

TRİGONOMETRİK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜLMESİ

C. Alparslan Ertuğ *

Dergimizde daha önce yayınlanan yazımızda [5] bir bilinmeyenli trigonometrik denklemlerin çözüm yöntemlerini açıklamaya çalışmıştık. Bu yazımızda ise iki bilinmeyenli trigonometrik denklemler sisteminin çözülmesine ilişkin yöntemleri ele alacağız. Ancak bu yazıda sözü edilen şeylerin genellikle, daha fazla bilinmeyen içeren denklemler için de geçerli oldukları unutulmamalıdır.

Bir trigonometrik denklemler sistemini çözmek demek, "bilinmeyenlerin, sistemdeki tüm denklemleri aynı anda doğru ifadeler haline getiren tüm değerler kümelerini bulmak" demektir.

Trigonometrik denklemler sisteminin sonsuz sayıda çözümleri bulunur. Bu nedenle çözümler kümesinin uygun bir notasyonla yazılması son derece önemlidir.

İki bilinmeyenli denklemler sistemlerini çözerken, genellikle aşağıdaki yollardan birini izleriz:

1. Bilinmeyenlerden biri öteki cinsinden yazılarak sistem bir bilinmeyenli bir denkleme indirgenir ve buradan da çözüm kümesi elde edilir.

2. Denklemlerden birinde uygun bir değişken dönüşümü ya da trigonometrik dönüşümler yapılarak sistem cebirsel bir denklemler sistemi haline dönüştürülür ve buradan da bilinmeyenlere ait çözüm kümesi bulunur.

3. Sistemdeki her iki denklemlerden birini trigonometrik dönüşümler yaparak ya da başka değişkenler kullanarak sistem cebirsel hale getirilir ve buradan da çözümler elde edilir.

Bu yöntemleri örnekler yardımıyla açıklamaya çalışalım.

Bilinmeyenlerden Birini Yoketmek

Örnek 1. Aşağıdaki denklemler sistemini çözümleriz:

$$\begin{aligned}x - y &= \frac{\pi}{3} \\ \sin x &= 2 \sin y\end{aligned}$$

Çözüm. Birinci denklemden $x = y + \frac{\pi}{3}$ bulunur. Bu ikinci denklemlerde kullanılır ve ara işlemler yapılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned}\sin\left(y + \frac{\pi}{3}\right) &= 2 \sin y \\ \sin y \cos \frac{\pi}{3} + \cos y \sin \frac{\pi}{3} &= 2 \sin y \\ 3 \sin y &= \sqrt{3} \cos y\end{aligned}$$

elde edilir. $\cos y = 0$ olamayacağı denklemlerden açıkça gözükmektedir. O zaman $\cos y$ ile bölünürse

$$\tan y = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sin \pi/6}{\cos \pi/6}$$

çıkar. Bu basit denklemler çözülerek

$$\begin{aligned}y &= \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x &= \frac{\pi}{2} + k\pi\end{aligned}$$

bulunur. $k = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$ alınacaktır.

Denklemlerden Birini Dönüştürmek

Söz konusu denklemler sistemindeki denklemlerden biri açılım toplam veya farkını, öteki ise, bunların çeşitli trigonometrik oranlarının toplamı, farkı, çarpımı ya da oranını içeriyorsa bu yöntemle sonuca ulaşılabilir. Şimdi bir kaç tipik örnekle yöntemin nasıl uygulandığını göstereyim:

Örnek 2. Aşağıdaki denklemler sistemini çözümleriz:

$$\begin{aligned}x + y &= \frac{4\pi}{3} \\ \cos x + \cos y &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

* Gemi inşaatı mühendisi

Çözüm. İkinci denklemi, kosinüslerin toplamı formülünden yararlanarak dönüştürelim.

$$2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{2\pi}{3} \cos \frac{x-y}{2} = -\frac{1}{4}$$

$\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ değerini kullanırsak,

$$\cos \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}$$

buluruz. Bu denklemi çözersek

$$\cos \frac{x-y}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{x-y}{2} = 2k\pi \mp \frac{\pi}{3}$$

$$x-y = 4k\pi \mp \frac{2\pi}{3}$$

elde ederiz. O halde başlangıçtaki trigonometrik denklem sistemi, aşağıdaki iki cebirsel denklem sistemine dönüşmüş olur.

$$\begin{cases} x+y = \frac{4\pi}{3} \\ x-y = 4k\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x+y = \frac{4\pi}{3} \\ x-y = 4k\pi - \frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (2)$$

(1) sistemini çözersek

$$2x = 4k\pi + 2\pi$$

$$x_1 = 2k\pi + \pi$$

$$y_1 = \frac{\pi}{3} - 2k\pi,$$

(2) sistemini çözersek

$$2x = 4k\pi + \frac{2\pi}{3}$$

$$x_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$y_2 = \pi - 2k\pi$$

çözümlerini elde ederiz. Çözümlerde k bir tam sayıdır.

Örnek 3. Aşağıdaki denklem sistemini çözünüz:

$$x+y = 2\pi$$

$$\tan x \tan y = -1$$

Çözüm. İkinci denklemi dönüştürmeye çalışalım:

$$\frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = -1.$$

Sol tarafın payını sinüslerin çarpımı, paydasını ise kosinüslerin çarpımı formüllerinden yararlanarak yeniden yazalım:

$$\frac{\frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]}{\frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]} = -1.$$

$\cos(x+y) = \cos 2\pi = 1$ değerini kullanırsak

$$\frac{\cos(x-y) - 1}{1 + \cos(x-y)} = -1$$

buluruz. İşlemleri yaparak düzenlersek $\cos(x-y) = 0$ denklemine ulaşırız. Bunu çözelim:

$$\cos(x-y) = \cos \frac{\pi}{2}$$

$$x-y = 2k\pi \mp \frac{\pi}{2}.$$

O halde iki cebirsel denklem sistemi elde etmiş olduk. $x+y = 2\pi$ ile + işaretli sistemi çözersek

$$x_1 = k\pi + \frac{5\pi}{4}$$

$$y_1 = \frac{3\pi}{4} - k\pi,$$

- işaretli sistemi çözersek

$$x_2 = k\pi + \frac{3\pi}{4}$$

$$y_2 = \frac{5\pi}{4} - k\pi$$

sonuçlarını elde ederiz. Her iki çözümde de k bir tamsayıdır.

Örnek 4. Aşağıdaki trigonometrik denklem sistemini çözünüz:

$$x-y = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\sin x}{\sin y} = 2$$

Çözüm. $a/b = c/d$ biçimindeki bir orantının

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$$

biçiminde yazılabileceğini biliyoruz. İkinci denkleme bu orantı özelliğini uygulayalım.

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

Denklemin sol tarafının pay ve paydasını sinüslerin farkı ve toplamı formülleri yardımıyla yeniden yazalım:

$$\frac{2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}}{2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}} = \frac{1}{3}$$

Şimdi

$$\begin{aligned} \sin \frac{x-y}{2} &= \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ \cos \frac{x-y}{2} &= \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

değerlerini yerlerine koyalım:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{x+y}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{x+y}{2}} &= \frac{1}{3} \\ \cot \frac{x+y}{2} &= \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cot \frac{x+y}{2} &= \cot \frac{\pi}{3} \\ \frac{x+y}{2} &= k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x+y &= 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

O halde denkleminiz aşağıdaki cebirsel denklem sistemine dönüşmüş olur:

$$\begin{aligned} x-y &= \frac{\pi}{3} \\ x+y &= 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Bu sistemin çözülmesiyle, k bir tamsayı iken,

$$\begin{aligned} x &= k\pi + \frac{\pi}{2} \\ y &= k\pi + \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

çözümleri elde edilir.

Denklemlerin İkisini Birden Dönüştürmek

Örnek 5. Aşağıdaki denklem sistemini çözünüz:

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y &= 1 \\ \cos \frac{x}{2} + \cos \frac{y}{2} &= \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \end{aligned}$$

Çözüm. Birinci denklemdeki kosinusleri yarım açı cinsinden

$$\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$$

şeklinde yazıp ara işlemleri yaparsak,

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{y}{2} &= \frac{3}{2} \\ \cos \frac{x}{2} + \cos \frac{y}{2} &= \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \end{aligned}$$

sistemini elde ederiz. $\cos \frac{x}{2} = u$ ve $\cos \frac{y}{2} = v$ dönüşümünü yaparsak,

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 &= \frac{3}{2} \\ u + v &= \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \end{aligned}$$

cebirsel denklem sistemini elde ederiz. Birinci denklemin sol tarafını $(u+v)^2 - 2uv$ biçiminde yazacak ve $(u+v)$ 'nin değerini gözönüne olacak olursak aşağıdaki sisteme ulaşırız:

$$\begin{aligned} u + v &= \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \\ uv &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Bu sistemde değişkenlerden birini diğeri cinsinden ifade edip ikinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem elde edilerek çözülebilir. Fakat biz burada kolayca gözüktüğü için, kökleri tahmin ederek çözüme ulaşmayı tercih edeceğiz. Çarpımları $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, toplamları $\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$ olan bir çift sayı vardır: -1 ve $\frac{\sqrt{2}}{2}$. O halde x ve y bilinmeyenlerini bulmak için,

$$\begin{aligned} \cos \frac{x}{2} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \frac{y}{2} &= -1 \end{aligned}$$

sistemini çözmek gerekir. Bunların çözülmesiyle aşağıdaki çözümler elde edilir:

$$\begin{aligned} x_1 &= \mp \frac{\pi}{2} + 4k\pi, & y_1 &= 2\pi + 2n\pi, \\ x_2 &= 2\pi + 4p\pi, & y_2 &= \mp \frac{\pi}{2} + 4q\pi. \end{aligned}$$

k, n, p, q tamsayılardır.

Örnek 6. Aşağıdaki denklem sistemini çözünüz:

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y &= 1 \\ \cos 3x + \cos 3y &= 1 \end{aligned}$$

Çözüm. $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$ eşitliği ikinci denklemde yerine konup düzenlenirse

$$\begin{aligned} 4(\cos^3 x + \cos^3 y) - 3(\cos x + \cos y) &= 1 \\ \cos^3 x + \cos^3 y &= 1 \end{aligned}$$

ERTUĞ

bulunur.

$$(\cos x + \cos y)^3 = \cos^3 x + \cos^3 y + 3 \cos x \cos y (\cos x + \cos y)$$

özdeşliğinden $\cos^3 x + \cos^3 y = 1$ değerini çekersek,

$$\begin{aligned} (\cos x + \cos y)^3 - 3 \cos x \cos y (\cos x + \cos y) &= 1 \\ 1 - 3 \cos x \cos y &= 1 \\ \cos x \cos y &= 0 \end{aligned}$$

olacaktır. O halde başlangıçtaki sistem, aşağıdaki biçime dönüşmüş olur:

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y &= 1 \\ \cos x \cos y &= 0. \end{aligned}$$

İkinci denklemdeki çarpanları ayrı ayrı sıfıra eşitleyerek iki denklem sistemi elde edilir:

$$\cos x = 0, \quad \cos y = 1, \quad (1)$$

$$\cos y = 0, \quad \cos x = 1. \quad (2)$$

(1) sistemini çözersek

$$x_1 = 2k\pi \mp \frac{\pi}{2}, \quad y_1 = 2n\pi,$$

(2) sistemini çözersek

$$y_2 = 2m\pi \mp \frac{\pi}{2}, \quad x_2 = 2p\pi$$

çözümleri elde edilir. k, m, n, p tamsayıdır.

Örnek 7. Aşağıdaki denklem sistemini çözümlü:

$$\begin{aligned} \sin y - \sqrt{2} \sin x &= 0 \\ 2 \cos x + \cos y &= 1 \end{aligned}$$

Çözüm. Bu problemi çözerken $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ özdeşliğinden yararlanacağız. Birinci denklemde $\sin y = \sqrt{2} \sin x$ olur ve bunun karesi alınarak $\sin^2 y = 2 \sin^2 x$ bulunur. İkinci denklemden $\cos y = 1 - 2 \cos x$ olur ve bunun karesi alınarak $\cos^2 y = (1 - 2 \cos x)^2$ bulunur. $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ denkleminde bunları kullanırsak,

$$\begin{aligned} 2 \sin^2 x + (1 - 2 \cos x)^2 &= 1 \\ 2 \sin^2 x + 1 - 4 \cos x + 4 \cos^2 x &= 1 \\ 2(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2 \cos^2 x - 4 \cos x &= 0 \\ 2 \cos^2 x - 4 \cos x + 2 &= 0 \\ (\cos x - 1)^2 &= 0 \\ \cos x &= 1 \end{aligned}$$

basit trigonometrik denklemi elde edilir. Bunun çözümleriyle de $x = 2k\pi$ bulunur. Öteki bilinmeyen ise,

$$\begin{aligned} \cos y &= 1 - 2 \cos x \\ \cos y &= -1 \\ y &= 2n\pi \mp \pi \end{aligned}$$

olarak elde edilir. k ve n tamsayıdır.

Bazı durumlarda denklem sistemi verirken, köklerin bazı yan koşulları sağlaması da istenebilir. Bu durumda sistemi çözüp, sonra da istenen koşulları sağlayan çözümleri ayırmak bir çok durumda son derece güç olabilir. Böyle durumlarda istenen koşullara uygun kökleri doğrudan doğruya elde etmeye çalışmak daha kolay olabilir. Şimdi de bununla ilgili bir örnek yapalım.

Örnek 8. Aşağıdaki denklem sisteminin, $0 < x < \pi$ ve $\pi < y < 2\pi$ koşullarını sağlayan çözümlerini bulunuz:

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{4}$$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = \frac{3}{2}$$

Çözüm. Sinüslerin çarpımını kosinüslerin farkı biçiminde yazarsak, sistem aşağıdaki biçime dönüşür:

$$\begin{aligned} \cos(x-y) - \cos(x+y) &= -\frac{1}{2} \\ \cos(x+y) + \cos(x-y) &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Buradan ise şu basit sistemi elde ederiz:

$$\begin{aligned} \cos(x-y) &= \frac{1}{2} \\ \cos(x+y) &= 1. \end{aligned}$$

Bu sistemin $0 < x < \pi$ ve $\pi < y < 2\pi$ aralıklarında bulunan çözümlerini arıyoruz. O halde

$$\begin{aligned} -2\pi < x-y < 0 \\ \pi < x+y < 3\pi \end{aligned}$$

olmalıdır. $x-y$ farkı -2π ile 0 arasında bulunuyorsa, $\cos(x-y) = \frac{1}{2}$ denklemi yalnızca iki halde sağlanır: $x-y = -\pi/3$ ve $x-y = -5\pi/3$. $x+y$ toplamı ise, π ile 3π arasında bulunuyorsa, $\cos(x+y) = 1$ denklemi yalnızca bir halde sağlanır: $x+y = 2\pi$. O halde aşağıdaki

iki cebirsel denklemin çözülmesi aradığınız tüm çözümleri verecektir:

$$x - y = -\frac{\pi}{3}, \quad x + y = 2\pi, \quad (1)$$

$$x - y = -\frac{5\pi}{3}, \quad x + y = 2\pi. \quad (2)$$

Bu iki denklem sisteminin çözülmesiyle;

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5\pi}{6}, & y_1 &= \frac{7\pi}{6}, \\ x_2 &= \frac{\pi}{6}, & y_2 &= \frac{11\pi}{6}. \end{aligned}$$

elde edilir.

Bazan da verilen karışık bir tek trigonometrik denklemin çözümü, onu bir denklem sistemi haline getirerek bulunur. Bazı durumlarda ise bu denklem sistemini elde etmekte eşitsizlikler kullanılır.

Örnek 9. Aşağıdaki denklemin çözüm kümesini bulunuz:

$$\begin{aligned} x^{x+4} - 2x^{x+3} - 2(\cos \pi x - 1)x^{x+2} \\ + 4(\cos \pi x - 1)x^{x+1} - x^3 + 2x^2 \\ + 2(\cos \pi x - 1) - 4(\cos \pi x - 1) = 0 \end{aligned}$$

Çözüm. Verilen denklemi çarpanlara ayıralım:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2(x^{x+2} - 2x^{x+1} - x + 2) \\ &\quad - 2(\cos \pi x - 1)(x^{x+2} - 2x^{x+1} - x + 2) \\ 0 &= (x^{x+2} - 2x^{x+1} - x + 2)(x^2 - 2\cos \pi x + 12) \end{aligned}$$

Şimdi birinci çarpanı sifıra eşitleyelim:

$$x^{x+2} - 2x^{x+1} - x + 2 = 0.$$

Bu ifadeyi grüplama yöntemiyle çarpanlara ayıralım:

$$\begin{aligned} x^{x+2} - 2x^{x+1} - x + 2 &= 0 \\ x(x^{x+1} - 1) - 2(x^{x+1} - 1) &= 0 \\ (x^{x+1} - 1)(x - 2) &= 0. \end{aligned}$$

İkinci çarpan $x_1 = 2$ çözümü elde edilir. İlk çarpan $x^{x+1} = 1$ verir. Bir üslü ifadenin 1'e eşit olması için ya üssü sifıra ya da tabanı 1'e eşit olmalıdır. O halde $x_2 = -1$ ve $x_3 = 1$ elde ederiz. Şimdi de başlangıçta bulduğumuz ikinci çarpanı sifıra eşitleyelim: $x^2 + 2 = 2 \cos \pi x$. Bu denklemi çözebilmek için eşitsizliklerden yararlanacağız. Bu denklemin sol tarafı daima $x^2 + 2 \geq 2$ koşulunu, sağ taraf ise $-2 \leq 2 \cos \pi x \leq 2$ koşulunu sağlar. İki tarafın birbirine eşit olabilmesi için, (bir başka deyişle, ele aldığımız ikinci

çarpanın sifıra eşit olabilmesi için, her iki tarafın aynı anda 2'ye eşit olması gerekmektedir. Yani

$$\begin{aligned} x^2 + 2 &= 2 \\ 2 \cos \pi x &= 2 \end{aligned}$$

denklemin sağlanması gerekir. Birinci denklemden $x = 0$ bulunur. Bu kökün ikinci denklemini de sağlaması gerektiğinden $x = 0$ değeri burada yerine konulmalıdır. Bu değer ikinci denklemini sağladığı görülmektedir. O halde $x_4 = 0$ değeri de çözüm kümesinin elemanıdır.

Örnek 10. Aşağıdaki denklemin çözüm kümesini bulunuz:

$$2x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x - 4y + 8 = 0$$

Çözüm. Denklemi aşağıdaki biçimde yeniden yazalım:

$$\begin{aligned} 0 &= (x^2 + y^2 - 2xy) + (x^2 - 4x + 4) \\ &\quad + (y^2 - 4y + 4) \\ 0 &= (x - y)^2 + (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \\ -(x - y)^2 &= (x - 2)^2 + (y - 2)^2. \end{aligned}$$

Bu denklemin sol tarafı $(x - y)^2 \geq 0$, sol tarafı ise $-(x - y)^2 \leq 0$ koşulunu sağlar. Eşitlik her iki denklemin aynı anda sifıra eşit olmaları halinde mümkün olur:

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 + (y - 2)^2 &= 0 \\ -(x - y)^2 &= 0 \end{aligned}$$

İlk denklemden $x = y$ bulunur. Bu eşitlik ikinci denkleminde kullanılırsa $2(x - 2)^2 = 0$, böylece $x = 2$, ve buradan da $y = 2$ bulunur.

KAYNAKÇA

- [1] Y. Aksoy, *Trigonometri*, İstanbul, 1972.
- [2] T. Caronnet, *Çözümlü Trigonometri Problemleri*, İstanbul, 1969.
- [3] G. Dorofeev, *Elementary Mathematics*, Mir, Moskova, 1988.
- [4] B. Dündar, *Trigonometri*, Ankara, 1988.
- [5] C. A. Ertuğ, *Trigonometrik Denklemlerin Çözülmesi*, *Matematik Dünyası*, 5, sayı 2, 6-12 (1995).
- [6] E. Ülsoy, *Düzlem ve Küresel Trigonometri*, İstanbul, 1969.