, \qquad x_1 = k\pi + \frac{\pi}{4};$$

$\tan\varphi = -2$ dersek,

$$\tan x = \tan\varphi, \qquad x_2 = k\pi + \varphi$$

çözümlerini elde ederiz.

2.5. Simetrik Denklemler

Verilen denklemde, x yerine $\frac{\pi}{2} - x$ konulduğunda, bir başka deyişle, sinüs yerine kosinüs, kosinüs yerine sinüs yazıldığında denklem değişmiyorsa, bu tip denklemlere *simetrik denklem* denir. Simetrik denklemler genellikle

$$a(\sin x + \cos x) + b\sin x\cos x = c$$

biçiminde verilirler. Burada $b = 0$ olması halinde, yukarıda anlattığımız klasik denklemlerin bir özel hali elde edilir. Simetrik denklemleri çözerken, $x = \frac{\pi}{4} + \varphi$ dönüşümü yapılarak denklem cebirsel hale getirilir.

Örnek 10. $2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = 3 + 4\sin x\cos x$ *denklemini çözünüz.*

Çözüm. $x = \frac{\pi}{4} + \varphi$ dönüşümünü yaparsak,

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\varphi - \sin\varphi) \\ \sin x &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\varphi + \sin\varphi) \end{aligned}$$

değerlerini elde ederiz. Dolayısıyla da

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x &= \sqrt{2}\cos\varphi \\ \sin x\cos x &= \frac{1}{2}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \end{aligned}$$

bulunur. Bunları denklemde kullanırsak,

$$4\cos\varphi = 3 + 2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

elde edilir. $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$ değerini kullanıp denklemi düzenleyecek olursak,

$$4\cos^2\varphi - 4\cos\varphi + 1 = 0$$

elde ederiz. $\cos\varphi = t$ $(-1 \le t \le 1)$ dönüşümünü yaparak cebirsel biçimde bir denklem elde ederiz: $4t^2 - 4t + 1 = 0$. $\Delta = 0$ olduğundan tek kök vardır: $t = \frac{1}{2}$. Bu kök değerini kullanarak

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}, \qquad \varphi_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{3};$$

$$\cos\varphi = \cos\frac{\pi}{3}, \qquad \varphi_2 = 2k\pi - \frac{\pi}{3};$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + \varphi_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{7\pi}{12},$$

$$x_2 = \frac{\pi}{4} + \varphi_2 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi - \frac{\pi}{3} = 2k\pi - \frac{\pi}{12}$$

çözüm kümesi elde edilir.

Örnek 11. $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1$ *denkleminin çözüm kümesini bulunuz.*

Çözüm. $x = \varphi + \frac{\pi}{4}$ dönüşümünü yaptığımızda

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x &= \sqrt{2}\cos\varphi \\ \sin x \cos x &= \cos^2\varphi - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

olacaktır. Bu değerler denklemde kullanılırsa

$$2\cos^2\varphi + 2\sqrt{2}\cos\varphi - 3 = 0$$

bulunur. $\cos\varphi = t$ $(-1 \le t \le 1)$ dönüşümü yapılırsa denklem cebirsel hale gelir: $2t^2 + 2\sqrt{2}t - 3 = (\sqrt{2}t + 3)(\sqrt{2}t - 1) = 0$. Her çarpanı ayrı ayrı sıfıra eşitlersek $t_1 = -\frac{3}{\sqrt{2}}$ ve $t_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ kök değerleri bulunur. $t_1 < -1$ olduğundan kök değildir. Dolayısıyla $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ve $\cos\varphi = \cos\frac{\pi}{4}$ olur. Buradan da $\varphi = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ değeri bulunur. O halde kökler şöyle olacaktır:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2k\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x_2 &= 2k\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 2k\pi \end{aligned}$$

2.6. Genel Denklemler

Bilindiği gibi

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} \quad \text{ve} \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}$$

biçiminde yazılabilir. $\tan\frac{x}{2} = t$ dönüşümü yapılırsa,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{ve} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

olur. O halde daha önce açıklanan yöntemlerle çözülemeyen denklemler, bu dönüşümler uygulanarak çözülmeye çalışılmalıdır. Ancak bu dönüşümler sonucunda üçüncü ve daha yüksek dereceden cebirsel denklemler elde edilebileceği ve bu denklemlerin çözümünde güçlükle karşılaşabileceği gözden uzak tutulmamalıdır.

Örnek 12. $\sin x + \cos x = 1$ *denkleminin çözüm kümesini bulunuz.*

Çözüm. Yukarıdaki dönüşüm uygulanırsa,

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1$$

cebirsel denklemi elde edilir. Düzenlenirse $t^2 - t = 0$ olur ve buradan $t_1 = 0$ ve $t_2 = 1$ kökleri elde edilir. Bu değerleri kullanılarak da ilk denklemin çözüm kümesi bulunur:

$$\tan\frac{x}{2} = 0 = \tan 0, \quad \frac{x_1}{2} = k\pi, \quad x_1 = 2k\pi;$$

$$\tan\frac{x}{2} = 1 = \tan\frac{\pi}{4}, \quad \frac{x_2}{2} = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Örnek 13. $3\sin x + \cos x - 4\cot\frac{x}{2} + 1 = 0$ *denkleminin çözüm kümesini bulunuz.*

Çözüm. Aynı yöntemle

$$3\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{4}{t} + 1 = 0$$

cebirsel denklemi elde edilir. Paydalar eşitlenir ve gerekli ara işlemler yapılırsa, $t^2 + t - 2 = 0$ bulunur. Bu denklemin kökleri $t_1 = -2$ ve $t_2 = 1$'dir. Bunlar kullanılarak denklemin çözüm kümesi elde edilir ($\alpha = \arctan(-2)$):

$$\tan\frac{x}{2} = -2 = \tan\alpha, \quad \frac{x_1}{2} = k\pi + \alpha, \quad x_1 = 2k\pi + 2\alpha;$$

$$\tan\frac{x}{2} = 1 = \tan\frac{\pi}{4}, \quad \frac{x_2}{2} = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

2.7. Yukarıdaki Tiplerden Birine Dönüştürülebilen Denklemler

Bir çok durumda karşılaşılaşılan denklemler, çarpanlara ayrılarak veya uygun trigonometrik dönüşümler yapılarak daha önce anlatılmış olan tiplerden birine dönüştürülebilir. Ayrıca $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ özelliğini kullanarak, denklemin bir tarafını veya terimlerden birini $\sin^2 x + \cos^2 x$ ile çarpmak da sık başvurulan bir yöntemdir. Şimdi tipik bazı örnekler üzerinde bu yöntemleri görelim.

Örnek 14. $\sin x \cos 2x = \cos x - \sin x$ *denkleminin çözüm kümesini bulunuz.*

Çözüm. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ değerini denklemde yerine koyalım ve denklemin sağ tarafını $\sin^2 x + \cos^2 x$ ile çarpalım; gerekli düzenlemelerden sonra denklem

$$\sin^2 x \cos x - 2\sin x \cos^2 x + \cos^3 x = 0$$

biçimini alır. Çarpanlara ayrılıp her çarpan ayrı ayrı sıfıra eşitlenirse, iki basit denklem elde edilir ve bunların çözülmesiyle de ilk denklemin çözüm kümesi bulunur:

$$\begin{aligned} \cos x(\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x) &= 0, \\ \cos x(1 - \sin 2x) &= 0; \end{aligned}$$

$$\cos x = 0 = \cos \frac{\pi}{2}, \qquad x_{1,2} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2};$$

$$1 - \sin 2x = 0, \qquad \sin 2x = 1 = \sin \frac{\pi}{2};$$

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \qquad x_3 = k\pi + \frac{\pi}{4};$$

$$2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}, \qquad x_4 = k\pi + \frac{\pi}{4}.$$

x_4 ile gösterilen kökler, x_3 ile aynı olduklarından atılmalıdırlar.

$$a\sin^2 x + b\sin x \cos x + c\cos^2 x = d$$

biçiminde verilen denklemler,

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\text{ve} \qquad \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

dönüşümleri ile klasik tipte bir denklem haline gelirler.

Örnek 15. $2\sin^2 x + \sin x \cos x + 3\cos^2 x = 3$ *denkleminin çözüm kümesini bulunuz.*

Çözüm. Yukarıda sözü edilen dönüşümler yapılır ve ara işlemler tamamlanırsa, denklem $\sin 2x + \cos 2x = 1$ biçimine gelir. Bu ise yukarıda açıkladığımız klasik tipte bir denklemdir ve benzer tarzda çözülebilir. Kosinüslü terimin katsayısı, bir φ yardımcı açısının tanjantı olarak alınırsa, $\tan\varphi = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ olur. Bu değerler kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \sin 2x + \tan\varphi \cos 2x &= 1 \\ \sin 2x \cos\varphi + \sin\varphi \cos 2x &= \cos\varphi \\ \sin(2x + \varphi) &= \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

olur ve

$$2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, \qquad x_1 = k\pi;$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4}, \qquad x_2 = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

kökleri bulunur.

Aynı açının katlarının trigonometrik fonksiyonlarını içeren denklemler, çarpımların toplam veya toplamların çarpım olarak ifade edilmesine olanak veren formüllerin kullanılması ve bazı çarpanlara ayırma yöntemlerinin uygulanmasıyla, yukarıda açıkladığımız tiplerden birine dönüştürülebilirler. Şimdi de bunlarla ilgili bir kaç örnek görelim:

Örnek 16. $2\sin x \sin 3x = 1$ *denklemini çözünüz.*

Çözüm. $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ formülünü uygularsak,

$$\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)$$

olacak ve denklem $\cos 2x - \cos 4x = 1$ haline gelecektir. $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$ değerini yerine koyarsak,

$$\cos 2x - 2\cos^2 2x = \cos 2x(1 - 2\cos 2x) = 0$$

olur. Her çarpanı ayrı ayrı sıfıra eşitlersek, iki basit denklem elde ederiz. Bunların çözümüyle de çözüm kümesi elde edilir:

$$\cos 2x = 0 = \cos \frac{\pi}{2}, \qquad 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2},$$

$$x_1 = k\pi + \frac{\pi}{4}, \qquad x_2 = k\pi - \frac{\pi}{4};$$

$$1 - 2\cos 2x = 0, \qquad \cos 2x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3},$$

$$2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \qquad x_3 = k\pi + \frac{\pi}{6}, \qquad x_4 = k\pi - \frac{\pi}{6}.$$

Örnek 17. $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$ *denkleminin çözüm kümesini bulunuz.*

Çözüm. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ olduğunu biliyoruz. O halde

$$\cos 3x + \cos x = 2\cos 2x \cos x$$

olacaktır. Ayrıca $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$ değerini de gözönüne alırsak, verilen denklem

$$2\cos^2 x + 2\cos 2x \cos x = 0$$

biçimine dönüşür. Bunun da çarpanlara ayırılmasıyla

$$2\cos x(\cos x + \cos 2x) = 0$$

bulunur. Burada ise

$$\cos x + \cos 2x = 2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

değeri kullanılırsa,

$$4\cos x \cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} = 0$$

denklemi elde edilir. Her çarpanın ayrı ayrı sıfıra eşitlenmesiyle de çözüm kümesi bulunur:

$$\cos x = 0 = \cos\frac{\pi}{2}, \qquad x_{1,2} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2};$$
$$\cos\frac{x}{2} = 0 = \cos\frac{\pi}{2}, \qquad x_{3,4} = 4k\pi \pm \pi;$$
$$\cos\frac{3x}{2} = 0 = \cos\frac{\pi}{2}, \qquad x_{5,6} = \frac{4}{3}k\pi \pm \pi.$$

3. Standart Olmayan Problemler

Bu bölümde, yukarıda açıkladığımız tiplere benzemeyen ve çözümleri için özel yaklaşımlar gerektiren bazı problemleri ve çözülüş biçimlerini [3]'ten aynen aktararak okuyucularımızın dikkatine sunmak istiyoruz. [3]'in yazarlarının, görünüş ve çözülüş biçimleri alışılmışın dışında olan problemleri adlandırmak için kullandığı "Standart Olmayan Problemler" deyimini de aynen kullanmayı uygun gördük.

Örnek 18. $2\cos^2\frac{x^2+x}{6} = 2^x + 2^{-x}$ *denklemini çözünüz.*

Çözüm. Denklemin sağ ve sol tarafları için iki eşitsizlik sözkonusudur:

$$2\cos^2\frac{x^2+x}{6} \le 2 \qquad \text{ve} \qquad 2^x + 2^{-x} \ge 2.$$

O halde bu denklemin sağ ve sol tarafları, yalnızca ikisi birden 2'ye eşit oldukları zaman birbirine eşit olacaklardır. Bir başka deyişle, aşağıdaki bir bilinmeyenli denklem sisteminin sağlanması gerekir:

$$\begin{aligned} 2\cos^2\frac{x^2+x}{6} &= 2 \\ 2^x + 2^{-x} &= 2 \end{aligned}$$

İkinci denklemin tek kökü, $x = 0$ değeridir. Bu kök ilk denklemi de sağlar, yani sistemin, dolayısıyla da verilen denklemin tek çözümüdür.

Örnek 19. $\cos^7 x + \sin^4 x = 1$ *denklemini çözünüz.*

Çözüm. $\cos^7 x \le \cos^2 x$ ve $\sin^4 x \le \sin^2 x$ olduğu için, verilen denklemin sol tarafı 1'den büyük olamaz ve 1'e eşit olması, yalnızca yukardaki eşitsizliklerde eşitlik halinin her ikisinde birden gerçeklenmesi durumunda olur. Bir başka deyişle, aşağıdaki denklem sisteminin gerçeklenmesi gerekir:

$$\begin{aligned} \cos^7 x &= \cos^2 x \\ \sin^4 x &= \sin^2 x \end{aligned}$$

İlk denklem, $\cos x = 0$ ve $\cos x = 1$ için sağlanır. İkinci denklem de x'in bu değerleri için sağlanır: $\cos x = 0$ ise $\sin^2 x = 1$, $\cos x = 1$ ise $\sin x = 0$ olur. Bu nedenle bu sistemin ve dolayısıyla ilk denklemin de çözümleri, $x_1 = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ve $x_2 = 2k\pi$ değerleridir; burada k, herhangi bir tamsayıdır.

Örnek 20. $\sin^4 x - \cos^7 x = 1$ *denklemini çözünüz.*

Çözüm. Önce $x = \pi - y$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned} \sin^4(\pi - y) - \cos^7(\pi - y) &= 1 \\ \sin^4 y + \cos^7 y &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Dikkat edilirse bu, Örnek 19'da çözülen denklemin aynısıdır. O halde bu denklemin çözümleri $y_1 = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ve $y_2 = 2k\pi$ olacaktır (k bir tamsayı). $x = \pi - y$ olduğuna göre $x_1 = \frac{\pi}{2} - k\pi$ ve $x_2 = \pi - 2k\pi$ kökleri bulunur.

Örnek 21. $\sin x + 2\sin 2x = 3 + \sin 3x$ *denkleminin* $0 \le x \le \pi$ *aralığındaki köklerini bulunuz.*

Birinci Çözüm. İlk bakışta alışılmış gibi görünen bu denklemi, alışılmış yöntemlerle çözmeye çalışalım ve denklemi $\sin x$'li terimlerden oluşacak biçimde dönüştürmeye çalışalım. $\sin 2x$ ve $\sin 3x$'in $\sin x$ cinsinden değerlerini yerlerine koyarak gerekli düzenlemeleri yapalım:

$$4\sin x\cos x = 3 + 3\sin x - 4\sin^3 x - \sin x$$

Burada küçük bir tuzakla karşı karşıya bulunuyoruz: $\cos x$'i $\sin x$ cinsinden ifade ederken köklü ifadelerle karşılaşmamak için, denklemin iki tarafının karesini almamız ve dolayısıyla yalancı kök doğması tehlikesini göze almamız gerekir. Sonunda şu denklemi elde ederiz:

$$16\sin^2 x(1-\sin^2 x) = (3+2\sin x - 4\sin^3 x)^2$$

$\sin x = y$ dönüşümünü yaparak düzenlersek, denklem şu biçimi alır:

$$16y^6 - 24y^3 - 12y^2 + 12y + 9 = 0$$

Elde ettiğimiz altıncı dereceden denklem, sorunlarımızın bitmediğini gösteriyor. Şimdi de terimleri uygun bir biçimde gruplamaya çalışalım. İlk, ikinci ve son terimleri gruplayarak, denklemi aşağıdaki biçime dönüştürebiliriz:

$$(4y^3-3)^2 + 12y(1-y) = 0$$

Fakat $y = \sin x$ ve $0 \le x \le \pi$ olması istendiğinden yalnızca $0 \le y \le 1$ köklerini bulmamız gerekmektedir. Bu y değerleri için, sol tarafın ikinci terimi negatif değildir; ilk terim ise y'nin hiç bir değeri için negatif olmaz. O halde denklem yalnızca, $4y^3 - 3 = 0$ ve $12y(1-y) = 0$ koşullarını aynı anda sağlayan y değerleri için sağlanır. Böyle bir y değeri bulunmadığı için, söz konusu $0 \le y \le 1$ aralığında denklemin çözümü yoktur. Buradan da ilk denklemin $0 \le x \le \pi$ aralığında kökü olmadığı sonucuna varırız. Uygun bir gruplama yapabildiğimiz için, bu standart çözüm yoluyla sonuca ulaşabildik. Aşağıdaki diğer çözüm yollarını da inceledikten sonra, belki de en elverişsiz yaklaşım bu olduğu kanısına varacaksınız.

İkinci Çözüm. Bu çözüm de, bir kaç trigonometrik dönüşümden sonra elde edilen terimlerin uygun biçimde gruplanmasına dayanmaktadır. Önce denklemi

$$\sin 3x - \sin x - 2\sin 2x + 3 = 0$$

biçiminde yazalım ve sol tarafı dönüştürelim:

$$\begin{aligned}
2\sin x\cos 2x - 4\sin x\cos x + 3 &= 0\\
\sin x(2\cos 2x - 4\cos x) + 3 &= 0\\
\sin x(4\cos^2 x - 4\cos x - 2) + 3 &= 0\\
\sin x[(2\cos x - 1)^2 - 3] + 3 &= 0\\
\sin x(2\cos x - 1)^2 + 3(1-\sin x) &= 0
\end{aligned}$$

$0 \le x \le \pi$ aralığındaki çözümleri arıyoruz. Bu aralıkta $\sin x \ge 0$ eşitsizliği geçerlidir. O halde denklemin sol tarafındaki iki terim de negatif olamaz. Bu yüzden denklem, aşağıdaki denklem sistemine denktir:

$$\begin{aligned}
\sin x(2\cos x - 1)^2 &= 0\\
3(1-\sin x) &= 0
\end{aligned}$$

İkinci denklemden $\sin x = 1$ bulunur. Fakat bu durumda $\cos x = 0$ ve dolayısıyla da $\sin x(2\cos x - 1)^2 = 1 \ne 0$ olacaktır. O halde ikinci denklemin hiç bir çözümü birinci denklemi sağlamaz. Yani söz konusu denklemin, dolayısıyla da verilen denklemin verilen aralıkta kökleri yoktur.

Üçüncü Çözüm. Denklemi

$$\sin x - \sin 3x + 2\sin 2x = 3$$

biçiminde yeniden yazalım ve sinüslerin farkı formülünü kullanarak

$$-2\sin x\cos 2x + 2\sin 2x = 3$$

biçimine getirelim. Buna göre aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
&|-2\sin x\cos 2x + 2\sin 2x|\\
\le\ &|-2\sin x\cos 2x| + |2\sin 2x|\\
=\ &2|\sin x||\cos 2x| + 2|\sin 2x|\\
\le\ &2(|\cos 2x| + |\sin 2x|)
\end{aligned}$$

Her x değeri için, $|\cos 2x| + |\sin 2x| \le \sqrt{2}$ eşitsizliği geçerli olduğu için, son denklemin sol tarafı, mutlak değer olarak $2\sqrt{2}$'yi hiçbir zaman aşamaz ve dolayısıyla da 3'e eşit olamaz. O halde söz konusu denklemin kökü yoktur.

KAYNAKÇA

[1] Y. Aksoy, *Trigonometri*, İstanbul, 1972.

[2] T. Caronnet, *Çözümlü Trigonometri Problemleri*, İstanbul, 1969.

[3] G. Dorofeev, *Elementary Mathematics*, Mir, Moskova, 1988.

[4] B. Dündar, *Trigonometri*, Ankara, 1988.

[5] E. Ulsoy, *Düzlem ve Küresel Trigonometri*, İstanbul, 1969.