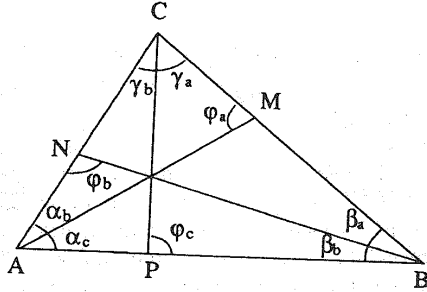


# KOTANJANT TEOREMİ VE UYGULAMALARI

Selma Atabey \*



Bu makalede, kotanjant teoremi yardımı ile bir üçgenin kenar uzunlukları, açıların trigonometrik fonksiyonları ve kenarortaylarının arasındaki bağıntılar verilmiştir.

$\triangle ABC$  bir üçgen olsun.  $|BC| = a$ ,  $|CA| = b$ ,  $|AB| = c$ ,  $\widehat{BAC} = \alpha$ ,  $\widehat{ABC} = \beta$ , ve  $\widehat{BCA} = \gamma$  olsun.  $S$  ile  $ABC$  üçgeninin alanı gösterilsin.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$  eşitliği konsinüs teoremi olarak bilinmektedir. Bu eşitlik,  $2S = bc \sin \alpha$  formülü yardımı ile *kotanjant teoremi* denilen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 4S \cot \alpha$$

formülüne dönüşür.

Kotanjant teoreminin uygulamalarına geçmeden önce bazı işaretleri tanımlayalım.  $ABC$  üçgeninin  $n$  tane  $BC$ ,  $CA$  ve  $AB$  kenarlarının orta noktaları sıra ile  $M$ ,  $N$  ve  $P$  olsun.  $\widehat{MAB} = \alpha_c$ ,  $\widehat{MAC} = \alpha_b$ ,  $\widehat{NBA} = \beta_c$ ,  $\widehat{NCA} = \beta_b$  ve  $\widehat{CPB} = \varphi_c$  olsun.  $n \geq 1$  için

$$K_n = \frac{a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}}{(4S)^n}$$

olsun.

**Soru 1.**  $ABC$  herhangi bir üçgen olsun. Aşağıdaki eşitlikleri ispatlayınız:

$$\cot \varphi_a = \frac{c^2 - b^2}{4S},$$

$$\cot \varphi_b = \frac{a^2 - c^2}{4S}, \quad \cot \varphi_c = \frac{b^2 - a^2}{4S}.$$

**Çözüm.**  $AMC$  üçgenine kotanjant teoremini uygularsak,

$$b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + |AM|^2 - 4\frac{S}{2} \cot \varphi_a$$

olur ve  $|AM|^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$  eşitliğinden istenen ilk eşitlik bulunur. Benzer şekilde diğer ikisi de gösterilir.

**Sonuç 1.** İkizkenar olmayan her üçgen aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$\frac{c^2 - b^2}{\cot \varphi_a} = \frac{a^2 - c^2}{\cot \varphi_b} = \frac{b^2 - a^2}{\cot \varphi_c} = 4S.$$

Gerçekte bunlar Soru 1'in eşitlikleridir. Değişik şekilde (sinüs teoremine benzer şekilde) yazılmışlardır.

**Sonuç 2.** Her üçgen için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$\begin{aligned} \cot \varphi_a + \cot \varphi_b + \cot \varphi_c &= 0, \\ \cot \varphi_a &= \frac{1}{2}(\cot \beta - \cot \gamma), \\ \cot \varphi_b &= \frac{1}{2}(\cot \gamma - \cot \alpha), \\ \cot \varphi_c &= \frac{1}{2}(\cot \alpha - \cot \beta). \end{aligned}$$

**Kanıt.** İlk eşitlik doğrudan Soru 1'den çıkar. Diğerleri de Soru 1'den ve kotanjant teoreminden çıkartılabilir. Örneğin,

$$\begin{aligned} \cot \varphi_a &= \frac{c^2 - b^2}{4S} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S} - \frac{b^2 + a^2 - c^2}{4S} \right) \\ &= \frac{1}{2}(\cot \beta - \cot \gamma) \end{aligned}$$

olur.

\* Ankara Atatürk Anadolu Lisesi matematik öğretmeni

**Soru 2.** Her üçgen aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$\cot^2 \varphi_a + \cot^2 \varphi_b + \cot^2 \varphi_c = K_2 - 1.$$

**Çözüm.** Soru 1'i ve Heron formülünü kullanarak eşitliğin sol tarafını hesaplayalım:

$$\begin{aligned} & \cot^2 \varphi_a + \cot^2 \varphi_b + \cot^2 \varphi_c \\ &= \left( \frac{c^2 - b^2}{4S} \right)^2 + \left( \frac{a^2 - c^2}{4S} \right)^2 + \left( \frac{b^2 - a^2}{4S} \right)^2 \\ &= \frac{1}{16S^2} [2(a^4 + b^4 + c^4) - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)] \\ &= \frac{1}{16S^2} (a^4 + b^4 + c^4 - \\ & \quad - [2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)]) \\ &= \frac{1}{16S^2} (a^4 + b^4 + c^4 - 16S^2) = K_2 - 1 \end{aligned}$$

bulunur.

**Sonuç 3.** Her üçgen için aşağıdakiler geçerlidir:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq 16S^2,$$

$$\cot \varphi_a \cot \varphi_b + \cot \varphi_b \cot \varphi_c$$

$$+ \cot \varphi_c \cot \varphi_a = -\frac{1}{2}(K_2 - 1) \leq 0,$$

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi_a} + \frac{1}{\sin^2 \varphi_b} + \frac{1}{\sin^2 \varphi_c} = K_2 + 2 > 3,$$

$$\frac{\cos 2\varphi_a}{\sin^2 \varphi_a} + \frac{\cos 2\varphi_b}{\sin^2 \varphi_b} + \frac{\cos 2\varphi_c}{\sin^2 \varphi_c} = K_2 - 4 \geq -3.$$

**Kanıt.** Tüm eşitsizlikler Soru 2'deki eşitliğin birer sonucudur. Bu eşitliğin sol tarafı negatif değildir, dolayısıyla  $K_2 \geq 1$ 'dir.

$$\begin{aligned} & \cot \varphi_a \cot \varphi_b + \cot \varphi_b \cot \varphi_c + \cot \varphi_c \cot \varphi_a \\ &= \frac{1}{2} [(\cot \varphi_a + \cot \varphi_b + \cot \varphi_c)^2 \\ & \quad - (\cot^2 \varphi_a + \cot^2 \varphi_b + \cot^2 \varphi_c)] \end{aligned}$$

$$\cot \beta_a + \cot \gamma_b + \cot \alpha_c = \cot \gamma_a + \cot \alpha_b + \cot \beta_c = 3K_1 \geq 3\sqrt{3} \quad (3)$$

$$(\cot \alpha_c - \cot \alpha_b)^2 + (\cot \beta_a - \cot \beta_c)^2 + (\cot \gamma_b - \cot \gamma_a)^2 = 4(K_2 - 1) \quad (4)$$

$$(\cot \alpha_c - \cot \alpha_b)^3 (\cot \beta_a - \cot \beta_c)^3 (\cot \gamma_b - \cot \gamma_a)^3 = 24 \cot \varphi_a \cot \varphi_b \cot \varphi_c \quad (5)$$

$$\cot^2 \beta_a + \cot^2 \gamma_b + \cot^2 \alpha_c = \cot^2 \gamma_a + \cot^2 \alpha_b + \cot^2 \beta_c = 10K_2 - 1 \geq 9 \quad (6)$$

$$\frac{1}{\sin^2 \beta_a} + \frac{1}{\sin^2 \gamma_b} + \frac{1}{\sin^2 \alpha_c} = \frac{1}{\sin^2 \gamma_a} + \frac{1}{\sin^2 \alpha_b} + \frac{1}{\sin^2 \beta_c} = 10K_2 + 2 \geq 12 \quad (7)$$

$$\frac{\cos 2\beta_a}{\sin^2 \beta_a} + \frac{\cos 2\gamma_b}{\sin^2 \gamma_b} + \frac{\cos 2\alpha_c}{\sin^2 \alpha_c} = \frac{\cos 2\gamma_a}{\sin^2 \gamma_a} + \frac{\cos 2\alpha_b}{\sin^2 \alpha_b} + \frac{\cos 2\beta_c}{\sin^2 \beta_c} = 10K_2 - 4 \geq 6 \quad (8)$$

$$\cot \alpha_b \cot \alpha_c + \cot \beta_a \cot \beta_c + \cot \gamma_a \cot \gamma_b = 8K_2 + 1 \geq 9 \quad (9)$$

$$\cot \beta_a + \cot \gamma_a + \cot \alpha_b + \cot \gamma_b + \cot \alpha_c + \cot \beta_c = 6K_1 \geq 6\sqrt{3} \quad (10)$$

$$(\cot \beta_a + \cot \gamma_a)^2 + (\cot \alpha_b + \cot \gamma_b)^2 + (\cot \alpha_c + \cot \beta_c)^2 = 36K_2 \geq 36 \quad (11)$$

eşitliğini, Sonuç 2'nin birinci eşitliğini ve Soru 2'yi kullanırsak ikinci iddia bulunur. Üçüncü ve dördüncü iddiaların ispatı ise Soru 2'deki eşitliğin sol tarafında bulunan terimlere sırayla 1 sayısı eklenip ve çıkarılarak elde edilir.

**Soru 3.** Her üçgen aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$\cot^3 \varphi_a + \cot^3 \varphi_b + \cot^3 \varphi_c = 3 \cot \varphi_a \cot \varphi_b \cot \varphi_c.$$

**Çözüm.** Sonuç 2'nin birinci şikkını ve  $x+y+z = 0$  ise  $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$  şartını kullanırız.

**Soru 4.** Her üçgen için aşağıdaki formüller geçerlidir:

$$\cot \alpha_b = \frac{c^2 + 3b^2 - a^2}{4S}, \quad \cot \alpha_c = \frac{b^2 + 3c^2 - a^2}{4S}.$$

Benzer formüller  $\cot \beta_a$ ,  $\cot \beta_c$ ,  $\cot \gamma_a$  ve  $\cot \gamma_b$  için de vardır.

**Çözüm.** ACM ve ABM üçgenlerine kotanjant teoremi uygulanırsa aranan sonuç elde edilir.

Okuyucu aşağıdaki bağıntıları kendisi ispatlayabilir:

$$\begin{cases} \cot \alpha_c - \cot \alpha_b = 2 \cot \varphi_a \\ \cot \beta_a - \cot \beta_c = 2 \cot \varphi_b \\ \cot \gamma_c - \cot \gamma_a = 2 \cot \varphi_c \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \cot \beta_a + \cot \gamma_a = \frac{6a^2}{4S} \\ \cot \alpha_b + \cot \gamma_b = \frac{6b^2}{4S} \\ \cot \alpha_c + \cot \beta_c = \frac{6c^2}{4S} \end{cases} \quad (2)$$