FIBONACCI SAYILARI

Asuman Güven Aksoy *

Fibonnacci 1175 ile 1250 yılları arasında yaşamış bir İtalyan matematikçisidir [1]. Fibonacci İtalyanca'da "Bonacci'nin oğlu" anlamına gelmektedir. Babasının işi nedeniyle, küçük yaştan beri bir çok Arap ve Doğu şehrini gezme imkanı bulan Fibonacci, oralarda kullanılan Hint ve Arap ondalık sayı sistemini öğrenmiştir. Bu sayı sisteminin kolaylik ve güzelliğini görüp, o zamanlar İtalya'da kullanılan Romen rakamlarını değiştirmeye uğraşmıştır. Bu amaçla 1202'de *Liber Abaci* başlıklı bir kitap yazıp, bu sayı sisteminde dört aritmetik işleminin (toplama, çıkarma, çarpma, bölme) nasıl yapılacağını göstermiş, problemlerin nasıl çözüleceğini açıklamış, hatta cebir ve geometriyle ilgili bölümler de eklemiştir.

Önce bu yeniliklere direnen İtalyanlar, zamanla Arap ve Doğu ülkeleriyle ticaret yapma zorunlulukları sonucu, Fibonacci'nin kitabını kullanmak zorunda kalmışlar ve bu nedenle, şimdi bizim de kullandığımız sayı sistemini (bu Hint ve Araplar'ın keşfidir) Avrupa'da yavaş yavaş kabul edilegelmiştir.

Fibonacci'nin bugünkü ünlü bu kitaptaki bir zekâ sorusundan kaynaklanır. Bu zekâ sorusuna gelmeden önce şöyle bir oyun oynayalım.

Fibonacci Oyunu

Diyelim bir arkadaşınızla birliktesiniz, ona kafasından iki pozitif sayı tutmasını söyleyin. Bu iki sayıyı size göstermeden bir kağıda alt alta yazıp toplasın ve toplamı 3. sıraya koysun. Sonra 2. sırayla 3. sırayı toplayıp 4. sıraya yazsın; sonra 4.'yle 3.'yü toplayıp 5. sıraya koysun; buna 10 sıra dolana kadar devam etsin. Sonra bu 10 sıradaki bütün sayıları toplasın. Siz arkadaşınızın listesinden tamamen habersizsiniz, ama size 7. sıradaki sayıyı söylerse, o sayıyı 11 ile çarpıp 10. sıranın toplam sayısını bilebilirsiniz. Tabii bu hokkabazlık gibi gelebilir, eğlenceli de olabilir, ama nedeni son derece basittir. Şöyle ki, diyelim ki arkadaşınız kafasından 7 ve 11'i seçti. 7 yerine herhangi bir $x \geq 0$, 11 yerine de herhangi bir $y \geq 0$ olabilirdi.

1. sıra	11	x
2. sıra	7	y
3. sıra	18	$x+y+y=x+2y$
5. sıra	43	$2x+3y$
6. sıra	68	$3x+5y$
7. sıra	111	$5x+8y$
8. sıra	179	$8x+13y$
9. sıra	290	$13x+21y$
10. sıra	469	$21x+34y$
Toplam	1221	

7. sırada 111 var ve işte $111 \times 11 = 1221$!!!

Giderek arkadaşınıza ne kadar zeki (!) olduğunuzu göstermek istiyorsanız, oyuna başlamadan önce bir kâğıda 1.617 yazıp, kağıdı ikiye katlayıp arkadaşınıza verin; sonra bu yukarıdaki oyunu oynayın; sonra "az kalsın unutuyordum (!), senin listede 10. sıradaki sayıyı, 9. sıradaki sayıya bölersen, o sana oyuna başlamadan önce eline verdiğim kağıttaki sayı çıkar" deyin; gerçekten de $469/290 = 1.617\cdots$. Tabii ki 7 yerine herhangi bir x ve y ile başlansa bile, aynı sayı çıkacaktır, şöyle ki

$$1.615\cdots = \frac{21x}{13x} \leq \frac{21x+34y}{13x+21y} \leq \frac{34y}{21y} = 1.619\cdots.$$

Bu gizemli sayı $1.618\cdots = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ikide bir karşımıza çıkmaya devam edecek.

Fibonacci'nin Zekâ Sorusu

Farzedin ki biri erkek biri dişi bir çift tavşanınız var; bir aylıkken çok genç oldukları için üreyemiyorlar, fakat ikinci ayın sonunda erginleşip üremeye başlıyorlar. Tekrar farzedin ki her ay her çift, yeni bir çift (biri erkek, biri dişi) üretiyor. Eğer tavşanlar bu şekilde üremeye devam ederse, her ayın sonunda kaç çift tavşanınız olur?

* Claremont McKenna College Matematik Bölümü öğretim üyesi

Bunun cevabı kolaydır, şöyle ki diyelim ki x üreyebilecek kadar büyümüş, y ise üreyemeyecek kadar genç birer tavşan çiftini temsil etsin. n'yinci ayın sonundaki tavşan çiftlerinin sayısına da F_n diyelim. Hesaplarsak

$$\begin{array}{ll} y & 1 = F_1 \\ x & 1 = F_2 \\ xy & 2 = F_3 \\ xyy & 3 = F_4 \\ xyxyy & 5 = F_5 \end{array}$$

buluruz. Bu sorunun cevabı aşağıdaki sayıları üretiyor:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots.$$

Bu sayılara *Fibonacci sayıları*, bu diziye ise *Fibonacci dizisi* denir. Açıkça tanımlarsak, Fibonacci dizisindeki her sayı, kendinden önce gelen iki sayının toplamıdır. Bunu şu formülle yazabiliriz:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

Yani $n = 2$ ise $F_2 = F_1 + 0 = 1$, $n = 3$ ise $F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$, $n = 4$ ise $F_4 = F_3 + F_2 = 1 + 2 = 3, \ldots$.

Şimdi Fibonacci dizisindeki her sayıyı kendisinden bir önce gelene bölelim:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \ldots, \frac{F_{n+1}}{F_n}, \ldots$$
$$1, 2, 1.5, 1.6, 1.625, 1.6153\cdots, 1.619\cdots, \ldots$$

Matematiksel olarak eğer bu limitin varlığını kabul edersek, yani eğer

$$\lim_{x \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = L$$

dersek, $L = 1.618\cdots$ olacaktır. Bunun ispatı da şöyle: Eğer n yerine $n+1$ yazarsak, $F_{(n+1)+1} = F_{n+2}$ elde ederiz ve

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$$

olur. Fakat Fibonacci dizisinin tanımı gereği F_{n+2}, kendinden önce gelen iki sayının, yani F_n ve F_{n+1}'in toplamıdır, dolayısıyla

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{F_n + F_{n+1}}{F_{n+1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} + 1 \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{F_{n+1}/F_n} + 1 = \frac{1}{L} + 1, \end{aligned}$$

veya $L^2 = L + 1$, $L^2 - L - 1 = 0$ ve $L = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Fibonacci sayılarının hepsi pozitif olduğundan, limit de pozitiftir, yani

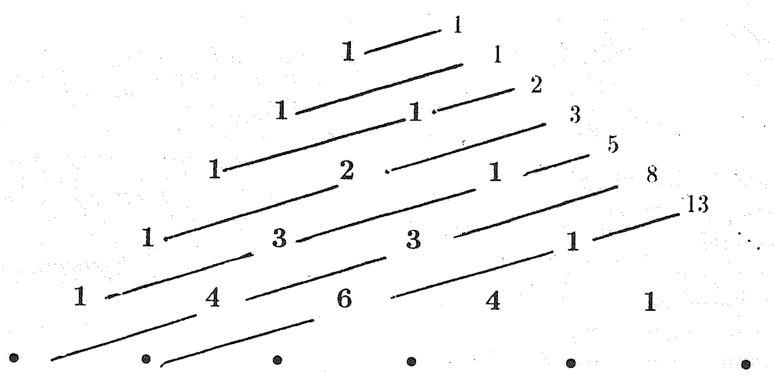
$$L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618\cdots.$$

Fibonacci Sayıları ve Pascal Üçgeni

Paskal üçgeni, iki terimli $(x + y)$'nin kuvvetleri alındığında x ve y'in katsayılarından oluşan üçgendir; örneğin:

$$\begin{aligned} (x+y)^0 &= 1 \\ (x+y)^1 &= 1x + 1y \\ (x+y)^2 &= 1x^2 + 2xy + 1y^2 \\ (x+y)^3 &= 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3 \\ (x+y)^4 &= 1x^4 + 4x^3y^2 + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4 \end{aligned}$$

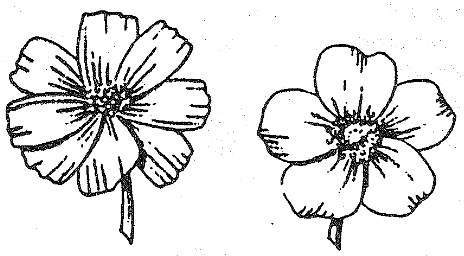
Eğer Pascal üçgeninin köşegenleri üzerindeki sayıları toplarsanız Fibonacci dizisi çıkar karşınıza.



Fibonacci Sayıları ve Doğa

Fibonacci sayıları, matematiğin aslında doğada var olduğunu, ancak insanların bunu yavaş yavaş keşfettiklerini savunur gibi doğaya saklanmıştır. Eğer çiçeklerden anlarsanız, şu aşağıdaki isimleri verilen çiçeklerin yapraklarını sayın; bakın ne çıkacak:

Zambak, yaban süseni — 3 yapraklı,
Yaban gülü, haseki küpesi, düğün çiçeği — 5 yapraklı,
Kozmos çiçeği — 8 yapraklı,
Mısır kadifesi — 13 yapraklı,
Yıldız çiçeği, pat çiçeği — 21 yapraklı,
Çeşitli papatyalar — 34, 55, 84 yapraklı.



Kozmos çiçeği Yaban gülü

Diyelim ki bir koruda yürüyorsunuz. Karşınıza armut veya kiraz ağacı veya karaağaç çıkarsa, bir daldaki bir yaprağı 0'ıncı diye sayıp, onun üstündeki yaprakları, 0'ıncı yaprakla aynı hizada yer alan bir başka yaprağa gelinceye kadar sayın; karaağaçta 3, kiraz ağacında 5, armut ağacında 8 yaprak bulacaksınız.

Karaağaç Kiraz ağacı Armut ağacı

Fibonacci sayılarına önce "kozalak sayıları" denmiştir, çünkü kozalaktaki sağa ve sola giden spirallerdeki tane sayılarına bakarsanız yine yukarıdaki sayıları bulacaksınız. Deniz yıldızının 5 kolunun olması, elmayı veya bir limonu kestiğimizde, elmanın içinde 5 çekirdek, limonda 8 bölüm görmemiz bir raslantı mıdır?

Fibonacci Sayıları ve Sanat

Doğada var olan bir matematiğin, sanata da yansıması, tabii ki şaşırtıcı değil. İsa'dan önce beşinci yüzyılda Yunan mimarları, eni ve boyu arasındaki belli bir orantı olan bir dikdörtgenin göze çok güzel göründüğünü keşfetmişler, bu oranlara sahip bir dikdörtgene *altın dikdörtgen* ismini vermişler, bu dikdörtgendeki oranları binalarında kullanmışlardır. Örneğin, Partenon böyle altın dikdörtgene göre yapılmıştır. Altın dikdörtgeni altın yapan (değerli kılan) içerdiği orandır. Diyelim ki elinizde A'dan C'ye kadar bir doğru parçanız var. Bu doğru parçasının uzunluğunu $|AC|$ ile gösterirseniz ve doğru parçası üzerinde bir B noktasını

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AB| + |BC|}{|AB|}$$

olacak şekilde seçerseniz,

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\cdots$$

bulursunuz; işte bu $1.618\cdots$'dir *altın oran*.

Mimariye etkisi yanında, altın dikdörtgen resimde de ortaya çıkmaktadır. Örneğin Leonardo da Vinci, altın oranı çizdiği insan vücutlarında kullanmıştır. Resimde bu altın orana *dinamik simetri* denir. Albrecht Dürer, George Seurat, Pietter Mondrian, hatta Salvador Dali bile bu dinamik simetriyi, yani $1.618\cdots$'i kullanmışlardır.

Fibonacci Sayıları ve Matrisler

Fibonacci dizisi $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$, yani $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ve $n \geq 2$ için ise $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ diye tanımlanmıştı.

2×2'lik $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisini düşünün.

Eğer A'yı sağdan 2×1'lik $\begin{pmatrix} F_{n-2} \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$ matrisi ile çarparsak şunu buluruz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{n-2} \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} + F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix}.$$

Dolayısıyla, $\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ile başlayıp,

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = A^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\vdots$$

yazıp, böyle devam edersek, sonunda

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

elde ederiz. Eğer A'nın karakteristik polinomuna bakıp özdeğerlerini hesaplamak istersek

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

yazar ve dolayısıyla $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ buluruz. Bu iki kökten biri yine $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\cdots$; diğerini de $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ diye adlandıralım. Bu değerlere karşılık gelen $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ özvektörlerini gözönüne alırsak ve

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

dersek, bakın ne buluyoruz. Önce $P^{-1}AP = D$; bu eşitlikten $A = PDP^{-1}$ bulunur; bu bizi $A^n = PD^nP^{-1}$ eşitliğine götürür. Burada

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ \lambda_1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$$

demektir. $A^n = PD^nP^{-1}$ eşitliğini $(*)$ denkleminde kullanır ve gerekli matris çarpımlarını yaparsak,

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = PD^nP^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^n - \lambda_2^n \\ \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \end{pmatrix}$$

bulunur. Ortaya çıkan eşitlik bize Fibonacci sayılarının A matrisinin özdeğerleri cinsinden çıkacağını gösteriyor. Bunu şu şekilde ifade edebiliriz:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^n - \lambda_2^n).$$

Bu güzel formülü aşağıdaki sorunun cevabını vererek de bulabiliriz.

Soru. *Hangi x değerleri için $1, x, x^2, x^3, x^4, \ldots$ geometrik dizisi Fibonacci dizisi gibi olur?*

Cevap. Geometrik dizi de Fibonacci dizisi gibi tanımlanmalıdır, yani $x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$ olmalıdır. Buradan $x^2 = x + 1$ çıkar, diğer bir deyişle $x^2 - x - 1 = 0$. Bu denklemin kökleri $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\cdots$ (tekrar!) ve $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$'dir.

Eğer $X_1 = \{1, x_1, x_1^2, x_1^3, \ldots\}$ ve $X_2 = \{1, x_2, x_2^2, x_2^3, \ldots\}$ Fibonacci gibiyse, ikisinin farkı $X_1 - X_2 = \{0, x_1 - x_2, x_1^2 - x_2^2, x_1^3 - x_2^3, \ldots\}$ de Fibonacci gibi olacaktır. Yukarıda elde edilen x_1 ve x_2 değerlerini bu dizide yerine koyarsanız, $X_1 - X_2 = \{0, \sqrt{5}, \sqrt{5}, 2\sqrt{5}, 3\sqrt{5}, \ldots\}$, bir başka yazışla

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(X_1 - X_2) = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots\}$$

bulursunuz. Yine çıktı karşımıza Fibonacci dizisi. Bu dizinin n'yinci terimi

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1^n - x_2^n)$$

dir; bakın yine aynı formülü bulduk.

KAYNAKÇA

[1] Ş. Alpay, *Karanlık Çağın Aydınlığı: Fibonacci*, *Bilim ve Ütopya*, Ocak (1995).