BİR MARKOV ZİNCİRİ OLARAK *GİZLİ HEDEF* *

Barış Tan †

Bu çalışmada Markov zincirleri, popüler bir strateji oyunu olan *Gizli Hedef (Risk)*'in savaş mekanizmasının modellenmesinde kullanılmıştır. Bu model kullanılarak, saldıran ve savunan tarafın ordu sayısına bağlı olarak kazanma ve kaybetme olasılıkları bulunmuştur. Aynı model savaş sonuna kadar beklenilen kayıp sayısının bulunmasında da kullanılabilir.

Andrey Andreyeviç Markov (1856–1922) birbirine ilişik olayların rastsal süreçlerle incelenmesinde önemli çalışmalar yapmış bir Rus bilim adamıdır. Onun başlattığı Markov zincirleri A. N. Kolmogorov tarafından geliştirilmiştir. Günümüzde Markov süreçleri eğitim, pazarlama, sağlık hizmetleri, finans, muhasebe, dilbilim, üretim modellemesi, ses tanımlama, görüntü tanımlama ve işleme gibi çok değişik konularda uygulama olanakları bulmakta ve kullanılmaktadır.

Bu tür "gerçek hayat" uygulamalarından başka, Markov zincirleri birçok kişi tarafından sıkça oynanan oyunların modellenmesinde de kullanılabilir. Örneğin Ash & Bishop, *Borsa (Monopoly)* oyununda her kareye uzun zamanda gelme olasılıklarını hesaplamış [1] ve bu sonuçlar kullanılarak oyunu oynamaktan zevk alan ve sıkça oynayan kişiler içi n *çok yararlı* olacak bir sonuç elde edilmiştir: Otel ve ev kurmak için en kârlı yer portakal renkli caddelerdir [4].

Bu yazıda Markov zincirlerinin yurdumuzda ve dünyada yaygın olarak oynanan başka bir strateji oyunu olan *Gizli Hedef (Risk)* oyununun savaş mekanizmasını modelleyeceğiz. Cevap vermeye çalışacağımız problem gene bu oyunu sıkça oynayan kişiler için *çok yararlı* olacak bir problemdir. Saldıran tarafın ve savunan tarafın ordularının sayılarına bağlı olarak saldıran tarafın bir bölgeyi ele geçirme olasılığı nedir?

Oyunun Kuralları ve Savaş Mekanizması

Kısaca *Gizli Hedef* oyununu özetlersek, bu oyun 42 bölgeye ayrılmış bir dünya haritası üzerinde oynanır. Oyunun amacı her oyuncunun kendine düşen *gizli hedef* kartında yazılı olan ve genelde başka bir gücü ya da belli bölgeleri ele geçirmek olan görevi yerine getirmektir [3].

Oyunun savaş kısmı zar atarak yapılır. Bir bölgeden diğer bir düşman bölgesine hücum edebilmek için oyuncunun, hücum edeceği kendi bölgesinde en az 2 ordusunun bulunması gereklidir. Piyonlar, kara ordusu veya deniz filosu gibi kullanılabilir. Düşman bölgelerine hücum edebilmek için hücum eden tarafın ya hücum ettiği bölge ile ortak sınırı olması ya da savaşmak istediği bölgeye çizgilerle bağlı olması gereklidir.

Saldıran taraf en az bir piyonu kendi bölgesinde bırakmak zorundadır. Saldıran ve savunan tarafın piyon sayılarına göre, saldıran en çok üç, savunan en çok iki zar atar. Piyon sayısına göre tarafların atacağı zar sayısı Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1. Piyon sayısına göre tarafların atacağı zar sayısı

	Piyon Sayısı		Atılan Zar	
Durum	Saldıran	Savunan	Saldıran	Savunan
I	1	1	1	1
II	2	1	2	1
III	≥ 3	1	3	1
IV	1	≥ 2	1	2
V	2	≥ 2	2	2
VI	≥ 3	≥ 2	3	2

* Bu yazı dergi hakemlerinin titizliği nedeniyle oldukça gecikti. Barış Tan'dan ve okurlarımızdan özür dileriz.

† Koç Üniversitesi İktisadi ve İdari İlimler Fakültesi öğretim üyesi

Tablo 1'de saldıran tarafın piyon sayısına, kendi bölgesinde bırakmak zorunda olduğu bir piyon dahil edilmemiştir. Örneğin bu tabloda verilen VI. durum, saldıranın üç veya üçten fazla (dolayısıyla toplam dört veya dörtten fazla) piyonu olduğunda üç, savunan tarafın da iki veya ikiden fazla piyonu olduğunda iki zar atacağını göstermektedir.

En büyük zar atan kazanır ve diğer tarafın bir piyonu oyundan çıkartılır. Eşitlik halinde savunmada olan kazanır. Birden fazla zar atıldığında hangi tarafın kazanacağını anlamak için hücum edenin en büyük zarı ile savunmanın ilk en büyük zarı karşılaştırılır. Aşağıda bazı örnekler verilmiştir.

Saldıran tarafın attığı zarlar	Savunan tarafın attığı zarlar	Saldıran tarafın kaybettiği ordu	Savunan tarafın kaybettiği ordu
5, 4, 3	6, 3	1	1
3, 3, 1	4	1	0
3, 2	3, 3	2	0
5, 2	5	1	0

Bir sonraki bölümde, saldıran tarafın ve savunan tarafın piyon sayılarına bağlı olarak saldıran tarafın bir bölgeyi ele geçirme olasılığının ne olacağını bulabileceğimiz Markov zinciri ne dayalı bir matematiksel model sunulmaktadır.

Bir Durum Uzayı Modeli

Saldıran tarafın A, savunan tarafın D piyonu olsun. Savaş başladıktan n el sonra saldıran ve savunan tarafın elinde kalan piyon sayısını $X_n = (a_n, d_n)$ $(a_n \geq 0, d_n \geq 0)$ durum vektörü ile belirtelim.

Eğer saldıran tarafın veya savunan tarafın piyon sayısı sıfıra düşerse o taraf savaşı kaybeder. Savaşın bitme durumlarını durum vektörlerini kullanarak şöyle ifade edebiliriz: Eğer $X_n = (0, d_n)$ ve $d_n > 0$ ise, saldıran taraf savaşı kaybeder. Eğer $X_n = (a_n, 0)$ ve $a_n > 0$ ise, saldıran taraf savaşı kazanır ve o bölgeyi ele geçirir.

Savaşın herhangi bir elinin sonunda saldıran tarafın ve savunan tarafın kaçar piyonu olduğunu bilirsek, daha önce savaşın nasıl geliştiğine bakmaksızın, bir sonraki elin sonunda her iki tarafın kaçar piyonunun kalacağının olasılığını bulabiliriz. Başka bir deyişle bu modelde Markov özelliğini görebiliriz:

$$\begin{aligned} &P[X_{n+1} = (a_{n+1}, d_{n+1}) \mid X_n = (a_n d_n), \\ &\qquad X_{n-1} = (a_{n-1}, d_{n-1}), \ldots, X_0 = (A, D)] \\ &= P[X_{n+1} = (a_{n+1}, d_{n+1}) \mid X_n = (a_n, d_n)] \quad (1) \end{aligned}$$

Burada $P[s \mid t]$, t koşulu verildiğinde s koşulunun gerçekleşmesi olasılığını göstermektedir. Buna göre savaşın başlamasından sonra kaç el geçtiğine bakmaksızın durum vektörü i'den diğer bir durum vektörü j'ye geçişme olasılıkları p_{ij}'leri, $\underline{P} = \{p_{ij}\}$ *durum geçişme matrisi* olarak yazabiliriz.

Durum uzayında $X_n = (0, d_n)$ ve $d_n > 0$ koşulunu sağlayan durumların hepsine birden *saldıran taraf kaybeder* (K) durumu, $X_n = (a_n, 0)$ ve $a_n > 0$ koşulunu sağlayan durumların hepsine birden *saldıran taraf savaşı kazanır* (Z) durumu diyelim. Durum uzayında toplam $A \cdot D + 2$ değişik durum vardır. Öyleyse durum geçişme matrisi $\underline{P}$, $A \cdot D + 2$ satırlı ve $A \cdot D + 2$ sütunludur. Savaş (A, D) durumunda başladığında eninde sonunda ya K ya da Z durumunda son bulacaktır. Başka bir deyişle saldıran taraf ya kazanır ya kaybeder. Dolayısıyla K ve Z Markov terminolojisinde *yutan* durumlardır. Geriye kalan $A \cdot D$ durum ise *geçici*dir. Yani süreç (A, D) durumunda başladığında bir süre geçici durumlarda dolaştıktan sonra yutan durumların birisinde son bulacaktır.

Şimdi durumları

$$\{(1,1), (1,2), \ldots, (1, D), (2,1), \ldots, (2, D), \\ \ldots, (A,1), (A,2), \ldots, (A, D), K, Z\}$$

şeklinde sıralayalım. Bu sıralamaya göre durum geçişme matrisi $\underline{P}$'yi geçici ve yutan durumların kartezyen çarpımından oluşan dört alt matrise ayıralım:

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} \underline{Q} & \underline{R} \\ \underline{O} & \underline{I} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Q altmatrisi $A \cdot D$ satırı ve $A \cdot D$ sütunu olan ve elemanları geçici durumlardan gene geçici durumlara geçme olasılıkları olan bir matris, R altmatrisi ise $A \cdot D$ satırı ve 2 sütunu olan ve elemanları geçici durumlardan yutan durumlara geçme olasılıkları olan bir matristir. Benzer şekilde O, 2 satırı ve $A \cdot D$ sütunu olan sıfır matrisi ve I, ikiye ikilik birim matristir.

Savaş başladıktan n el sonra geçici durum i'den başlayıp yutan durum j'ye geçme olasılığı $f_{ij}^{(n)}$ olsun ($i = 1, 2, \ldots, A \cdot D$, $j = K, Z$). Elemanları $f_{ij}^{(n)}$ olan $F^{(n)}$ matrisini Q ve R altmatrislerinden hesaplayabiliriz [2]. Savaşın n'yinci elinin sonunda yutan durumların birisine geçiş olduğuna göre süreç $n-1$ defa geçici durumlarda dolaşacak ve bir sonraki elde yutan durumların birisine geçecektir:

$$F^{(n)} = Q^{n-1}R \tag{3}$$

Savaş ya bir el sonra, ya iki el sonra, ya da daha sonra sona erecektir. Öyleyse beklenen yutan durumlara geçme olasılıklarını (3) denkleminin sonsuz toplamından bulabiliriz:

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} Q^{n-1}R = (I-Q)^{-1}R \tag{4}$$

F matrisinin elemanları $0 < a \leq A$ ve $0 < d \leq D$ olmak üzere her (a, d) durumunda başlandığında yutan durumların her birine geçme olasılıklarıdır.

Öyleyse eğer durum geçişme olasılıklarını bulursak, saldıran tarafın A ve savunan tarafın D piyonu olması durumunda saldıran ve savunan tarafın kazanma kaybetme olasılıklarını (4) denkleminden hesaplayabiliriz. Bir sonraki bölümde bu olasılıkları bulacağız.

Durum Geçişme Olasılıklarının Bulunması

Oyunun kurallarına ve savaş mekanizmasına bakarsak saldıran ve savunan tarafın attığı zarlar bakımından altı değişik kombinasyonu göz önüne almamız gerektiğini görürüz. Bu kombinasyonlar Tablo 1'de verilmişti.

Her durum için ayrı ayrı durum geçişme olasılıklarını bulmadan önce bir, iki veya üç zar atıldığında zarların en büyüğünün ve ondan sonra gelenin (iki ve üç zar atıldığı durumlarda) olasılık dağılım fonksiyonlarını bulmamız gerekir.

1. *Bir zar atıldığında* T zarın üst yüzüne gelen noktaların sayısı olsun. T rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu şöyledir:

$T=t$	1	2	3	4	5	6
$f(t)=P[T=t]$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

(5)

2. *İki zar atıldığında* T_1 birinci zarın, T_2 ikinci zarın üst yüzüne gelen noktaların sayısı olsun. $T^{(1)} = \max\{T_1, T_2\}$, $T^{(2)}$ de $T^{(1)}$'den sonra gelen en büyük sayı olsun. Bu durumda $T^{(2)} = \min\{T_1, T_2\}$ olur. $T^{(1)}$ ve $T^{(2)}$ rastgele değişkenlerinin olasılık fonksiyonları sırayla şöyledir:

$T^{(1)}=t$	1	2	3	4	5	6
$g_1(t)=P[T^{(1)}=t]$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

(6)

$T^{(2)}=t$	1	2	3	4	5	6
$g_2(t)=P[T^{(2)}=t]$	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36

(7)

3. *Üç zar atıldığında* T_1 birinci zarın, T_2 ikinci zarın, T_3 üçüncü zarın üst yüzüne gelen noktaların sayısı olsun. $T^{(1)} = \max\{T_1, T_2\}$, $T^{(2)}$ de $T^{(1)}$'den sonra gelen en büyük sayı olsun. $T^{(1)}$ ve $T^{(2)}$ rastgele değişkenlerinin olasılık fonksiyonları sırayla şöyledir:

$T^{(1)}=t$	1	2	3	4	5	6
$h_1(t)=P[T^{(1)}=t]$	1/216	7/216	19/216	7/36	9/36	11/36

(8)

$T^{(2)}=t$	1	2	3	4	5	6
$h_2(t)=P[T^{(2)}=t]$	16/216	40/216	52/216	52/216	40/216	16/216

(9)

Şimdi her bir durum için durum geçişme olasılıklarını bulabiliriz.

I. Saldıran ve savunan bir zar atar. Y saldıranın, Z savunanın attığı zarın üst yüzündeki noktaların sayısı olsun. Saldıranın attığı zarın savunanın attığından büyük olması durumunda ($Y > Z$), savunan tek piyonunu da kaybeder ve saldıran savaşı kazanır. Aksi halde saldıran savaşı kaybeder. Öyleyse $(1,1)$ durumundan $(1,0)$ ve $(0,1)$ durumlarına geçme olasılıkları

$$P[X_{n+1} = (1,0) \mid X_n = (1,1)] = P[Y > Z]$$
$$P[X_{n+1} = (0,1) \mid X_n = (1,1)] = P[Y \leq Z]$$

olur. Y ve Z rastgele değişkenlerinin olasılık fonksiyonları $f(y)$ ve $f(z)$ aynıdır ve (5) denkleminde verilmiştir. Y ve Z birbirinden bağımsız olduğuna göre

$$P[Y = y, Z = z] = f(y)f(z)$$

sağlanır. Buna göre

$$P[Y>Z] = \sum_{y=2}^{6}\sum_{z=1}^{y-1} P[Y=y, Z=z] = \frac{15}{36} = 0.417$$
$$P[Y \leq Z] = 1 - \frac{15}{36} = \frac{21}{36} = 0.583$$

bulunur. Dolayısıyla

$$P[X_{n+1} = (1,0) \mid X_n = (1,1)] = 0.417$$
$$P[X_{n+1} = (1,0) \mid X_n = (1,1)] = 0.583$$

elde edilir.

II. Saldıran iki ve savunan bir zar atar. Y_1 ve Y_2 saldıranın, Z de savunanın attığı zarların üst yüzündeki noktaların sayısı olsun. Y de $\max\{Y_1, Y_2\}$ olsun. Saldıranın attığı zarların en büyüğünün savunanın attığından büyük olması durumunda ($Y > Z$) savunan tek piyonunu da kaybeder ve saldıran savaşı kazanır. Aksi halde saldıran bir piyon kaybeder ve tek piyonu kalır. Öyleyse $(2,1)$ durumundan $(2,0)$ ve $(1,1)$ durumlarına geçme olasılıkları

$$P[X_{n+1} = (2,0) \mid X_n = (2,1)] = P[Y > Z]$$
$$P[X_{n+1} = (1,0) \mid X_n = (2,1)] = P[Y \leq Z]$$

olur. Y rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu (7) denkleminde verilen $g_1(y)$'dir. Z rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu ise (5) denkleminde verilen $f(z)$'dir. Y ve Z birbirinden bağımsız olduğuna göre

$$P[Y = y, Z = z] = g_1(y)f(z)$$

yazılabilir. Buna göre

$$P[Y>Z] = \sum_{y=2}^{6}\sum_{z=1}^{y-1} P[Y=y, Z=z] = \frac{125}{216} = 0.578$$
$$P[Y \leq Z] = 1 - 0.578 = 0.422,$$

ve dolayısıyla

$$P[X_{n+1} = (2,0) \mid X_n = (2,1)] = 0.578$$
$$P[X_{n+1} = (0,1) \mid X_n = (1,1)] = 0.422$$

bulunur.

III. Saldıran üç ve savunan bir zar atar. Y_1, Y_2 ve Y_3 saldıranın, Z de savunanın attığı zarların üst yüzündeki noktaların sayısı olsun. Y de $\max\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ olsun. Saldıranın attığı zarların en büyüğünün savunanın attığından büyük olması durumunda ($Y > Z$) savunan tek piyonunu da kaybeder ve saldıran savaşı kazanır. Aksi halde saldıran bir piyon kaybeder. Öyleyse (a,1) ($a \geq 3$) durumundan $(a,0)$ ve $(a-1,1)$ durumlarına geçme olasılıkları $a \geq 3$ iken

$$P[X_{n+1} = (a,0) \mid X_n = (a,1)] = P[Y > Z]$$
$$P[X_{n+1} = (a-1,1) \mid X_n = (a,1)] = P[Y \leq Z]$$

olur. Y rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu (8) denkleminde verilen $h_1(y)$'dir. Z rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu ise (5) denkleminde verilen $f(z)$'dir. Y ve Z birbirinden bağımsız olduğuna göre

$$P[Y = y, Z = z] = h_1(y)f(z)$$

geçerlidir. Buna göre

$$P[Y > Z] = \sum_{y=2}^{6}\sum_{z=1}^{y-1} P[Y = y, Z = z] = 0.659$$
$$P[Y \leq Z] = 1 - 0.659 = 0.341,$$

ve dlayısıyla $a \geq 3$ için

$$P[X_{n+1} = (a,0) \mid X_n = (a,1)] = 0.659$$
$$P[X_{n+1} = (a-1,1) \mid X_n = (a-1,1)] = 0.341$$

elde edilir.

IV. Saldıran bir ve savunan iki zar atar. Y saldıranın, Z_1 ve Z_2 de savunanın attığı zarların üst yüzündeki noktaların sayısı olsun. Z de $\max\{Z_1, Z_2\}$ olsun. Saldıranın attığı zarın savunanın attığı zarların en büyüğünden büyük olması durumunda ($Y > Z$) savunan bir piyonunu kaybeder. Aksi halde saldıran tek piyonunu kaybederek savaşı kaybeder. Öyleyse $(1, d)$ ($d \geq 2$) durumundan $(0, d)$ ve $(1, d-1)$ durumlarına geçme olasılıkları

$$P[X_{n+1} = (0, d) \mid X_n = (1, d)] = P[Y > Z]$$
$$P[X_{n+1} = (d-1, d) \mid X_n = (1, d)] = P[Y \leq Z]$$

olur. Y rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu (5) denkleminde verilen $f(y)$'dir. Z rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu da (7) denkleminde verilen $g_1(z)$'dir. Y ve Z birbirinden bağımsız olduğuna göre

$$P[Y = y, Z = z] = f(y)g_1(z)$$

gerçeklenir. Buna göre

$$P[Z > Y] = \sum_{z=2}^{6} \sum_{y=1}^{z-1} P[Y = y, Z = z] = 0.254$$
$$P[Z \leq Y] = 1 - 0.254 = 0.746$$

ve dolayısıyla $d \geq 2$ için

$$P[X_{n+1} = (0, d) \mid X_n = (1, d)] = 0.254$$
$$P[X_{n+1} = (1, d-1) \mid X_n = (1, d)] = 0.746$$

olarak hesaplanır.

V. Saldıran iki ve savunan iki zar atar. Y_1 ve Y_2 saldıranın, Z_1 ve Z_2 de savunanın attığı zarların üst yüzündeki noktaların sayısı olsun. $Y^{(1)} = \max\{Y_1, Y_2\}$ ve $Z^{(1)} = \max\{Z_1, Z_2\}$ olsun. $Y^{(2)} = \min\{Y_1, Y_2\}$ ve $Z^{(2)} = \min\{Z_1, Z_2\}$ olsun. Saldıranın attığı zarların en büyüğünün savunanın attığı zarların en büyüğünden büyük olması ve saldıranın attığı ikinci en büyük zarın savunanın attığı ikinci en büyük zardan büyük olması durumunda ($Y^{(1)} > Z^{(1)}$ ve $Y^{(2)} > Z^{(2)}$) savunan iki piyonunu kaybeder. Tam aksi durumda (($Y^{(1)} \leq Z^{(1)}$ ve $Y^{(2)} \leq Z^{(2)}$)) saldıran iki piyonunu da kaybederek savaşı kaybeder. Bunun dışındaki durumlarda her iki taraf da birer piyonunu kaybeder. Öyleyse $(2, d)$ ($d \geq 2$) durumundan $(0, d)$, $(2, d-2)$ ve $(1, d-1)$ durumlarına geçme olasılıkları

$$P[X_{n+1} = (2, d-2) \mid X_n = (2, d)] = P[Y^{(1)} > Z^{(1)}] \cdot P[Y^{(2)} > Z^{(2)}]$$
$$P[X_{n+1} = (0, d) \mid X_n = (2, d)] = P[Y^{(1)} \leq Z^{(1)}] \cdot P[Y^{(2)} \leq Z^{(2)}]$$
$$P[X_{n+1} = (1, d-1) \mid X_n = (2, d)] = 1 - P[X_{n+1} = (0, d) \mid X_n = (2, d)] - P[X_{n+1} = (2, d-2) \mid X_n = (2, d)]$$

olur. $Y^{(1)}$ ve $Z^{(1)}$ rastgele değişkenlerinin olasılık fonksiyonları (6) denkleminde verilen $g_1(y)$'dir. $Y^{(2)}$ ve $Z^{(2)}$ rastgele değişkenlerinin olasılık fonksiyonları (7) denkleminde verilen $g_2(y)$'dir. $Y^{(1)}$ ve $Z^{(1)}$, $Y^{(2)}$ ve $Z^{(2)}$ birbirlerinden bağımsız olduğuna göre

$$P[Y^{(1)} = y, Z^{(1)} = z] = g_1(y)g_1(z)$$
$$P[Y^{(2)} = y, Z^{(2)} = z] = g_2(y)g_2(z)$$

doğrudur. Buna göre

$$P[Y^{(1)} > Z^{(1)}] = \sum_{y=2}^{6} \sum_{z=1}^{y-1} P[Y^{(1)} = y, Z^{(1)} = z] = 0.389$$
$$P[Y^{(1)} \leq Z^{(1)}] = 1 - P[Y^{(1)} > Z^{(1)}] = 0.611$$
$$P[Y^{(2)} > Z^{(2)}] = \sum_{y=2}^{6} \sum_{z=1}^{y-1} P[Y^{(2)} = y, Z^{(2)} = z] = 0.389$$
$$P[Y^{(2)} \leq Z^{(2)}] = 1 - P[Y^{(2)} > Z^{(2)}] = 0.611$$

bulunur. Sonuç olarak $d \geq 2$ durumunda

$$P[X_{n+1} = (2, d-2) \mid X_n = (2, d)] = P[Y^{(1)} > Z^{(1)}] \cdot P[Y^{(2)} > Z^{(2)}] = (0.389)(0.389) = 0.152$$
$$P[X_{n+1} = (0, d) \mid X_n = (2, d)] = P[Y^{(1)} \leq Z^{(1)}] \cdot P[Y^{(2)} \leq Z^{(2)}] = (0.611)(0.611) = 0.373$$
$$\begin{aligned} P[X_{n+1} = (1, d-1) \mid X_n = (2, d)] &= 1 - P[X_{n+1} = (0, d) \mid X_n = (2, d)] \\ &\quad - P[X_{n+1} = (2, d-2) \mid X_n = (2, d)] \\ &= 1 - 0.152 - 0.372 = 0.475 \end{aligned}$$

elde edilir.

VI. Saldıran üç ve savunan iki zar atar. Y_1, Y_2, Y_3 saldıranın, Z_1 ve Z_2 de savunanın attığı zarların üst yüzündeki noktaların sayısı olsun. $Y^{(1)} = \max\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ ve $Z^{(1)} = \max\{Z_1, Z_2\}$ olsun. $Y^{(2)}$, Y_1, Y_2, Y_3'ün ikinci en büyüğü ve $Z^{(2)} = \min\{Z_1, Z_2\}$ olsun. Saldıranın attığı zarların en büyüğünün savunanın attığı zarların en büyüğünden büyük olması ve saldıranın attığı ikinci en büyük zarın savunanın attığı ikinci en büyük zardan büyük olması durumunda ($Y^{(1)} > Z^{(1)}$ ve $Y^{(2)} > Z^{(2)}$) savunan iki piyonunu kaybeder. Tam aksi durumda ($Y^{(1)} \leq Z^{(1)}$ ve $Y^{(2)} \leq Z^{(2)}$) saldıran iki piyonunu kaybeder. Bunun dışındaki durumlarda her iki taraf da birer piyonunu kaybeder. Öyleyse (a, d) ($a \geq 3$, $d \geq 2$) durumundan $(a-2, d)$, $(a-1, d-1)$ ve $(a, d-2)$ durumlarına geçme olasılıkları

$$\begin{aligned}
P[X_{n+1} = (a, d-2) \mid X_n = (a, d)] &= P[Y^{(1)} > Z^{(1)}] \cdot P[Y^{(2)} > Z^{(2)}] \\
P[X_{n+1} = (a-2, d) \mid X_n = (a, d)] &= P[Y^{(1)} \leq Z^{(1)}] \cdot P[Y^{(2)} \leq Z^{(2)}] \\
P[X_{n+1} = (a-1, d-1) \mid X_n = (a, d)] &= 1 - P[X_{n+1} = (a, d-2) \mid X_n = (a, d)] \\
&\quad - P[X_{n+1} = (a-2, d) \mid X_n = (a, d)]
\end{aligned}$$

olur. $Y^{(1)}$ ve $Y^{(2)}$ rastgele değişkenlerinin olasılık fonksiyonları (8) ve (9) denklemlerinde verilen $h_1(y)$ ve $h_2(y)$'dir. $Z^{(1)}$ ve $Z^{(2)}$ rastgele değişkenlerinin olasılık fonksiyonları ise (6) ve (7) denklemlerinde verilen $g_1(y)$ ve $g_2(y)$'dir. $Y^{(1)}$ ve $Z^{(1)}$ ile $Y^{(2)}$ ve $Z^{(2)}$ birbirlerinden bağımsız olduğuna göre

$$P[Y^{(1)} = y, Z^{(1)} = z] = g_1(y) g_1(z)$$
$$P[Y^{(2)} = y, Z^{(2)} = z] = g_2(y) g_2(z)$$

sağlanır. Buna göre

$$P[Y^{(1)} > Z^{(1)}] = \sum_{y=2}^{6} \sum_{z=1}^{y-1} P[Y^{(1)} = y, Z^{(1)} = z] = 0.471$$

$$P[Y^{(1)} \leq Z^{(1)}] = 1 - P[Y^{(1)} > Z^{(1)}] = 0.529$$

$$P[Y^{(2)} > Z^{(2)}] = \sum_{y=2}^{6} \sum_{z=1}^{y-1} P[Y^{(2)} = y, Z^{(2)} = z] = 0.551$$

$$P[Y^{(2)} \leq Z^{(2)}] = 1 - P[Y^{(2)} > Z^{(2)}] = 0.449$$

bulunur. Öyleyse $a \geq 3$ ve $d \geq 2$ için

$$\begin{aligned}
P[X_{n+1} = (a, d-2) \mid X_n = (2, d)] &= P[Y^{(1)} > Z^{(1)}] \cdot P[Y^{(2)} > Z^{(2)}] = (0.417)(0.551) = 0.259 \\
P[X_{n+1} = (a-2, d) \mid X_n = (2, d)] &= P[Y^{(1)} \leq Z^{(1)}] \cdot P[Y^{(2)} \leq Z^{(2)}] = (0.529)(0.449) = 0.237 \\
P[X_{n+1} = (a-1, d) \mid X_n = (2, d)] &= 1 - P[X_{n+1} = (0, d) \mid X_n = (2, d)] \\
&\quad - P[X_{n+1} = (2, d-2) \mid X_n = (2, d)] \\
&= 1 - 0.259 - 0.237 = 0.504
\end{aligned}$$

elde edilir. Hesapladığımız durum geçişme olasılıklarını toplu halde yazalım ($a \geq 3$ ve $d \geq 2$):

$$P[X_{n+1} = (1, 0) \mid X_n = (1, 1)] = 0.417 \tag{10}$$

$$P[X_{n+1} = (0, 1) \mid X_n = (1, 1)] = 0.583 \tag{11}$$

$$P[X_{n+1} = (2, 0) \mid X_n = (2, 1)] = 0.578 \tag{12}$$

$$P[X_{n+1} = (0, 1) \mid X_n = (1, 1)] = 0.422 \tag{13}$$

$$P[X_{n+1} = (a, 0) \mid X_n = (a, 1)] = 0.659 \tag{14}$$

$$P[X_{n+1} = (a-1, 1) \mid X_n = (a-1, 1)] = 0.341 \tag{15}$$

$$P[X_{n+1} = (0, d) \mid X_n = (1, d)] = 0.254 \tag{16}$$

$$P[X_{n+1} = (1, d-1) \mid X_n = (1, d)] = 0.746 \tag{17}$$

$$P[X_{n+1} = (2, d-2) \mid X_n = (2, d)] = 0.152 \tag{18}$$

$$P[X_{n+1} = (0, d) \mid X_n = (2, d)] = 0.373 \tag{19}$$

$$P[X_{n+1} = (1, d-1) \mid X_n = (2, d)] = 0.475 \tag{20}$$

$$P[X_{n+1} = (a, d-2) \mid X_n = (a, d)] = 0.259 \tag{21}$$

$$P[X_{n+1} = (a-2, d) \mid X_n = (a, d)] = 0.237 \tag{22}$$

$$P[X_{n+1} = (a-1) \mid X_n = (a, d)] = 0.504 \tag{23}$$

Tablo 2. Saldıran tarafın 6, savunan tarafın 4 piyonu olması durumunda durum geçişim matrisi

	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	Z	K
(1,1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.42	0.58
(1,2)	0.25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.75
(1,3)	0	0.25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.75
(1,4)	0	0	0.25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.75
(2,1)	0.42	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.58	0
(2,2)	0.48	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.15	0.37
(2,3)	0	0.48	0	0	0.15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.37
(2,4)	0	0	0.48	0	0	0.15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.37
(3,1)	0	0	0	0	0.34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.66	0
(3,2)	0	0.24	0	0	0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.26	0
(3,3)	0	0	0.24	0	0	0.5	0	0	0.26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(3,4)	0	0	0	0.24	0	0	0.5	0	0	0.26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(4,1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0.34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.66	0
(4,2)	0	0	0	0	0	0.24	0	0	0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.26	0
(4,3)	0	0	0	0	0	0	0.24	0	0	0.5	0	0	0.26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(4,4)	0	0	0	0	0	0	0	0.24	0	0	0.5	0	0	0.26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(5,1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.66	0
(5,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.24	0	0	0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.26	0
(5,3)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.24	0	0	0.5	0	0	0.26	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(5,4)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.24	0	0	0.5	0	0	0.26	0	0	0	0	0	0	0	0
(6,1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.34	0	0	0	0	0	0	0	0.66	0
(6,2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.24	0	0	0.5	0	0	0	0	0	0	0	0.26	0
(6,3)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.24	0	0	0.5	0	0	0.26	0	0	0	0	0
(6,4)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.24	0	0	0.5	0	0	0.26	0	0	0	0
Z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
K	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

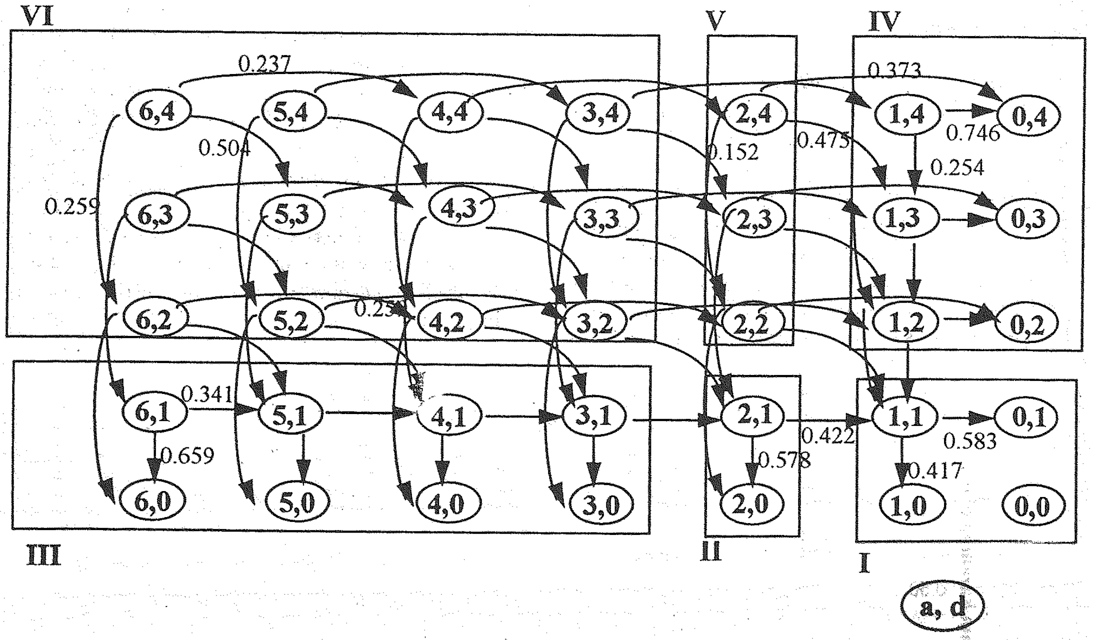
Tablo 3. Saldıran tarafın 30 veya daha az, savunan tarafın 30 veya daha az piyonu olması durumunda saldıran tarafın kazanma olasılığı

D \ A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0					1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0.4	0.8	0.9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0.1	0.4	0.7	0.8	0.9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	0	0.1	0.3	0.4	0.6	0.7	0.8	0.9	0.9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	0	0	0.1	0.3	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	0	0	0.1	0.2	0.3	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.9	0.9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	0	0	0	0.1	0.2	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.8	0.9	0.9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	0	0	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.8	0.9	0.9	0.9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	0	0	0	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.8	0.9	0.9	0.9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	0	0	0	0	0.1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.8	0.9	0.9	0.9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	0	0	0	0	0	0.1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.7	0.8	0.9	0.9	0.9	0.9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
12	0	0	0	0	0	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.7	0.8	0.8	0.9	0.9	0.9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	0	0	0	0	0	0	0.1	0.1	0.2	0.3	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.7	0.8	0.8	0.9	0.9	0.9	1	1	1	1	1	1	1	1	1
14	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.1	0.2	0.3	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.7	0.8	0.8	0.9	0.9	0.9	1	1	1	1	1	1	1	1
15	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.4	0.5	0.6	0.7	0.7	0.8	0.8	0.9	0.9	0.9	0.9	1	1	1	1	1	1
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	0.4	0.4	0.5	0.6	0.7	0.7	0.8	0.8	0.9	0.9	0.9	0.9	1	1	1	1	1
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	0.4	0.4	0.5	0.6	0.7	0.7	0.8	0.8	0.9	0.9	0.9	0.9	1	1	1	1
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	0.4	0.5	0.5	0.6	0.7	0.7	0.8	0.8	0.9	0.9	0.9	0.9	1	1	1
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	0.4	0.5	0.5	0.6	0.7	0.7	0.8	0.8	0.8	0.9	0.9	0.9	0.9	1
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	0.3	0.4	0.5	0.5	0.6	0.7	0.7	0.8	0.8	0.8	0.9	0.9	0.9	0.9
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	0.3	0.4	0.5	0.5	0.6	0.7	0.7	0.8	0.8	0.8	0.9	0.9	0.9
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	0.3	0.4	0.5	0.5	0.6	0.7	0.7	0.8	0.8	0.8	0.9	0.9
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	0.3	0.4	0.5	0.5	0.6	0.6	0.7	0.8	0.8	0.8	0.9
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	0.4	0.4	0.5	0.5	0.6	0.6	0.7	0.7	0.8	0.8
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.2	0.3	0.4	0.4	0.5	0.5	0.6	0.6	0.7	0.7	0.8
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	0.3	0.4	0.4	0.5	0.5	0.6	0.6	0.7	0.7
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	0.3	0.4	0.4	0.5	0.5	0.6	0.6	0.7
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	0.3	0.4	0.4	0.5	0.5	0.6	0.6
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	0.3	0.4	0.4	0.5	0.5	0.6
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	0.3	0.4	0.4	0.5	0.5

Sayısal Sonuçlar

Verilen saldıran piyon sayısı ve savunan piyon sayısına göre, yukarıda verilen durum geçişme olasılıklarını kullanarak durum geçişme matrisini oluşturan ve (4) denklemini kullanarak kazanma ve kaybetme olasılıklarını hesaplayan bir bilgisayar programı kullanılmış, $0 < a \leq 30$ ve $0 < d \leq 30$ olmak üzere her (a, d) ikilisi için kazanma ve kaybetme olasılıkları hesaplanmıştır.

Örneğin saldıranın 6, savunanın 4 piyonu olması durumunda durum geçişme diagramı Şekil 2'de, aynı sistem için oluşturulan durum geçişme matrisi Tablo 2'de verilmiştir.



Şekil 2. Saldıranın 6, savunanın 4 piyonu olması durumunda durum geçişme diagramı

Tablo 2'den anlaşılacağı üzere oluşturulan durum geçişme matrisi seyrek bir matristir. Saldıran tarafın ve savunan tarafın piyon sayıları arttığında durum uzayının eleman sayısı artacak dolayısıyla, durum geçişme matrisinin eleman sayısı da üstel şekilde artacaktır. Örneğin saldıranın 30, savunanın 30 piyonu olması durumunda durum geçişme uzayında $30 \cdot 30 + 2 = 902$ durum olacak ve durum geçişme matrisinde yaklaşık 820.000 eleman olacaktır. Bu da (4) denkleminin hesaplanmasında zorluklar yaratabilir. Bu yüzden seyrek matrislerle yapılan işlemlerde matrislerin seyrek olma özelliğini kullanan sayısal yöntemlerin kullanılması işlem hızını arttıracaktır.

Tablo 3, saldıran tarafın 30 veya daha az, savunan tarafın da 30 veya daha az piyonu olduğunda, saldıran tarafın kazanma olasılıklarını vermektedir. Şekil 3'te saldıran tarafın kazanma olasılığı savunan tarafın piyon sayısının bir fonksiyonu olarak, saldıran tarafın piyon sayısının 5, 10, 15, 20, 25, 30 olduğu durumlar için verilmiştir.

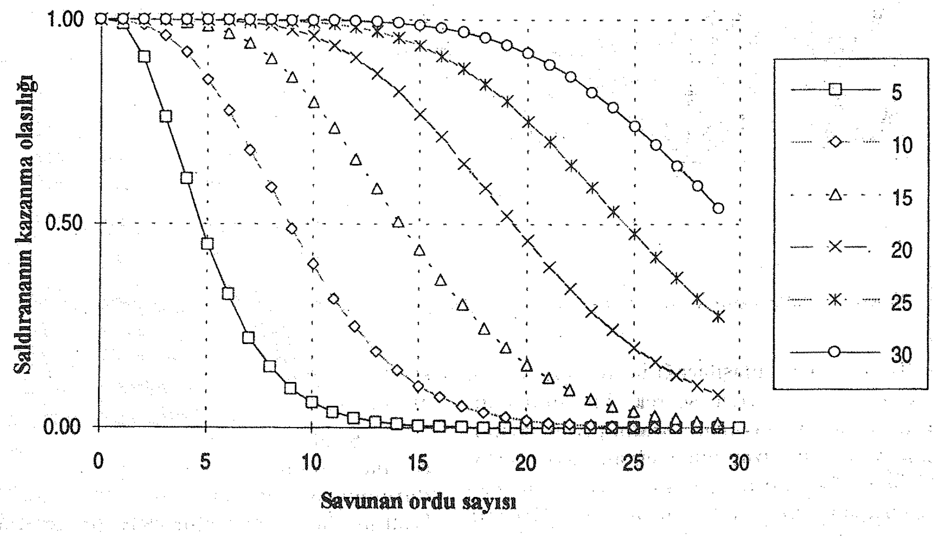
Şekil 3'ten görülebileceği gibi saldıran ve savunan tarafın piyon sayılarının eşit olması durumunda saldıran tarafın kazanma olasılığı %50'nin biraz altındadır. Savunan tarafın piyon sayısının saldıran tarafın yarısı olması durumunda ise saldıran tarafın kazanma olasılığı %80'lere çıkmaktadır.

Aynı yöntemle cevap verilebilecek başka bir problem ise savaşa başladıktan sonra bitene kadar verilecek beklenen kayıp sayısıdır. Örneğin 10 piyon ile savaşa başladığımızda eğer savaşın sonuna kadar beklenen kaybımız 8 ise belki saldırmaktan vazgeçeriz. Beklenen kayıp sayısı ve kazanma olasılığı saldıran tarafın yarar fonksiyonu ile birlikte kullanılarak saldırıp saldırmama veya savaşa başladıktan sonra hangi durumda savaş yarıda bırakmamız gerektiği bulunabilir.

Kurallarda bir değişiklik yaparak, hücum eden tarafın 3 zar kullanma hakkı olsa bile, isterse 1 veya 2 zar kullanabileceğini, aynı şekilde savunmadaki oyuncunun da 1 veya 2 zar kullanabileceğini kabul edersek, her oyuncu için kazanma olasılıklarını en fazla, beklenen kayıp sayılarını en az yapan karar mekanizması Markov karar süreçleri kullanılarak hesaplanabilir.

Sonuç

Markov zincirleri eğitim, pazarlama, sağlık hizmetleri, finans, muhasebe, dilbilim, üretim modellemesi, ses tanımlama, görüntü tanımlama ve işleme gibi çok değişik konularda uygulama alanlarının dışında yaygın şekilde oynanan bir takım oyunların modellenmesinde de kullanılabilir. Yukarıda bahsedilen uygulamalarla, oyunların modellenmesinde Markov zincirlerinin kullanılmasında en büyük fark modelin gerçekle ilişkisidir. Gerçek hayat problemlerinde sistemin karışıklığından dolayı, uygulamanın gerektirdiği hassasiyette bir matematiksel model kurulur ve kurulan modelin özellikleri Markov süreçlerinin varsayımlarıyla çelişmiyorsa bu yöntem kullanılabilir. Dolayısıyla elde edilen sonuçlar gerçeğin bir yaklaşımıdır. Oyunlara ise gerçek hayatın basit modelleri olarak bakılabilir. Örneğin *Borsa (Monopoly)*, ekonomik bir sistemin basit bir modeli olarak özellikle oyun teorisi ile ilgilenen bir çok araştırmacının araştırma konusu olmuştur. Burada amaç basitten zora, yalından karmaşığa giden yolda birtakım yeni bilgiler elde etmektir. *Gizli Hedef (Risk)* de bir strateji oyunu olarak gerçek dünyadaki zor kararları ve savaşları çok basit olarak modellemektedir. Bu çalışmadan çıkarılabilecek sonuç, Markov zincirlerinin özellikle birbiri ile ilişik olayların modellemesinde kullanılan etkin bir yöntem olduğudur.



Şekil 3. Savunan tarafın piyon sayısının bir fonksiyonu olarak saldıran tarafın kazanma olasılığı

KAYNAKÇA

[1] R. Ash & R. Bishop, *Monopoly as a Markov Process*, *Mathematics Magazine*, **45**, 26-29 (1972).

[2] U. N. Bhat, *Elements of Applied Stochatsic Processes*, John Wiley & Sons, New York, 1984.

[3] *Gizli Hedef* oyun kuralları.

[4] W. L. Winston, *Operations Research: Applications and Algorithms*, PWS-Kent, Boston, 1991.