

Y110. n ne kadar büyük olursa olsun,

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} \leq 2$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu ve her n için toplamın $2 - \frac{2}{2n+1}$ sayısından küçük olduğunu gösteriniz. (*Şafak Alpay*)

Çözüm. Her zaman

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{2}{2n+1}$$

eşitsizliğinin doğru olmadığını varsayalım ve eşitsizliğin sağlanmadığı en küçük doğal sayıyı n ile gösterelim. $1 < 2 - \frac{2}{3}$ olduğundan $n > 1$ olmalıdır. Varsayım gereği eşitsizlik $n-1$ için doğru olduğundan,

$$2 - \frac{2}{2n+1} \leq \frac{2}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2}$$

$$< \left(2 - \frac{2}{2(n-1)+1}\right) + \frac{1}{n^2}$$

elde edilir. Dolayısı ile

$$\frac{-2}{2n+1} < \frac{-2}{2n-1} + \frac{1}{n^2}$$

eşitsizliği vardır. Bundan elde edilen

$$\frac{4}{4n^2-1} < \frac{1}{n^2}$$

eşitsizliği $4n^2 < 4n^2 - 1$ gerektirdiğinden, varılan çelişki sorulan eşitsizliğin her zaman doğru olduğunu gösterir.

(**Çözenler:** *Murat Aygen, Hasan Denker.*)

PROBLEM SEMİNERLERİ

Yaz aylarında ara verilen Problem Seminerleri programına Ekim ayından itibaren devam edilecektir. TÜBİTAK, Bilim Adamı Yetiştirme Grubu, Atatürk Bulvarı, No: 221, Kavaklıdere, Ankara adresinde yapılan seminerlere mektupla da katılabilirsiniz. Önce Ekim ayında yapılacak olan 95/8 ve 95/9 seminerlerinin sorularını vereyim.

Problem Semineri 95/8, 11 Ekim 1995

1. Üç boyutlu kartezyen koordinat sisteminin merkezinden geçen bir doğrunun koordinat eksenleri ile yaptığı açılar α , β ve γ 'dir. $\alpha + \beta + \gamma \leq 180^\circ$ olduğunu gösteriniz.

2. Üç boyutlu uzayda alınan eşkenar ve eşaçılı bir beşgenin tüm köşelerinin aynı düzlem üzerinde bulunduğunu gösteriniz.

3. Sabit yarıçaplı bir çember, üç boyutlu uzayda birbirine dik üç düzlemin her birine teğet kalacak biçimde hareket etmektedir. Bu çemberin merkezinin geometrik yerini bulunuz.

4. a ve b noktasal cisimleri uzayda, iki ayrı doğru üzerinde sırayla v_a ve v_b sabit hızlarıyla hareket etmektedir. Üzerindeki her noktanın bu iki cisme uzaklıkları oranı sabit ve v_a/v_b olan bir çemberin varlığını gösteriniz.

Problem Semineri 95/9, 25 Ekim 1995

Not. Aşağıdaki problemlerde polinomlar için indirgenme ifadesi tamsayılar üzerinde indirgenme, yani polinomun daha küçük dereceli ve katsayıları tamsayılar olan polinomların çarpımı şeklinde yazılabilmesi anlamında kullanılmıştır.

1. Hangi n pozitif tamsayıları için

$$1 + x + \dots + x^{n-1}$$

polinomu tam sayılar üzerinde indirgenebilir?

2. $x^5 - x^2 + 1$ polinomu tamsayılar üzerinde indirgenebilir mi?

3. $n > 1$ bir tamsayı ve

$$p(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$$

olsun. $p(x)$ polinomunun tam sayılar üzerinde indirgenemeyeceğini gösteriniz.

4. Aşağıdaki polinomların hangi n tamsayıları için, katsayıları tamsayı olan 2. ve 3. dereceden iki indirgenemez polinomun çarpımı şeklinde yazılabileceğini bulunuz.

(a) $x^5 + x + n$

(b) $x^5 - x + n$

CÖZÜMLER

Şimdi de Mayıs ve Haziran aylarında yapılan 95/5, 95/6 ve 95/7 seminerlerinin çözümlerini veriyoruz.

Problem Semineri 95/5

Yönetim: Ali Doğanaksoy, Tolga Etgü, Özcan Öztürk.

1. $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ise, $f(n) = \llbracket \phi n \rrbracket$ bir çözümdür. $f(n+1) - f(n)$, 1 veya 2 olabilir. Bu değer 2 ise $f(f(n) - n + 1) = n$ ve bu değer 1 ise $f(f(n) - n + 1) = n + 1$ olur.

2. Bir kaç gözlem yaparak $f(n)$ 'nin, n 'nin ikilik açılımının ters çevrilmiş halinin (başlangıçtaki 0'ları saymayarak) değeri olduğunu görebiliriz. Bu tahminimizi tümevarımla kanıtlamak için $f(n)$ 'nin tanımını kullanabiliriz. Artık $f(n) = n$ koşulunu sağlayan n 'lerin ikilik düzende palindromik olan n 'ler olduğunu kanıtlamış oluyoruz. Bu sayılardan 1995'ten küçük veya ona eşit olanlarının sayısını ise kolay bir hesapla 92 olarak buluruz.

3. Önce tümevarım kullanarak $n \neq 2$ için $f(n) - f(n-1)$ değerinin 0 ya da 1 olduğunu gösterebiliriz. Ardından f 'nin sınırsız bir fonksiyon olduğunu da gösterirsek şu sonucu elde etmiş oluruz: Her t pozitif tamsayısı için öyle bir ardışık tamsayı dizisi bulabiliriz ki, bu dizi sonludur ve $f(m) = t$ eşitliğinin doğru olması için gerek ve yeter şart m 'nin bu dizide olmasıdır. Bu fikri kullanarak $m \geq 1$ için $f(F_{m+k}) = f(F_{m+k} - 1) = F_m$ ve $m \geq k$ için $f(F_{m+k+1}) = F_{m+1}$ olduğunu tümevarımla ve f ve F_m 'nin tanımlarından kanıtlarız.

4. (a) Kareyi 4 eşit kareye bölüp sağ alt ve sol üst köşelerine $f(n)$ 'ye karşılık gelen parçalamayı uygularsak, $f(n+1) \leq 2f(n) + 2$ elde ederiz. Dolayısıyla $a_{n+1} = 2a_n + 2$ bir alt sınır oluşturur ve $a_n = 2^{n-1}3 - 2$ 'dir. $f(m, n)$, her yatay doğru en fazla m ve her dikey doğru en fazla n dikdörtgen ile keşişecek şekilde kullanabilecek maksimum dikdörtgen sayısı olsun. Bu durumda

$$f(m, n) \leq 2f(m-1, n-1) + 2 + \max\{f(m, n-2), f(m-2, n)\}$$

olduğu şöyle görülebilir: A 'yı sol kenara ve B 'yi sağ kenara bitişik en geniş dikdörtgenler olarak alıp, kareyi bunların uçları boyunca üçe parçalarsak, sağdaki ifadeyi elde ederiz. Tümevarımla $f(m, n) \leq 3\frac{m+n}{2} - 2$ görülür.

(b) Bu kısma ait bilinen bir çözüm yoktur.

Problem Semineri 95/6

Yönetim: Semih Koray, Oytun Eskiyeentürk, Çetin Ürtiş.

1. Soruyu bir olasılık problemine dönüştürerek çözeceğiz. Sorudaki toplamı

$$\sum_{k=r}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

ve

$$\sum_{k=r}^n \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$$

toplamlarının farkı olarak yazalım. $0 \leq p \leq 1$ verildiği için, tura gelme olasılığı p , yazı gelme olasılığı $1-p$ olan paralardan n tanesi atıldığında en az r tane tura gelme olasılığını düşünelim. İlk toplamın bu olasılık probleminin cevabı olduğu açıktır.

Şimdi olasılık problemimizin cevabını bir başka yolla bulalım: r 'yinci turanın tam olarak k 'yinci atışta olma olasılıklarını $k = r, \dots, n$ için bulup, bu olasılıkları toplarsak yine problemin cevabını buluruz. r 'yinci turanın tam olarak k 'yinci atışta olma olasılığını $k-1$ atış içinde tam $r-1$ tane tura gelme olasılığı ile k 'yinci atışta tura gelme olasılığını çarparak, yani

$$\begin{aligned} \binom{k-1}{r-1} p^{r-1} (1-p)^{k-1-(r-1)} p \\ = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \end{aligned}$$

olarak bulabiliriz. Bu olasılıkları $k = r, \dots, n$ için toplarsak problemin cevabını bulmuş oluruz. Elde edilen ise ikinci toplama eşittir. Böylece sorunun cevabı 0 bulunur.

2. Önce genel binom katsayısını $r \in \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{Z}$ için

$$\binom{r}{k} = \begin{cases} \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}, & k \geq 0 \text{ ise;} \\ 0, & k < 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. $z \in \mathbb{R}$ ve $|z| < 1$ ise, $(1+z)^r$ 'nin 0'daki Taylor açılımından dolayı

$$(1+z)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} z^k$$

dir. Şimdi genel binom katsayısını

soruyu çözelim.

$$\begin{aligned} \binom{2k}{k} \frac{1}{4^k} &= \frac{(2k)!}{k!k!4^k} \\ &= \frac{(2k)(2k-2)\cdots 2(2k-1)(2k-3)\cdots 1}{k!k!4^k} \\ &= \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}}{k!} \\ &= \frac{(-1)^k (-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots (-\frac{1}{2}-k+1)}{k!} \end{aligned}$$

bulunur ve buradan

$$\begin{aligned} \frac{\binom{2k}{k}}{(k+1)!4^k} &= \frac{(-1)^k (-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots (-\frac{1}{2}-k+1)}{(k+1)!} \\ &= (-1)^k 2 \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})\cdots (-\frac{1}{2}-k+1)}{(k+1)!} \\ &= (-1)^k 2 \binom{\frac{1}{2}}{k+1} \end{aligned}$$

elde edilir. Soruda istenen toplama T dersek,

$$\begin{aligned} T &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{\frac{1}{2}}{k+1} \\ &= -2 \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\frac{1}{2}}{k+1} + \left(-1 + \frac{1}{2}\right) \right] \\ &= -2 \left[(1-1)^{1/2} - \frac{1}{2} \right] = 1 \end{aligned}$$

bulunur.

3. Bu soruyu da bir olasılık problemine dönüştürerek çözeceğiz. Yazı ve tura gelme olasılıkları eşit olan paralardan A , $n+1$ tane, B de n tane atıyor. A 'nın B 'den daha fazla tura atma olasılığı $P(n)$ olsun.

$$P(n) = \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{r=0}^n \sum_{k=r+1}^{n+1} \binom{n}{r} \binom{n+1}{k}$$

bulunur. Sorunun cevabı $2^{2n+1}P(n)$ olduğundan $P(n)$ 'yi bulmamız yeterlidir.

Şimdi $P(n)$ 'yi olasılık bilgimizi kullanarak hesaplayalım: A_1 ve B_1 , A 'nın ve B 'nin attığı tura, A_2 ve B_2 , A 'nın ve B 'nin attığı yazı sayıları olsun. $P(\{A_1 > B_1\})$, A_1 'in B_1 'den büyük olma ve $P(\{A_2 > B_2\})$, A_2 'nin B_2 'den büyük olma olasılıkları ise, $P(\{A_1 > B_1\}) = P(\{A_2 > B_2\})$ 'dir, çünkü paraların yazı ve tura gelme olasılıkları eşittir. Bu gözlemlerden dolayı $A_2 > B_2$ olması $n+1 - A_1 > n - B_1$ olmasına, bu eşitsizlik $A_1 \leq B_1$ olmasına ve bu ise

$P(\{A_1 > B_1\}) = P(\{A_1 \leq B_1\})$ eşitliğine denktir. Ayrıca $P(\{A_1 > B_1\}) + P(\{A_1 \leq B_1\}) = 1$ olduğundan $P(\{A_1 > B_1\}) = P(\{A_1 \leq B_1\}) = \frac{1}{2}$ ve buradan $P(n) = P(\{A_1 > B_1\}) = \frac{1}{2}$ bulunur. Böylece sorunun cevabı $2^{2n+1}(\frac{1}{2}) = 2^{2n}$ çıkar.

4. Soruyu genel bir özdeşliğin özel bir halini kullanarak çözeceğiz. Şimdi $m \in \mathbb{N}$ ve $r \in \mathbb{R}$ için

$$\sum_{k=0}^m \binom{m+r}{k} x^k y^{m-k} = \sum_{k=0}^m \binom{-r}{k} (-x)^k (x+y)^{m-k}$$

özdeşliğini ispatlayalım. Bu ifadenin iki tarafını da r 'ye bağlı m 'yinci dereceden polinomlar olarak düşünebiliriz. $r = 0, -1, \dots, -m$ ve $0 \leq k \leq m$ için $\binom{m+r}{k} = \binom{-r}{k} = 0$ olduğundan, ispatlamak istediğimiz özdeşlikteki toplamların üst limitini ∞ olarak alabiliriz. Genelleştirilmiş binom katsayılarının özelliğinden dolayı

$$\sum_{k \geq 0} \binom{m+r}{k} x^k y^{m-k} = (x+y)^{m+r} y^r$$

ve

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \binom{-r}{k} (-x)^k (x+y)^{m-k} \\ &= (x+y)^m \sum_{k \geq 0} \binom{-r}{k} \left(-\frac{x}{x+y}\right)^k \\ &= (x+y)^m \left(1 - \frac{x}{x+y}\right)^{-r} \\ &= (x+y)^{m+r} y^{-r} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $r = 0, -1, \dots, -m$ için, yani r 'nin $m+1$ farklı değeri için, iki taraftaki r 'ye bağlı m 'yinci dereceden iki polinom eşittir. Bu ise iki polinomun eşit olmasını gerektirir. Yani her $r \in \mathbb{R}$ için özdeşliğin doğru olduğunu görürüz.

Şimdi özdeşliği $x = y = 1$ ve $r = m+1$ olduğunda kullanalım:

$$\sum_{k \leq m} \binom{2m+1}{k} = \sum_{k \leq m} \binom{m+k}{k} 2^{m-k}$$

elde edilir. Sol taraf Pascal üçgeninin $2m+1$ 'inci satırındaki ilk m teriminin toplamıdır. Ayrıca Pascal üçgeni simetrik olduğundan, sol taraf $\frac{1}{2}2^{2m+1} = 2^{2m}$ 'ye eşittir. Böylece

$$2^{2m} = \sum_{k \leq m} \binom{m+k}{k} 2^{-k} 2^m$$

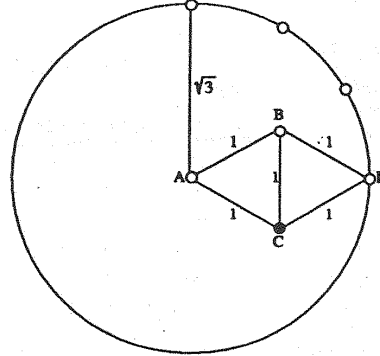
bulunur. Buradan bulmak istediğimiz toplam $2^{2m} 2^{-m} = 2^m$ çıkar.

sayının karesi olduğunu elde ederiz. Buna dayanarak $u, v \in \mathbb{Z}$ ve $\text{OBEB}(u, v) = 1$ için $b = u/v$ yazarsak, $u^2 + v^2$ ve $u^2 + 2v^2$ değerlerinin birer tam kare olması gerekir. Bu $\text{OBEB}(u, v) = 1$ için bir çelişki oluşturmaktadır. Dolayısıyla seçtiğimiz 3 noktaya olan uzaklıklarının hepsi rasyonel olan bir nokta yoktur. Seçtiğimiz 3 nokta düzlem üzerindeki bütün noktaları siyaha boyamak için yeterli olacaktır.

4. Böyle bir boyama $n = 1, 2, 3$ için mümkün değil, $n \geq 7$ için mümkündür. $n = 4, 5, 6$ için ise, bu tür bir boyamanın mümkün olup olmadığı bugüne kadar gösterilememiştir. Şimdi boyamanın $n = 1, 2, 3$ için mümkün olmadığını kanıtlayıp, $n = 7$ için bir boyama yolu gösterelim. $n = 1$ için, düzlem üzerinde alacağımız birbirine uzaklığı 1 olan herhangi 2 nokta aynı renkte olacaktır. $n = 2$ için, düzlem üzerinde kenar uzunluğu 1 olan bir eşkenar üçgen alalım. Bu eşkenar üçgenin üç köşesinden en az ikisi aynı renkte olacaktır. Böyle iki köşe, aralarındaki uzaklık 1 olan aynı renkli bir nokta çifti oluşturacaktır.

$n = 3$ için, B ve C gibi aralarındaki uzaklık 1 olan iki nokta alalım. B ve C 'nin renkleri aynıysa, boyama şartı sağlanmayacaktır. B ve C 'nin farklı renkte olması durumunu ele alalım. BC 'yi, B ve C 'den farklı renkte kabul edebiliriz. Bu durumda A ve D aynı renkte olacaktır. Aynı şekilde, aralarındaki uzaklık $\sqrt{3}$ olan herhangi bir A, D nokta çifti için ABC ve DBC üçgenleri eşkenar olacak şekilde B ve C noktaları bulabileceğimizden dolayı, A ile D 'nin aynı renkte olmaması halinde aralarındaki uzaklık 1 olan aynı renkli bir nokta çifti oluşacaktır. Aralarındaki uzaklık $\sqrt{3}$ olan herhangi iki noktanın aynı renkli olduğu durumda ise $\sqrt{3}$ yarıçaplı bir çember üzerindeki noktaların hepsi bu çemberin merkeziyle aynı renkte

olacaktır. Dolayısıyla çember üzerinde bulunan ve aralarındaki uzaklık 1 olan iki nokta boyama şartını bozan bir çift oluşturacaktır.



$n = 7$ için, aşağıdaki boyama şekli boyama şartını sağlamaktadır. Burada altıgenler çevrel çemberinin çapı 1 olan düzgün altıgenlerdir. Her altıgenin küçük şekilde koyu gösterilen kısmı, iç bölgesiyle aynı renge boyanmıştır.

