

## PROBLEM SEMİNERLERİ

Bu seminerlerle ilgili daha ayrıntılı bilgi Nisan 1995 sayımızda verilmişti. Şimdi sadece, TÜBİTAK, Bilim Adamı Yetiştirme Grubu, Atatürk Bulvarı, No: 221, Kavaklıdere, Ankara adresinde saat 15:00'te yapıldığını ve mektupla ya da telefonla (Telefon: (312) 468 53 00 / 2201) başvurulabileceğini hatırlatalım.

Seminerlere Haziran ayındaki tek seminerden sonra ara verilip Ekim ayında yeniden başlanacaktır.

### Problem Semineri 95/5, 3 Mayıs 1995

1.  $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$  fonksiyonu, şu şekilde tanımlanıyor:  $f(1) = 1$  ve

$$f(n+1) = \begin{cases} f(n) + 2, & f(f(n) - n + 1) = n \text{ ise;} \\ f(n) + 1, & \text{değilse.} \end{cases}$$

(a)  $f$  için bir açık ifade bulunuz.

(b)  $f(f(n) - n + 1) \neq n$  ise,  $f(f(n) - n + 1) = n + 1$  olduğunu gösteriniz.

2.  $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$  fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanıyor:

$$f(1) = 1, \quad f(3) = 3,$$

$$f(2n) = f(n),$$

$$f(4n + 1) = 2f(2n + 1) - f(n),$$

$$f(4n + 3) = 3f(2n + 1) - 2f(n).$$

$f(n) = n$  ve  $n \leq 1995$  koşullarını sağlayan pozitif tamsayıların sayısını bulunuz.

3. Sabit bir  $k$  pozitif tamsayısı alalım.  $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$  şu şekilde tanımlanıyor.

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n \leq k+1 \text{ ise;} \\ f(f(n-1)) + f(n-f(n-1)), & n > k+1 \text{ ise.} \end{cases}$$

$F_m$  dizisini ise şu şekilde tanımlayalım:

$$F_m = \begin{cases} 1, & \text{eğer } m \leq k \text{ ise;} \\ F_{m-1} + F_{m-k}, & \text{eğer } m > k \text{ ise.} \end{cases}$$

Bu durumda  $m \geq 1$  için  $f(F_{m+k}) = F_m$  olduğunu kanıtlayınız.

4.  $n \in \mathbb{Z}^+$  için,  $\mathbb{R}^2$ 'deki birim kareyi, herhangi bir yatay veya dikey doğru en fazla  $n$

dikdörtgenin iç bölgesiyle kesişecek şekilde parçalayabileceğimiz maksimum dikdörtgen sayısı  $f(n)$  olsun.

(a)  $3 \cdot 2^{n-1} - 2 \leq f(n) \leq 3^n - 2$  olduğunu gösteriniz.

(b)  $f(n) = 3 \cdot 2^{n-1} - 2$  olup olmadığını belirleyiniz.

### Problem Semineri 95/6, 24 Mayıs 1995

Aşağıdaki toplamları bulunuz:

1.  $r \leq n$  ve  $0 \leq p \leq 1$  için

$$\sum_{k=r}^n \left[ \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} - \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \right]$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{k}}{(k+1)4^k}$$

$$3. \sum_{r=0}^n \sum_{k=r+1}^{n+1} \binom{n}{r} \binom{n+1}{k}$$

$$4. \sum_{k=0}^m \binom{m+k}{k} 2^{-k}$$

### Problem Semineri 95/7, 7 Haziran 1995

1. Üç boyutlu uzaydaki noktaları her rengi en az bir kez kullanmak üzere beş değişik renge boyuyoruz. En az dört değişik renk içeren bir düzlemin bulunduğunu gösteriniz.

2. Düzlemdeki noktaları iki değişik renge boyuyoruz. Bütün köşeleri aynı renge boyanmış ve kenar uzunluğu ya 1 ya da  $\sqrt{3}$  olan eşkenar bir üçgenin varlığını gösteriniz.

3. Düzlemde herhangi bir nokta seçip, bu noktaya olan uzaklığı irrasyonel bir sayı olan tüm noktaları siyaha boyuyoruz. Bu yolla düzlemdeki bütün noktaları siyaha boyamak için böyle en az kaç nokta seçmek gerekir?

4. Düzlemdeki noktaları  $n$  değişik renge boyuyoruz. Bu boyama işleminin, hangi  $n$  değerleri için, aralarındaki uzaklık 1 olan aynı renge boyanmış herhangi iki nokta bulunmayacak biçimde yapılmasının mümkün olduğunu belirleyiniz.

## ÇÖZÜMLER

Bu sayımızda 95/2, 95/3 ve 95/4 seminerlerinin kısa çözümleri yer almaktadır.

### Problem Semineri 95/2

*Yönetim: Ali Doğanaksoy, Selçuk Ateşkan, Barış Fidan*

1. İlk olarak, verilen iki çemberi dik kesen çemberlerin merkezlerinin geometrik yerini bulalım. Verilen çemberler  $\mathcal{C}_1(K_1, k_1)$  ve  $\mathcal{C}_2(K_2, k_2)$  olsun.  $\mathcal{C}_1$  ve  $\mathcal{C}_2$ 'nin bu çemberleri dik kesen bir  $\mathcal{C}'$  çemberinin  $X$  merkezindeki kuvvetleri aynıdır. Bu gözleme dayanarak, önce iki çembere göre kuvvetleri eşit olan noktaların geometrik yerini bulalım. Pisagor Teoremi kullanılarak  $X$ 'ten  $K_1K_2$  doğrusuna indirilen dikmenin ayağının bu doğru üzerindeki sabit bir  $F$  noktası olduğu gösterilebilir. Buna göre söz konusu geometrik yer  $K_1K_2$ 'yi sabit  $F$  noktasında dik kesen doğru üzerindedir. Yine Pisagor Teoremi'ne göre bu doğru üzerindeki her noktanın  $\mathcal{C}_1$  ve  $\mathcal{C}_2$ 'ye göre kuvvetleri aynı olacağından, aranan geometrik yer (aynı zamanda  $\mathcal{C}_1$  ve  $\mathcal{C}_2$ 'yi dik kesen çemberlerin geometrik yeri)  $\mathcal{C}_1$  ve  $\mathcal{C}_2$ 'nin merkezlerini birleştiren doğruyu dik kesen sabit bir doğrudur. Bu doğruya  $\mathcal{C}_1$  ve  $\mathcal{C}_2$ 'nin kuvvet eksenini adı verilir.

Kuvvet eksenini, çemberler kesişiyorsa, kesişim noktalarını birleştiren doğru olarak kolayca bulunur. Çemberlerin kesişmemesi durumunda, basit bir şekilde kanıtlanabilen Monge Teoremi'ni kullanmamız gerekir.

**Monge Teoremi.** Üç çemberin üç kuvvet eksenini, bu üç çemberin kuvvet merkezi adı verilen bir noktadan geçer.

Kesişmeyen  $\mathcal{C}_1$  ve  $\mathcal{C}_2$ 'nin kuvvet eksenini bulmak için önce bu iki çemberi kesen bir  $\mathcal{C}'$  çemberi çizilir.  $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}')$  ve  $(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}')$  ikililerinin kuvvet eksenlerinin kesişim noktası kullanılarak  $\mathcal{C}_1$  ve  $\mathcal{C}_2$ 'nin kuvvet eksenini çizilir.

Bu açıklamalardan sonra, verilen üç çemberin kuvvet merkezini belirleyebiliriz. Bu merkez bütün çemberlerin dışındaysa, bu merkezi merkez kabul eden ve yarıçapı bu merkezden, çemberlerden herhangi birine çizilen teğetin uzunluğuna eşit olan çember, verilen üç çemberi de dik kesecektir. Kuvvet merkezinin çemberlerin birinin içinde kalması halinde ise problemin çözümü yoktur.

2. Problemin çözülmüş olduğunu kabul edelim. Verilen çember  $\mathcal{C}$ ; verilen noktalar  $A, B, C$ ; istenen üçgen  $XYZ$  olsun.  $XZ, ZX, XY$  doğruları sırasıyla  $A, B, C$  noktalarından geçsin. Çizim için 4 yardımcı noktadan yararlanacağız:

$N_1$ :  $AB$ 'ye paralel ve  $X$ 'ten geçen kirişin çemberi kestiği ikinci nokta;

$N_2$ :  $YN_1$  ve  $AB$  doğrularının kesiştiği nokta;

$N_3$ :  $N_2C$ 'ye paralel ve  $X$ 'den geçen kirişin çemberi kestiği ikinci nokta;

$N_4$ :  $CN_2$  ve  $N_1N_3$  doğrularının kesiştiği nokta.

(i) Çember içi açı bağıntılarını ve kirişler dörtgeninin özellikleri kullanılarak  $(AN_2)(AB)$  çarpımının  $\mathcal{C}$  çemberinin  $A$  noktasındaki kuvvetine eşit olduğu bulunur.  $A$  ve  $B$  noktalarının yeriyile çemberin  $A$  noktasındaki kuvveti bilindiğinden,  $N_2$  noktasının yeri  $AN_2 = \frac{P}{AB}$  eşitliğinden belirlenir.

(ii) Benzer şekilde  $(N_2N_4)(N_2C)$  çarpımının  $\mathcal{C}$  çemberinin  $N_2$  noktasındaki kuvvetine eşit olduğu bulunur. Buradan da  $N_4$  noktasının yeri belirlenir.

(iii) Çember içi açı bağıntılarından  $N_1\widehat{XN_3}$  açısının bilinen  $AN_2N_4 = w$  açısına eşit olduğu bulunur.

(iv)  $N_4$ 'ten geçen ve gördüğü yayın açısı  $w$  olan kirişin  $\mathcal{C}$  çemberini kestiği noktalar  $N_1$  ve  $N_3$  noktalarını verir.

(v)  $X$  noktası  $N_3$ 'ten geçen ve  $N_2N_4$ 'e paralel olan doğrunun  $\mathcal{C}$  çemberini kestiği nokta,  $Y$  noktası  $N_1N_2$  doğrusunun  $\mathcal{C}$  çemberini kestiği nokta; ve  $Z$  noktası  $AY$  doğrusunun  $\mathcal{C}$  çemberini kestiği noktadır.

3. Verilen çember  $\mathcal{C}_1$ , çemberin merkezi  $M$ , yarıçapı  $r$ , verilen iki nokta  $P_1$  ve  $P_2$  olsun.  $M$  noktasını merkez kabul eden dik koordinat sisteminde  $P_1$  ve  $P_2$ 'nin koordinatları sırasıyla  $(a_1, b_1)$  ve  $(a_2, b_2)$  olsun.  $P_1$  ve  $P_2$  noktalarından geçen  $OS_1$  ve  $OS_2$  doğruları aranan  $OS_1S_2$  ikizkenar üçgeninin kenarlarıysa, bu eşit kenarların  $OM$  doğrusuyla yaptığı  $\Phi_1$  ve  $\Phi_2$  açıları eşittir.  $O$  noktasının koordinatları  $(c, d)$  olmak üzere, bu iki açıyla ilgili trigonometrik bağıntıları kullanarak,  $A = a + a_2$ ,  $B = b_1 + b_2$ ,  $C = a_1b_2 + a_2b_1$ , ve  $D = (a_1a_2 - b_1b_2)$  olmak üzere

$$C(c^2 - d^2) - 2Dcd + (c^2 + d^2)(Ad - Bc) = 0 \quad (1)$$

eşitliği elde edilir.  $O(c, d)$  noktası çemberin

üzerinde olduğundan

$$c^2 + d^2 = r^2 \quad (2)$$

sağlanır ve

$$C(c^2 - d^2) - 2Dcd + r^2(Ad - Bc) = 0 \quad (3)$$

ölür.

$O$  noktasının yeri (2)'de denklemi verilen çemberle (3)'te denklemi verilen hiperbolün kesiştiği dört noktadan biridir.

$P_1$  ve  $P_2$  noktalarının çemberin  $M$  merkezinden  $M_1$  ve  $M_2$  uzaklıklarının eşit olduğu durumda (3) denklemi

$$2a_2r^2d - 2m_2^2cd = 0 \quad (4)$$

halini alır. Bu denklem de

$$(c, d) = (\pm r, 0) \quad \text{ve} \quad c = a_2 \frac{r^2}{m_2^2}$$

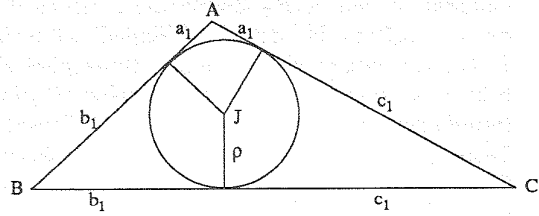
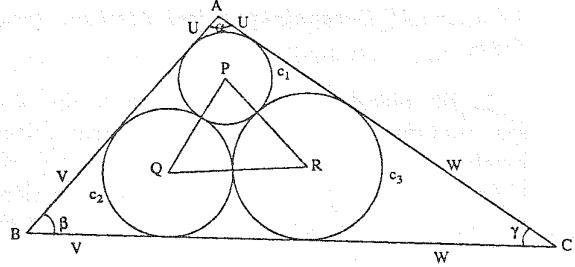
değerleri için sağlanır.

$c = a_2 \frac{r^2}{m_2^2}$  için  $O$  noktasının yerini de şöyle bulabiliriz:  $M$  noktasından geçen ve çapı  $MN = n = \frac{m_2^2}{a_2}$ ,  $x$  ekseninde yer alan  $C_2$  çemberinin  $C_1$  çemberiyle kesim noktası  $L(k, 1)$  olmak üzere  $MNL$  bir dik üçgendir ve  $ML^2 = MNk$ ,  $r^2 = kn$  olur. Buradan  $k = c$  elde edilir.  $C_1$  ve  $C_2$  noktalarının kesiştiği nokta(lar) aradığımız  $O$  noktasının yerini verir. (İki çemberin kesişmesi için  $n > r$  veya  $m_2^2 > a_2r$  koşullarının sağlandığını kabul ediyoruz). Bir çemberin içinde merkeze eş uzaklıkta iki nokta verildiğinde, çemberin üzerinde ve bu iki noktaya uzaklıkları toplamı minimum olan noktaların, verilen çember ile verilen noktalar ve verilen ilk çemberin merkezinden geçen çemberin kesiştikleri noktalar olduğu Batlamyus Teoremi'yle gösterilebilir. Böylece  $O$  noktasının yeri bulunabilir.

$OP_1$  ve  $OP_2$  doğrularının  $C_1$  çemberini kestiği ikinci noktalar istenen ikizkenar üçgenin diğer iki köşesini,  $S_1$  ve  $S_2$ 'yi verir.

4. Aranan çemberler  $C_1, C_2, C_3$  ve üçgenin kenar uzunlukları  $a, b, c$  olsun.  $C_1, C_2, C_3$  çemberlerinin merkezleri ve yarıçapları sırayla  $P, Q, R$  ve  $p, q, r$  olsun.  $ABC$  üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi de  $J$  olsun.  $u, v, w$  ile  $C_1, C_2, C_3$  çemberlerinin üçgene teğet olduğu noktaların  $A, B, C$  noktalarına olan uzaklığını;  $a_1, b_1, c_1$  ile,  $ABC$  üçgeninin içteğet çemberinin

üçgene teğet olduğu noktaların  $A, B, C$  köşelerine olan uzaklıklarını gösterelim.  $|PR| = l$ ,  $|PQ| = m$  ve  $|QR| = k$  olsun.  $s$ 'yi  $2s = a + b + c$  olacak şekilde tanımlayalım;  $s = 1$  kabul edelim.



$P, \alpha$ 'nın  $AJ$ ,  $Q, \beta$ 'nin  $BJ$ ,  $R$  de  $\gamma$ 'nin  $CJ$  açıortayı üzerinde olduğundan, üçgen benzerlikleri kullanılarak  $p = \frac{\rho a}{a_1}$ ,  $q = \frac{\rho b}{b_1}$ ,  $r = \frac{\rho c}{c_1}$  elde edilir. Pisagor Teoremi kullanılarak  $m = 2\sqrt{pq}$ ,  $l = 2\sqrt{pr}$ ,  $k = 2\sqrt{qr}$  bulunur.  $\rho^2 = \frac{a_1 b_1 c_1}{a_1 + b_1 + c_1}$  eşitliğine dayanarak  $p, q, r$ 'nin yukarıda bulduğumuz değerlerini kullanırsak üç eşitlik elde ederiz:

$$\begin{aligned} a &= v + w + 2\sqrt{a_1}\sqrt{vw} \\ b &= w + u + 2\sqrt{b_1}\sqrt{wu} \\ c &= u + v + 2\sqrt{c_1}\sqrt{uv} \end{aligned}$$

$s = 1$  olduğundan dolayı  $a, b, c, u, v, w$  uzunlukları 1'den küçüktür ve bu uzunluklar 6 dar açının sinüslerinin kareleri cinsinden yazılabilir.  $a = \sin^2 \lambda$ ,  $b = \sin^2 \mu$ ,  $c = \sin^2 \nu$ ,  $u = \sin^2 \psi$ ,  $v = \sin^2 \varphi$ ,  $w = \sin^2 \chi$  olsun.  $a_1 = \cos^2 \lambda$ ,  $b_1 = \cos^2 \mu$ ,  $c_1 = \cos^2 \nu$  olduğu kolayca görülür. Yukarıdaki üç denklemi tekrar yazalım.

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi + \sin^2 \chi + 2 \sin \varphi \sin \chi \cos \lambda &= \sin^2 \lambda \\ \sin^2 \chi + \sin^2 \psi + 2 \sin \chi \sin \psi \cos \mu &= \sin^2 \mu \\ \sin^2 \psi + \sin^2 \varphi + 2 \sin \psi \sin \varphi \cos \nu &= \sin^2 \nu \end{aligned}$$

Bu denklemlere dayanarak  $\lambda = \varphi + \chi$ ,  $\mu = \chi + \psi$ ,

$\nu = \psi + \varphi$  elde edilir.  $\sigma = \frac{\lambda + \mu + \nu}{2}$  için,  $\varphi = \sigma - \lambda$ ,  
 $\varphi = \sigma - \mu$ ,  $\chi = \sigma - \nu$  olur.

Bu bilgilerin ışığında, sinüslerinin karesi verilen üçgenin kenarlarına eşit olarak  $\lambda, \mu, \nu$  açılarını çizeriz. Bu açılarını yadınıyla  $\sigma, \varphi, \chi$  açılarını elde ederiz. Bu açılarının sinüslerinin karelerini çizerek, içteğet çemberlere çizilen teğetlerin uzunluklarını buluruz. Böylece iç teğet çemberleri çizebiliriz.

### Problem Semineri 95/3

*Yönetim: Ali Doğanaksoy, Oytun Eskiyeentürk, Özcan Öztürk*

1.  $m$  lirası olan ve  $P > \frac{1}{2}$  olasılıkla 1 lira kazanan bir adamın, tüm parasını kaybetme olasılığının  $\left(\frac{1-p}{p}\right)^m$  olduğu, indirgeme denklemleri yazılarak görülebilir. Eğer bu adam  $m+n$  liraya ulaşınca kazanırsa, kaybetme olasılığı  $Q$ ,

$$\left(\frac{q}{p}\right)^m = Q + (1-Q)\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}$$

denkleminde bulunur.  $p = \frac{18}{37}$  alırsak,  $Q$ , ikinci yöntemin vereceği kazanma olasılığı olur ve  $Q \cong 0.25$ 'tir. Ancak bu değer  $\frac{18}{37}$ 'den küçüktür. Dolayısıyla ilk yol daha iyidir.

2.  $P_{2n}$ ,  $A$ 'nın  $2n$  oyunda kazanma olasılığı olsun. O zaman,

$$P_{2n} = \sum_{x=n+1}^{2n} p^x q^{n-x}$$

olur.  $2n$  oyunun en iyi olması için,  $P_{2n-2} \leq P_{2n} \leq P_{2n+2}$  olmalıdır. Ancak  $P_{2n+2}$  ile  $P_{2n}$  arasındaki fark iki durumdan kaynaklanabilir.

(a) İlk  $2n$  oyunda,  $A$ 'nın  $n+1$  oyun kazanıp, sonraki iki oyunu kaybetmesi;

(b) İlk  $2n$  oyunda  $A$ 'nın  $n$  oyun kazanıp, son iki oyunu da kazanması.

Bu durumların olasılıklarından,

$$P_{2n+1} - P_{2n} = p^2 \binom{2n}{n} p^n q^n - q^2 \binom{2n}{n+1} p^{n+1} q^{n-1}$$

olur. Gerekli işlemleri yaparak,

$$\frac{1}{1-2p} - 1 \leq 2n \leq \frac{1}{1-2p} + 1$$

elde ederiz.

3. Her oyunda beklenen kazanç

$$\frac{2}{N+1}N - \frac{N-1}{N+1} = 1$$

liradır. Dolayısıyla, 100 oyun sonunda 200 lira kazanma şansı en fazla 0.5 olur. Her tek sıradaki oyunda 1, her  $k$ 'yinci çift oyunda  $99+k$  seçip, bir kere kazandıktan sonra hep 1 seçilirse, sonuçta ya 200 ya da 0 lira kazanılır. Demek ki bu en iyi yoldur. Ayrıca, 101, 103, 109 sayılarını sırayla 100 oyun içine,  $1 \leq k \leq 100$  için ilk  $k$  oyunda, 1'lerin sayısı en az bunların sayısı kadar olacak şekilde yerleştirirsek, yine 0.5 kazanma olasılığı elde ederiz. Bu tür yolların sayısı ise

$$\frac{1}{51} \binom{100}{50} \cong 1.58 \times 10^{27}$$

dir.

4. Önceki keselerden daha büyük bir keseye aday diyelim.  $k$ 'yinci sıradaki bir aday, ancak onu seçmekle kazanma şansımız, devam edip en iyi yolu izlediğimiz takdirde elde edeceğimiz kazanma şansından daha büyük ise seçilmelidir.  $k$ 'yinci sıradaki bir adayla kazanma şansı  $\frac{k}{100}$ 'dür.  $k$ 'den sonraki en iyi yolun şansı ise,  $k$  arttıkça azalır veya sabit kalır. Demek ki bir noktadan sonra ilk olasılık ikinciyi geçer. Bu da en iyi yöntemin,  $m$  tane keseyi pas geçip, ondan sonraki ilk adayı seçmemiz ( $m < k \leq 100$  için,  $\frac{m}{k-1}$  olasılıkla) olduğunu söyler. Bu olasılığı  $f(m)$  dersek,

$$f(m) = \frac{1}{100} \sum_{k=m+1}^{100} \frac{m}{k-1}$$

olur.  $f(m-1) \leq f(m) \leq f(m+1)$  eşitsizliği çözümlerse,  $m = 37$  elde edilir.

### Problem Semineri 95/4

*Yönetim: Semih Koray, Tolga Etgü, Çetin Ürtiş*

1. Bu şekildeki asal sayılar kümesini  $A$  ile göstereyim; yani

$$A = \{p \text{ asal} : p = x^2 + y^2, x, y \in \mathbb{Z}\}$$

$2 = 1^2 + 1^2$  şeklinde yazılabildiğinden  $2 \in A$ 'dır. Şimdi  $p > 2$  için şu teoremi kanıtlayacağız.

**Teorem.**  $p = 4n + 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$  için gerek ve yeter şart  $p = x^2 + y^2$ ,  $x, y \in \mathbb{Z}$  olmasıdır.

**Kanıt.**  $p = 4n + 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$  olduğunu kabul edelim.  $a = \left(\frac{p-1}{2}\right)!$  olsun.  $\frac{1}{2}(p-1) = 2n$  olduğu için

$$2 \cdots \frac{1}{2}(p-1) = (-1)(-2) \cdots \left(-\frac{p-1}{2}\right) \\ \equiv (p-1)(p-2) \cdots \left(\frac{p+1}{2}\right) \pmod{p}$$

denkliğini elde ederiz. Buradan

$$\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 \equiv 1 \cdot 2 \cdots \frac{p-1}{2} \frac{p+1}{2} \cdots (p-1) \\ \equiv (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

denkliğini, yani  $p \mid a^2 + 1$ 'i elde ederiz. Bu ise  $(p, a) = 1$ 'i gerektirir. Burada şu teoremi kullanacağız:

**Thue Teoremi.**  $m \in \mathbb{N}$  ve  $a \in \mathbb{Z}$  olmak üzere,  $(m, a) = 1$  ise,  $m \mid ax + y$  veya  $m \mid ax - y$  olacak şekilde  $x, y \leq \sqrt{m}$  doğal sayıları vardır.

Thue Teoremi'ni kullanırsak,  $(p, a) = 1$  olduğundan  $p \mid ax + y$  veya  $p \mid ax - y$  olacak şekilde  $x, y \leq p$  doğal sayıları vardır ve buradan  $p = x^2 + y^2$  elde edilir.

Diğer yönün kanıtı için  $p = x^2 + y^2$  olduğunu kabul edelim. Bir sayının karesi (mod 4)'te 0, 1 veya 2'ye denktir. Bundan dolayı  $x^2 + y^2$ , (mod 4)'te 0, 1 veya 2'ye denktir. Bu ise  $p > 2$  için sadece  $p = 4n + 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$  olduğu durumda mümkündür. Böylece kanıtı tamamlamış oluruz.

Sonuç olarak,

$$A = \{2\} \cup \{p > 2 \text{ asal} : p = 4n + 1, n \in \mathbb{N}\}$$

bulunur.

**2.** Birinci sorudan,  $4k+3$  şeklindeki asalların istenen şekilde yazılamayacağını biliyoruz. Şimdi ise asal çarpanlara ayırımında tek kuvvete sahip  $4k+3$  şeklindeki asalları bulunan tamsayıların bu şekilde yazılamayacağını, diğer pozitif tamsayıların ise yazılabileceğini göstereceğiz. Bunun için şu yardımcı teoremi kullanacağız:

**Yardımcı Teorem.** Eğer bir  $p$  tek asal sayısı aralarında asal iki tam sayının kareleri toplamını bölüyorsa,  $p$ ,  $4k+1$  formunda olmalıdır.

Bu yardımcı teoremi modüler aritmetik yardımı ile kanıtladıktan sonra, yine modüler aritmetik ve ortak bölenleri kullanarak şartımızın

gerekliliğini gösteririz. Daha sonra ise

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

eşitliğini, 2 ve  $4k+1$  formundaki asalların, iki tam karenin toplamı şeklinde yazılabildiğini de kullanarak şartımızın yeterliliğini de gösterir ve kanıtı bitiririz.

**3.** Sorumuzun cevabı,  $k$  ve  $l$  negatif olmayan tamsayılar olmak üzere,  $4^l(8k+7)$  şeklindeki sayıların üç tam karenin toplamı şeklinde yazılamadığı, diğer tüm pozitif tamsayıların ise yazılabildiği şeklindedir. Bu cevabın ilk kısmını (mod 4) ve (mod 8) içerisindeki işlemler ve olmayana ergi yöntemleriyle kolaylıkla kanıtlayabiliriz. Ancak diğer kısım için ilk olarak Gauss tarafından bulunan çözüm, henüz tam olarak elementer hale getirilememiş, buna karşın gerek Landau ve Dirichlet'nin, gerekse N. C. Ankeny'nin bu konuda birtakım çabaları olmuştur. Bu konuda Landau'nun *Elementary Number Theory* isimli kitabına başvurulabilir.

**4.** Negatif olmayan tüm tamsayıların bu şekilde yazılabildiğini göstereceğiz. Bunun için aşağıdaki iki teoremi kullanacağız.

**Teorem 1.**  $p > 2$  asal sayısı, en az birisi  $p$  ile bölünmeyen 4 karenin toplamını bölsün. Bu durumda  $p$ , 4 karenin toplamıdır.

**Teorem 2.** Her asal sayı 4 karenin toplamıdır.

Burada Teorem 1, Teorem 2'nin kanıtında kullanılmaktadır. Şimdi Teorem 2'yi kullanarak negatif olmayan tüm tamsayıların dört tamsayının toplamı olarak yazılabildiğini göstereceğiz.

Euler eşitliğini ele alalım:

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2) = \\ (aa_1 + bb_1 + cc_1 + dd_1)^2 + (ab_1 - ba_1 + cd_1 - dc_1)^2 \\ + (ac_1 - ca_1 + db_1 - bd_1)^2 + (ad_1 - da_1 + bc_1 - cb_1)^2$$

Bu eşitlikten dolayı 4 karenin toplamı olan iki tamsayının çarpımı yine 4 karenin toplamıdır. Tümevarımla bunu sonlu sayıda çarpan için genişletebiliriz. Birden büyük her tamsayı asal sayıların çarpımı olduğundan, Teorem 2'den dolayı kendisi de 4 karenin toplamıdır. Ayrıca  $0 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$  ve  $1 = 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$  olduğundan çözüm tamamlanmış olur.