

36. ULUSLARARASI MATEMATİK OLİMPİYADI TAKIM SEÇME SINAVI

Derleyen: Ali Doğanaksoy *

3. Ulusal Matematik Olimpiyadı 1. Aşama Sınavı 29 Nisan 1995 tarihinde yapıldı. 799 lise ve ortaokul öğrencisinin katıldığı bu sınav sonunda 40 öğrenci Aralık ayında yapılacak olan 2. Aşama Sınavı'na katılmaya hak kazandı. Bunun yanı sıra, 41 öğrenci ulusal ve uluslararası matematik olimpiyatlarına hazırlama kampına katılma hakkını elde etti.

13-23 Temmuz 1995 tarihleri arasında Kanada'da yapılacak olan 36. Uluslararası Matematik Olimpiyadı'nda ülkemizi temsil edecek olan ulusal takım, 15-16 Nisan 1995 tarihlerinde yapılan sınav sonucu belirlendi. Bu olimpiyatta yarışacak takımımızı oluşturan öğrenciler Halil Bayrak, Ethem Çanakoğlu, Mehmet Ekmeççi, N. Aytekin Erdil, Caner Kazancı ve Bayram Yenikaya'dır.

Aşağıda takım seçme sınavının soruları yer almaktadır.

Birinci Gün, 15 Nisan 1995

1. $b \geq a$ olmak üzere verilen a, b gerçel sayıları için aşağıdaki sistemin tüm çözümlerini bulunuz.

$$\begin{aligned}x_1^2 + 2ax_1 + b^2 &= x_2 \\x_2^2 + 2ax_2 + b^2 &= x_3 \\&\vdots \\x_{n-1}^2 + 2ax_{n-1} + b^2 &= x_n \\x_n^2 + 2ax_n + b^2 &= x_1\end{aligned}$$

2. n pozitif bir tamsayı olmak üzere, $\sigma(j) \geq j$ koşulunu sağlayan tam olarak iki j 'nin bulunduğu $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ permütasyonlarının sayısını bulunuz.

3. Bir ABC eşkenar üçgeni veriliyor. Bu üçgenin O merkezli çevrel çemberinin \widehat{AC} (küçük) yayı üzerinde A ve C 'den farklı bir D noktası alınıyor. D 'den BC ve AC doğrularına indirilen dikmelerin ayakları sırayla E ve F olmak üzere, EF ile OD 'nin kesim noktasının geometrik yeri nedir?

İkinci Gün, 16 Nisan 1995

4. $ABCD$ dışbükey dörtgeninde $\widehat{CAB} = 40^\circ$, $\widehat{CAD} = 30^\circ$, $\widehat{DBA} = 75^\circ$ ve $\widehat{DBC} = 25^\circ$ 'dir. \widehat{BDC} 'yi bulunuz.

5. Aşağıdaki önermeyi ispatlayınız:

Her a pozitif tamsayısı için $n \mid a^n - n \iff n$ 'nin her p asal böleni için $p^2 \nmid n$ ve $p - 1 \mid n - 1$.

6. $\{x_n\}$ gerçel sayı dizisi

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = x_n + x_n^{1/3} \quad (n \geq 1)$$

biçiminde tanımlanıyor.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{an^b} = 1$$

olacak şekilde a ve b gerçel sayılarının varlığını gösteriniz.

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi