K_n'nin incelenmesini şu teorem veriyor:

Teorem. *Sıfırdan büyük her n doğal sayısı ve her üçgen için $K_n \geq 3^{1-\frac{n}{2}}$ eşitsizliğini sağlanır.*

Kanıt. Her k doğal sayısı için

$$\begin{aligned}&(a-b)^2(a^{k-2}+a^{k-3}b+\cdots+b^{k-2})\\&+(b-c)^2(b^{k-2}+b^{k-3}c+\cdots+c^{k-2})\\&+(c-a)^2(c^{k-2}+c^{k-3}a+\cdots+a^{k-2})\geq 0\end{aligned}$$

geçerlidir, yani

$$\begin{aligned}2(a^k+b^k+c^k) \geq a(b^{k-1}+c^{k-1})+b(a^{k-1}+c^{k-1})\\+c(a^{k-1}+b^{k-1})\end{aligned}$$

olur. Son eşitsizliğin her iki tarafına $a^k+b^k+c^k$ eklenir ve 3'e bölünürse,

$$a^k+b^k+c^k \geq \frac{1}{3}(a+b+c)(a^{k-1}+b^{k-1}+c^{k-1})$$

bulunur. Şimdi bu eşitsizlik $k-1$ için sağ taraftaki ikinci çarpana uygulanır ve bu işlem $k-2$ kere daha tekrarlanırsa,

$$\frac{1}{3}(a^k+b^k+c^k) \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^k \qquad (*)$$

elde edilir. Fakat

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{1}{4}\left[2(p-a)+2(p-b)+2(p-c)+\frac{2p}{3}\right]$$

sağlanır. Bunun sağ tarafına aritmetik ve geometrik ortalama arasındaki bağıntı uygulanırsa,

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[4]{2(p-a)2(p-b)2(p-c)\frac{2p}{3}} = 2\frac{\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}$$

çıkar. $(*)$'dan ve bu son bağıntıdan dolayı

$$\frac{1}{3}(a^k+b^k+c^k) \geq \left(2\frac{\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}\right)^k$$

$$\frac{a^k+b^k+c^k}{(2\sqrt{S})^k} \geq 3^{1-\frac{k}{4}}$$

elde edilir. Şimdi $k=2n$ almak yeter.

PROBLEM SEMİNERLERİ

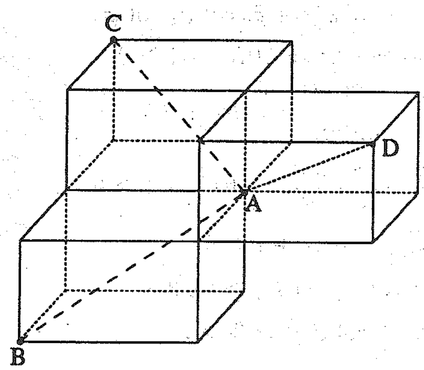
Hazırlayan: Barış Fidan

Bu sayıda, soruları Ekim 1995 sayısında verilen ve Ekim ayında yapılan 95/8 seminerinin çözümlerini veriyoruz.

ÇÖZÜMLER

Problem Semineri 95/8

Yönetim: Y. Selçuk Ateşkan, Caner Kazancı.



1. Doğru, kenarlarla yaptığı dar açılar α, β, γ olan bir dikdörtgenler prizması köşegeni olarak düşünülebilir. Bu biçimdeki benzer üç dikdörtgenler prizmasını şekilde olduğu gibi yerleştirirsek, aynı A köşesinden çıkan köşegenler arasındaki açıların 2α, 2β, 2γ olduğunu görürüz. Bu köşegenlerin geçtiği diğer köşeleri B, C, D ile gösterelim. A'nın BCD üzerindeki izdüşümü A' olsun. $[A'B]$, $[AB]$'nin, $[A'C]$, $[AC]$'nin, $[A'D]$, $[AD]$'nin $[CD]$ üzerindeki izdüşümü olduğundan dolayı

$$|A'B|<|AB|,\quad |A'C|<|AC|,\quad |A'D|<|AD| \quad (1)$$

eşitsizliklerini elde ederiz. ABC ve $A'BC$ üçgenlerinde kosinüs teoremini uygularsak, (1)'den dolayı

$$\widehat{BAC} < \widehat{BA'C},\quad \widehat{CAD} < \widehat{CA'D},\quad \widehat{BAD} < \widehat{BA'D}$$

elde edilir. Buna göre

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma < \widehat{BA'C} + \widehat{CA'D} + \widehat{BA'D} = 360^\circ$$

ve dolayısıyla $\alpha + \beta + \gamma < 180$ olur.

2. Verilen beşgen $A_1A_2A_3A_4A_5$ olsun. Geri kalan 2 köşe seçilenlerin oluşturduğu düzlemin aynı tarafında olmak üzere 3 köşe seçelim. Bu seçimi genel olarak ikiye ayırabiliriz: A_1, A_2, A_3 gibi üç komşu içerenler ve A_2, A_3, A_5 gibi iki komşu içerenler. A_2, A_3, A_5'i seçmiş olalım. Açı ve kenar eşitliğinden

$$|A_1A_3| = |A_2A_4| = |A_3A_5| = A_1A_4| = |A_2A_5| \quad (1)$$

elde ederiz. (1)'e göre $|A_2A_5| = |A_3A_5|$, $|A_1A_2| = |A_4A_3|$, $|A_1A_5| = |A_4A_5|$ ve $|A_1A_3| = |A_4A_2|$ olduğundan ve A_1 ile A_4, $[A_2A_3A_5]$'in aynı tarafında bulunduğundan dolayı A_1 ve A_4, $[A_2A_3]$'ün orta noktasından geçen ve bu doğru parçasına dik olan düzleme göre simetriktir. Dolayısıyla A_1, A_2, A_3, A_4 aynı düzlem üzerinde yer alırlar. Aynı şekilde $|A_1A_4| = |A_2A_4|$, $|A_5A_1| = |A_3A_2|$, $|A_5A_4| = |A_3A_4|$ ve $|A_5A_2| = |A_3A_1|$ olduğundan dolayı A_3, A_5, A_1, A_2'nin aynı düzlem üzerinde bulunduğunu elde ederiz. Buna göre beşgenimiz düzlemseldir. A_1, A_2, A_3'ün seçilmesi durumunda da benzer bir biçimde sonuca ulaşılır.

3. Birbirine dik düzlemler $x = 0$, $y = 0$ ve $z = 0$ düzlemleri olmak üzere merkezi O olan bir kartezyen koordinat sistemi tanımlayalım. Söz konusu çemberin üzerinde yer aldığı düzlemin $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$ düzlemleriyle yaptığı açılar sırayla α, β, γ olsun. Bu durumda çemberin O_1 merkezinin kordinatları, R çemberin sabit yarıçapı olmak üzere, $(R\sin\beta, R\sin\gamma, R\sin\alpha)$'dır. O'dan çemberin düzlemine dik olan bir doğru çizelim. Bu doğrunun x, y, z eksenleriyle yaptığı açılar sırayla β, γ, α olacaktır. Doğrunun üzerinde bulunan O'dan 1 uzaklıktaki nokta için

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

elde ederiz. Dolayısıyla,

$$|OO_1|^2 = R^2(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma) = 2R^2$$

eşitliği geçerlidir ve O_1, O merkezli ve $R\sqrt{2}$ yarıçaplı küre üzerinde yer almak zorundadır. Diğer taraftan, O_1'in koordinat düzlemlerine uzaklıkları R'yi geçemez. Sonuç olarak geometrik yer, $|OO_1| = R\sqrt{2}$ yarıçaplı küre yüzeyi üzerinde, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = R$, $y = R$, $z = R$ düzlemleri tarafından sınırlanan küresel üçgendir.

4. En genel durum olarak cisimlerin üzerinde hareket ettikleri doğruların aykırı veya paralel olması durumunu inceleyelim. a ve b cisimlerinin herhangi bir andaki konumlarını A ve B ile, v_a/v_b oranını k ile gösterelim. M ve N, $|AM| : |MB| = |AN| : |NB| = k$ koşulunu sağlayan ve AB doğrusu üzerinde yer alan iki nokta ve $M \in [AB]$ olsun. $[MN]$'nin orta noktasını O ile, cisimlerin başlangıç konumlarını da A_0 ve B_0 ile gösterelim. Elimizdeki noktaları verilen iki doğruya paralel olan bir düzlem üzerine, A_0B_0 doğrusuna paralel biçimde yansıtalım. A_0 ve B_0'ın yansıması C ve A, B, M, N, O'nun yansımaları sırayla A', B', M', N', O' olsun. M' ve N', $A'B'C$ üçgeninin C açısının iç ve dış açıortaylarının üzerinde yer alacaktır. Dolayısıyla $\sphericalangle M'CN' = 90^\circ$'dir. Ayrıca, A' ve B' sabit doğrular üzerinde hareket ettiklerinden dolayı, M' ve N' birbirine C noktasında dik iki doğru üzerinde hareket edecektir. O' de sabit bir doğru üzerinde yer alacaktır. Buna göre M, N ve O'nun geometrik yerleri, açık olarak verilen doğrulara paralel olan düzlemler üzerinde yer aldığından dolayı, M, N, O noktaları da sabit doğrular üzerinde hareket etmektedir. Aynı zamanda M ve N noktalarının üzerinde bulundukları doğrular birbirine diktir, fakat bu doğrular kesişmezler. Bu doğruların ikisini de dik kesen doğru (P ve Q bu doğrular üzerinde bulunmak üzere) PQ olsun. Uç noktaları doğrular üzerinde yer alan bir doğru parçasını çap olarak kabul eden her küre, P ve Q çapı 90° açıyla göreceğinden dolayı, bu noktaları üzerinde bulundurur (1). $[MN]$'nin yer aldığı herhangi bir düzlem üzerinde, $|AL| : |LB| = k$ koşulunu sağlayan L noktalarının geometrik yeri $[MN]$ çaplı Appolonius çemberidir. Dolayısıyla, uzaydaki böyle L noktalarının geometrik yeri $[MN]$ çaplı küredir (2). (1) ve (2)'ye göre P (veya Q) noktasının O'nun hareket doğrusu etrafında döndürülmesiyle elde edilen çember, söz konusu çemberdir.

Cisimlerin hareket doğrularının kesişmesi durumunun incelenmesi biraz daha farklıdır . . .