EMRE ALKAN'IN EŞİTSİZLİĞİ ÜZERİNE

Albert Erkip *

Emre Alkan, [**1**]'de aşağıdaki eşitsizliğin doğru olduğunu iddia etmişti.

İddia. *x, y, z ve n pozitif sayılar olmak üzere,*

$$\frac{1}{(x+y)^n}+\frac{1}{(x+z)^n}+\frac{1}{(y+z)^n}\leq\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}+\frac{1}{z^n}\right)$$

gerçeklenir. Eşitlik yalnız $x=y=z$ iken vardır.

[1]'de Emre Alkan istenen eşitsizliğin, h_a, h_b, h_c ve $\Gamma_a, \Gamma_b, \Gamma_c$ sırayla bir ABC üçgeninin yükseklikleri ve dışteğet çemberlerinin yarıçapları olmak üzere, $h_a^n + h_b^n + h_c^n \leq \Gamma_a^n + \Gamma_b^n + \Gamma_c^n$ eşitsizliğine denk olduğunu göstererek, iddiasını $n=1$ ve $n=2$ durumları için kanıtlamıştı.

Fonksiyonların dışbükeylik özellikleri kullanılarak iddiadaki ve benzeri eşitsizlikler kolayca kanıtlanabilir. Aşağıdaki teoremin dışbükeylikle ilgisi fonksiyonun grafiğinin üzerinde kalan bölgeye bakılınca görülecektir.

Teorem. *Bir I açık aralığında f iki kere türevlenebilir ve her $t \in I$ için $f''(t) > 0$ olsun. Her $a, b \in I$ için*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(a)+f(b))$$

gerçeklenir. Eşitlik yalnız $a=b$ iken vardır.

Kanıt. $g(t) = \frac{1}{2}(f(a)+f(t)) - f\left(\frac{a+t}{2}\right)$ fonksiyonuna bakalım. $t \in I$ için

$$g'(t) = \frac{1}{2}\left[f'(t) - f'\left(\frac{a+t}{2}\right)\right] = \frac{t-a}{4}f''(c) \quad (2)$$

olacaktır. İkinci eşitlikte Ortalama Değer Teoremi kullandık ve bu eşitlik t ile $\frac{a+t}{2}$ arasındaki uygun bir c için sağlanır. $f''(c) > 0$ olduğundan (2)'den g fonksiyonunun $t < a$ için azalan, $t > a$ için artan olduğu çıkar; yani g'nin minimum değeri $t = a$ noktasındadır. $b \neq a$ için

$$\frac{1}{2}(f(a)+f(b)) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = g(b) > g(a) = 0$$

Teorem 1'in kanıtını tamamlar. □

İddiadaki eşitsizliğe gelince, $f(t) = 1/t^n$ için

$$f''(t) = \frac{n(n+1)}{t^{n+2}} > 0$$

eşitsizliği $I = (0, \infty)$ aralığında geçerlidir. x, y, z pozitif sayıları için Teorem 1'den çıkan

$$\frac{2^n}{(x+y)^n} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}\right)$$

ile $x+z$ ve $y+z$ için benzer eşitsizleri toplarsak iddiadaki eşitsizliği elde ederiz. Eşitlik ancak üç eşitlikte de eşitlik durumunda, yani $x = y = z$ iken vardır.

Teorem 1'de a ve b'nin orta noktası $\frac{a+b}{2}$ yerine aralarındaki herhangi bir noktayı düşünebiliriz, bu bize aynı yolla kanıtlanabilen şu teoremi verir.

Teorem 2. *Bir I açık aralığında f iki kere türevlenebilir ve her $t \in I$ için $f''(t) > 0$ olsun. Her $a, b \in I$ ve her $\lambda \in (0,1)$ için*

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$$

gerçeklenir. Eşitlik yalnız $a=b$ iken vardır.

Teorem 2'yi kullanarak Emre Alkan'ın eşitsizliğini biraz genelleştirebiliriz: x, y, z, α, β ve n pozitif sayılar olmak üzere

$$\frac{1}{(\alpha x+\beta y)^n}+\frac{1}{(\alpha y+\beta z)^n}+\frac{1}{(\alpha z+\beta x)^n} \leq \frac{1}{(\alpha+\beta)^n}\left(\frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}+\frac{1}{z^n}\right)$$

gerçeklenir. Eşitlik yalnız $x = y = z$ iken vardır.

KAYNAKÇA

[1] E. Alkan, *Bir Eşitsizlik Üzerine*, *Matematik Dünyası*, **5**, sayı 4, 17–18 (1995).

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

DIŞBÜKEY FONKSİYONLAR

H. Turgay Kaptanoğlu *

A. Dışbükey Kümeler

Geometri derslerinden (eğer orta öğrenimde hâlâ geometri dersi kalmışsa) düzlemdeki dışbükey şekillerin nasıl şeyler oldukları hakkında bir fikrimiz vardır. Üçgen, kare, daire, yamuk, düzgün beşgen, altıgen, vb. dışbükey şekillerdir, fakat yıldız değildir, çünkü yıldızın dışındaki bölge yıldıza doğru girintiler yapar. Bunun matematiğe daha uygun ifadesi şudur: Yıldızın içinde (farklı kollarında) öyle iki nokta bulabiliriz ki bu noktaları birleştiren doğru parçası mutlaka yıldızın dışına taşar.

A, B düzlemde iki nokta ve t, $0 \leq t \leq 1$ sağlayan gerçel sayı ise, $(1-t)A+tB$ noktalarının kümesi A ile B'yi birleştiren doğru parçasını verir. t sıfırdan bire doğru artarken, A'dan B'ye gideriz; $t = \frac{1}{2}$ iken A ile B'nin tam ortasındayızdır. $t > 1$ veya $t < 0$ olması noktalardan birinin öbür tarafına geçmiş olduğumuzu gösterir. Koordinat kullanırsak, $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ yazarız ve

$$(1-t)A + tB = \big((1-t)a_1 + tb_1, (1-t)a_2 + b_2\big)$$

olur. A ve B'nin n boyutlu gerçel uzayda ($\mathbb{R}^n$'de) noktalar olması durumunda da benzer kavramlar ve ilişkiler geçerlidir.

Tanım 1. $D \subset \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer her $A, B \in D$ ve $0 \leq t \leq 1$ sağlayan her gerçel t için

$$(1-t)A + tB \in D$$

ise, D'ye *dışbükey küme* deriz.

$\mathbb{R}^n$'de A ve B noktaları arasındaki *uzaklığı*

$$\|A - B\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}$$

ile gösteririz. Uzaklığın üç temel özelliği şunlardır.

(1) $\|A - A\| = 0$'dır ve $A \neq B$ ise $\|A - B\| > 0$ olur.

(2) t bir gerçel sayı ise, $\|tA - tB\| = \|t(A - B)\| = |t|\,\|A - B\|$ sağlanır. $t = -1$ halinde ise bu $\|A - B\| = \|B - A\|$ verir; bu simetri özelliğidir.

(3) $\|A - B\| \leq \|A - C\| + \|C - B\|$; bu *üçgen eşitsizliği*dir.

(1), farklı iki noktanın, birbirine ne kadar yakın olurlarsa olsunlar, aralarındaki uzaklığın sıfır olamayacağını söyler. (2), A'nın B'ye olan uzaklığı, B'nin A'ya olan uzaklığıyla aynıdır demekle eşdeğerdir. (3), bir üçgende en uzun kenarın uzunluğu diğer iki kenarın uzunlukları toplamından kısadır demekten başka bir şey değildir. Aynı zamanda iki nokta arasındaki en kısa yolun bir doğru olması anlamına da gelir.

Her dairenin dışbükey olduğunu gösterelim. Dairenin merkezi M ve yarıçapı $r > 0$ ise, bir X noktasının dairede olması demek, dairenin sınırı olan çemberi içerip içermediğine göre, $\|X - M\| \leq r$ veya $\|X - M\| < r$ eşitsizliklerinden birini sağlaması demektir. Diyelim ikincisidir. Şimdi dairede A ve B diye iki nokta alalım ve $0 \leq t \leq 1$ alalım. $C = (1-t)A + tB$ dersek,

$$\begin{aligned} \|C - M\| &= \|(1-t)A + tB - (1-t)M - tM\| \\ &\leq (1-t)\|A - M\| + t\|B - M\| \\ &< (1-t)r + tr = r \end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanır; $1 - t$ ve t, pozitif olduklarından $\|\cdot\|$ dışına olduğu gibi çıkarlar. Sonuç olarak $C = (1-t)A + tB$'nin de $0 \leq t \leq 1$ iken dairede olduğu anlaşılır. Bu ise dairenin dışbükey olması demektir.

B. Dışbükey Fonksiyonlar

Tanım 2. $A \subset \mathbb{R}$ bir aralık ve $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $a, b \in A$ ve $0 \leq t \leq 1$ sağlayan her gerçel t için

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

sağlanıyorsa, f'ye *dışbükey fonksiyon* denir.

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

Örneğin $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $A = (-\infty, \infty)$ aralığında dışbükey olduğunu görelim. $a, b \in \mathbb{R}$ ise önce $2ab \leq a^2 + b^2$ doğrudur, çünkü bu $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$'a, bu da $(a-b)^2 \geq 0$'a denktir. $c = (1-t)^2 a + tb$ olsun. $0 \leq t \leq 1$ için

$$\begin{aligned} c^2 &= (1-t)^2 a^2 + t^2 b^2 + a(1-t)atb \\ &\leq (1-t)^2 a^2 + t^2 b^2 + (1-t)t(a^2+b^2) \\ &= ((1-t)^2 + (1-t)t)a^2 + (t^2 + (1-t)t)b^2 \\ &= (1-t)a^2 + tb^2 \end{aligned}$$

buluruz ki bu Tanım 2'nin f için gerçeklenmesidir. $0 \leq t \leq 1$ olduğunu nerede kullandık? Eğer $t > 1$ veya $t < 0$ olsaydı, yukarıda ilk denklemdeki $t(1-t)$ negatif olurdu ve ikinci satırdaki eşitsizlik tersine dönerdi. Aynı yolla, $g(x) = cx + d$ şeklindeki her fonksiyonun, yani doğruların da dışbükey olduğunu görürüz.

$x = (1-t)a + tb$ yazarsak,

$$t = \frac{b-x}{b-a} \quad \text{ve} \quad 1-t = \frac{x-a}{b-a}$$

olur ve Tanım 2'deki eşitsizlik

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) \\ &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \end{aligned}$$

halini alır.

$$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a),$$

f'nin grafiğinde bulunan $(a, f(a))$ ile $(b, f(b))$ noktalarından geçen doğrunun denklemidir. O halde Tanım 2'deki eşitsizlik, f fonksiyonunun $x = a$ ile $x = b$ arasındaki grafiğinin $(a, f(a))$ ile $(b, f(b))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının altında veya ona değiyor olduğunun ifadesidir. Ve bu A aralığındaki her a, b nokta çifti tarafından sağlanmalıdır. Tanım 2'de eşitliğin yalnız doğrular tarafından sağlandığını da buradan görürüz.

Bu geometrik özellikten yararlanarak, üstel fonksiyon $h(x) = e^x$'in bütün gerçel sayılar kümesi üzerinde dışbükey olduğunu görürüz; tabii bu bir ispat değildir; ispatı aşağıda vereceğiz. Gene aynı yolla $l(x) = \ln x$ hiçbir aralıkta dışbükey değildir; $k(x) = x^3$ ise sadece $[0, \infty)$ aralığı veya onun alt aralıklarında dışbükeydir.

İki çeşit dışbükeylik tanımladık. İlk akla gelen soru aralarında bir ilişki olup olmadığı. Var, hem de çok yakından. f, bir A aralığında dışbükey olan bir fonksiyon olsun. E_f ile f'nin A'daki grafiğinin üzerinde kalan bölgeyi gösterelim; yani

$$E_f = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A,\ y \geq f(x) \,\}$$

olsun.

Teorem 3. *f'nin A'da dışbükey olması için gerek ve yeter şart E_f'nin dışbükey olmasıdır.*

İspat. f dışbükey olsun ve $(a, c), (b, d) \in E_f$ alalım. Bu iki noktayı birleştiren doğru parçasının denklemini

$$y = \frac{b-x}{b-a} c + \frac{x-a}{b-a} d \qquad (a \leq x \leq b)$$

şeklinde yazabileceğimizi gördük. $a, b \in A$ ile $c \geq f(a)$ ve $d \geq f(b)$ gerçeklenir. Bunlar ve f'nin dışbükeyliği sayesinde $a \leq x \leq b$ için

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) \\ &\leq \frac{b-x}{b-a} c + \frac{x-a}{b-a} d = y \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu ise doğru parçasının tamamının E_f'de kaldığını, yani E_f'nin dışbükey olduğunu söyler.

Tersine f dışbükey değilse, öyle $a, b \in A$ ve aralarında bir $x_0 \in A$ vardır ki

$$f(x_0) > \frac{b-x_0}{b-a} f(a) + \frac{x_0-a}{b-a} f(b)$$

gerçeklenir. Bu eşitsizliğin sağ tarafına s diyelim.

$$c = f(a) + \frac{f(x_0)-s}{2} \quad \text{ve} \quad d = f(b) + \frac{f(x_0)-s}{2}$$

tanımlayalım. Açıkça $c > f(a)$ ve $d > f(b)$'dir; yani (a, c) ve (b, d) noktaları E_f'dedir. (a, c) ve (b, d) noktalarından geçen doğruyu g fonksiyonu ile gösterelim. x_0 ne olursa olsun

$$\frac{b-x_0}{b-a} + \frac{x_0-a}{b-a} = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

sağlandığından, s'nin tanımını kullanarak

$$\begin{aligned} g(x_0) &= \frac{b-x_0}{b-a} c + \frac{x_0-a}{b-a} d \\ &= \frac{b-x_0}{b-a} f(a) + \frac{x_0-a}{b-a} f(b) + \frac{f(x_0)-s}{2} \\ &= s + \frac{f(x_0)-s}{2} = \frac{f(x_0)+s}{2} < f(x_0) \end{aligned}$$

buluruz. Bu ise (a, c) ve (b, d) noktalarını birleştiren doğru parçasının $x = x_0$'da, f'nin grafiğinde olan $(x_0, f(x_0))$ noktasının altında olduğunu ve dolayısıyla bu doğru parçasının tamamının E_f'de kalmadığını söyler; yani E_f dışbükey değildir. □

$\alpha, \beta \geq 0$ ise ve f, g dışbükey fonksiyonlarsa, $\alpha f + \beta g$ de dışbükey olur. Dolayısıyla dışbükey iki fonksiyonun toplamı ile dışbükey bir fonksiyonun pozitif katları da dışbükeydir. Ama çarpımlar ve negatif katlar için aynı şeyi söyleyemeyiz.

Önerme 4. *$A \subset \mathbb{R}$ bir aralık, $f : A \to \mathbb{R}$ dışbükey bir fonksiyon ve $a < c < b$, A'da noktalar olsun. O zaman*

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir.

Bu önermenin geometrik anlamı şudur: $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$, $C = (c, f(c))$ dersek, $[AC]$'nin eğimi $[AB]$'nin eğiminden küçük veya ona eşit, o da $[BC]$'nin eğiminden küçüktür veya ona eşittir.

İspat. f dışbükey ve

$$c = \frac{b-c}{b-a}a + \frac{c-a}{b-a}b$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} f(c) - f(a) &\leq \frac{b-c}{b-a}f(a) + \frac{c-a}{b-a}f(b) \\ &\quad - \frac{b-c}{b-a}f(a) - \frac{c-a}{b-a}f(a) \\ &= \frac{a-c}{b-a}f(a) + \frac{c-a}{b-a}f(b) \\ &= \frac{c-a}{b-a}(f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan ilk eşitsizlik çıkar. İkincisi de buna benzer. □

Şimdi A açık bir aralık, $a < c < b$, A'da noktalar ve $f : A \to \mathbb{R}$ dışbükey olsun.

$$g(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \qquad (x \in [a,c) \cup (c,b])$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Önerme 4'ü $x < c < b$ üçlüsü ile kullanırsak, g'nin $[a,c)$'de

$$\frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$

sayısı ile üstten sınırlı olduğunu, Önerme 4'ü bir kez de $x < y < c$ üçlüsü ile kullanırsak, g'nin $[a,c)$'de artan olduğunu görürüz. Bu son iki gözlem bize

$$\lim_{x\to c^-} g(x) = \operatorname*{ekü s}_{x\in[a,c)} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'_-(c)$$

limitinin varlığını söyler. Aynı şekilde

$$\lim_{x\to c^+} g(x) = \operatorname*{ebas}_{x\in(c,b]} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'_+(c)$$

limiti de vardır. Burada ekü̈s ve ebas sırayla *en küçük üst sınır* ve *en büyük alt sınır* demektir.

Yukarıdaki iki limit birbirine eşit olmayabilir. Örneğin $g(x) = |x|$ fonksiyonu $A = (-\infty, \infty)$'da dışbükeydir, ama $g'_+(0) = +1$ ve $g'_-(0) = -1$ verir. Bu fonksiyon ayrıca dışbükey bir fonksiyonun türevli olmasının gerekmediğine de bir örnektir.

Şimdi bir kez daha Önerme 4'ü $c-h < c < c+h$ üçlüsü ile kullanırsak

$$\begin{aligned} \frac{f(c)-f(c-h)}{h} &\leq \frac{f(c+h)-f(c-h)}{2h} \\ &\leq \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \end{aligned}$$

buluruz. Ortadaki ifadeyi görmezlikten gelir ve $h \to 0$ iken limit alırsak, $f'_-(c) \leq f'_+(c)$ elde ederiz. Tekrar Önerme 4'ten ve $f'_+(a)$'nın tanımından

$$f'_+(a) \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$

yazarız. Şimdi sağ tarafın $b \to c^+$ iken limitini alırsak $f'_+(c)$ buluruz ve eşitsizlikler korunur; yani $a < c$ için $f'_+(a) \leq f'_+(c)$'dir. f'_- için de aynı şey geçerlidir.

Sağ ve sol türevin elimizdeki özelliklerinden şunları da çıkartırız:

$$\frac{f(c)-f(x)}{c-x} \leq f'_-(c) \leq f'_+(c) \qquad (x < c)$$

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq f'_+(c) \qquad (x > c)$$

birlikte $x \in A$ ve $x \neq c$ için

$$f(x) \geq f(c) + f'_+(c)(x-c)$$

verir ki bu $x = c$ için de doğrudur. Benzer bir sonuç $f'_-(c)$ ile de vardır.

Şimdi toparlayalım:

Teorem 5. *A açık bir aralık ve $f : A \to \mathbb{R}$ dışbükey olsun. O zaman f'nin A'nın her noktasında sağ ve sol türevi vardır, bu türevler artan fonksiyonlardır ve bir noktadaki sağ türev aynı* *noktadaki sol türevden küçük değildir. Ayrıca $c \in A$ ve $f'_-(c) \leq m \leq f'_+(c)$ ise,*

$$f(x) \geq f(c) + m(x-c) \qquad (x \in A)$$

geçerlidir.

Son eşitsizliğin geometrik anlamı şudur: Açık bir aralıktaki dışbükey bir f fonksiyonunun grafiği, grafiğin ir noktasından geçen ve eğimi, fonksiyonun o noktadaki sağ ya da sol türevi olan doğrunun üst tarafında kalır. Eğer aralığın bir noktasında f türevli ise, f'nin bütün aralıktaki grafiği, f'nin türevli olduğu noktada f'nin grafiğine çizilen teğetin üst tarafındadır.

Teorem 5'i ispatlamaktaki amaçlarımızdan biri de şuydu:

Teorem 6. *A açık bir aralık ve $f : A \to \mathbb{R}$ dışbükey ise, f süreklidir.*

İspat. A'da $a \leq x < y \leq b$ noktalarını alalım. Sağ ve sol türevin tanımlarından ve özelliklerinden

$$f'_+(a) \leq f'_+(x) \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq f'_-(y) \leq f'_-(b)$$

elde ederiz. $|f'_+(a)|$ ile $|f'_-(b)|$'nin büyüğüne M diyelim. f o zaman $[a,b]$ aralığından *Lipschitz şartı* dediğimiz

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y-x|$$

eşitsizliğini sağlar. Buradan $y \to x$ iken $f(y) \to f(x)$ olur ve bu f'nin sürekliliği demektir. □

Bu teoremin geçerliliği A'nın açık olmasına bağlıdır. Örneğin, $A = [0,1]$ ise ve f'yi $f(0) = 1$ ve $x \in (0,1]$ iken $f(x) = 0$ diye tanımlarsak, f dışbükeydir fakat sürekli değildir.

Teorem 7. *A açık bir aralık ve $f : A \to \mathbb{R}$ türevli olsun. f'nin A'da dışbükey olması için gerek ve yeter şart f''nün A'da artan olmasıdır.*

İspat. f dışbükey ise sağ ve sol türevlerin artan olduğunu Teorem 5'te söyledik. f'nin türevli olması halinde sağ ve sol türevin ikisi birden türeve eşittir.

Tersine f' artan olsun. f dışbükey olmasa A'da öyle $a < c < b$ noktaları buluruz ki

$$f(c) > \frac{b-c}{b-a}f(a) + \frac{c-a}{b-a}f(b)$$

sağlanır. Bu eşitsizlik ise Önerme 4'ün ispatında olduğu gibi

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} > \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$

eşitsizliğine denktir. Her iki tarafa Ortalama Değer Teoremi'ni [2] uygularsak, öyle $a < x < c < y < b$ buluruz ki $f'(x) > f'(y)$ olur. Bu ise varsayımımızın aksine f' azalıyor demektir. Çelişki f'yi dışbükey olmaya zorlar. □

Sonuç 8. *A açık bir aralık ve $f : A \to \mathbb{R}$ iki kere türevlenebilir olsun. f'nin A'da dışbükey olması için gerek ve yeter şart A'da $f'' \geq 0$ olmasıdır.*

İspat. f dışbükey ise, f' artandır; dolayısıyla $f'' \geq 0$'dır.

Tersine A'da $f'' \geq 0$ olsun. $a < b \in A$ ve $t \in (0,1)$ alalım ve $c = (1-t)a + tb$ diyelim. Ortalama Değer Teoremi'nden $a < x < c < y < b$ olacak şekilde öyle $x, y \in A$ ve $x < y$ olduğundan ikisi arasında öyle bir z vardır ki

$$\begin{aligned} f(c) - f(a) &= f'(x)(c-a) \\ f(b) - f(c) &= f'(y)(b-c) \\ f'(y) - f'(x) &= f''(z)(y-x) \end{aligned}$$

yazabiliriz. $u = (1-t)f(a) - tf(b)$ diyelim. Bunlardan ve c'nin tanımından çıkan

$$\begin{aligned} f(c) - u &= (1-t)(f(c)-f(a)) - t(f(b)-f(c)) \\ &= (1-t)f'(x)(c-a) - tf'(y)(b-c) \\ &= (1-t)t(b-a)f'(x) - (1-t)t(b-a)f'(y) \\ &= (1-t)t(b-a)f''(z)(x-y) \leq 0 \end{aligned}$$

eşitsizliği f'nin dışbükey olduğunu söyler. □

Teorem 7 ve Sonuç 8 yardımıyla birçok tanıdık fonksiyonun dışbükey olup olmadığını gösterebiliriz. Örneğin $h(x) = e^x$ ise, her gerçel x için $h''(x) = e^x > 0$'dır ve dolayısıyla h, $\mathbb{R}$'de dışbükeydir. Buna karşıt olarak f'nin tersi olan ve $(0,\infty)$ aralığında tanımlanan $l(x) = \ln x$ fonksiyonu tanımlandığı hiçbir yerde dışbükey değildir, çünkü $x > 0$ iken $l''(x) = -1/x^2 < 0$'dır. $p > 1$ iken $f(x) = x^p$ fonksiyonu $A = (0,\infty)$ aralığında dışbükeydir, çünkü bu aralıkta $f''(x) = p(p-1)x^{p-2} > 0$'dır. Benzer şekilde polinomlar ve trigonometrik fonksiyonlar için de dışbükeylik aralıkları bulabiliriz.

C. Orta Nokta Dışbükeyliği

Tanım 9. A bir aralık ve $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $a, b \in A$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

sağlanıyorsa, f'ye *orta noktada dışbükey* denir.

Tanım 2'nin aksine t sayısı burada sadece $1/2$ değerini alabilmektedir; dolayısıyla orta noktada dışbükeylik, dışbükeylikten daha zayıf bir kavramdır. Teorem 10'da göreceğimiz gibi bu zayıflık süreklilikle kapatılabilir. Geometrik olarak anlamı, fonksiyonun grafiğinde alınan herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçasının orta noktasının, fonksiyonu grafiğinin aynı düşey doğrultudaki noktasından aşağıda kalmamasıdır.

Teorem 10. *A bir aralık, $f : A \to \mathbb{R}$ orta noktada dışbükey ve sürekli ise, f dışbükeydir.*

İspat. $\{a_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, A'da bir dizi olsun. $b = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ diyelim. Tanım 9'dan

$$\begin{aligned} f\left(\frac{b}{4}\right) &\leq \frac{1}{2} f\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{4}(f(a_1) + f(a_2) + f(a_3) + f(a_4)) \end{aligned}$$

çıkar. Böylece tümevarımla, 2^k şeklindeki her n için,

$$f\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}(f(a_1) + \cdots + (a_n)) \quad (*)$$

olduğunu gösterebiliriz.

Şimdi $(*)$'ın doğru olduğu bir $n = N$ alalım.

$$a_N = \frac{1}{N-1}(a_1 + \cdots + a_{N-1})$$

diye yeniden tanımlarsak, sırayla

$$\begin{aligned} a_N &= \frac{1}{N}(a_1 + \cdots + a_N) \\ f(a_N) &= f\left(\frac{a_1 + \cdots + a_N}{N}\right) \\ &\leq \frac{1}{N}(f(a_1) + \cdots + f(a_{N-1})) + \frac{1}{N} f(a_N) \end{aligned}$$

elde ederiz. Bunu $f(a_N)$ için çözerek

$$f(a_N) \leq \frac{1}{N-1}(f(a_1) + \cdots + f(a_N))$$

buluruz. Bu ise $(*)$'ın $n = N - 1$ için de doğru olduğunu söyler. Dolayısıyla $(*)$, her pozitif tamsayı n için geçerlidir.

Son olarak $0 \leq k \leq n$ tamsayılar ve $a, b \in A$ olsun. $(*)$'da ilk $n - k$ noktayı a, kalan k noktayı da b olarak alırsak,

$$f\left(\frac{n-k}{n} a + \frac{k}{n} b\right) \leq \frac{1}{n}((n-k) f(a) + k f(b))$$

yazabiliriz. Bu ise $0 < s < 1$ sağlayan her rasyonel sayı s için

$$f((1-s)a + sb) \leq (1-s) f(a) + s f(b)$$

olması demektir. $0 \leq t \leq 1$ bir gerçel sayı ise, ona yakınsayan $\{s_k\}$ rasyonel sayı dizisini bulabiliriz, ve son eşitsizliğin sağ tarafı açıkça $(1-t)f(a) + tf(b)$'ye yakınsar. f sürekli olduğundan,

$$\begin{aligned} \lim_{k \to \infty} f((1-s_k)a + s_k b) &= f(\lim_{k \to \infty}((1-s_k)a + s_k b)) \\ &= f((1-t)a + tb) \\ &\leq (1-t) f(a) + t f(b) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu ise Tanım 2'deki eşitsizlikten başka bir şey değildir. □

D. Jensen Eşitsizliği

Matematikte çok bilinen ve kullanılan eşitsizliklerin birçoğu aslında *Jensen eşitsiliği*nin değişik dışbükey fonksiyonlarla kullanılmasından elde edilir. Bu, dışbükeylik kavramının ne kadar temel bir kavram olduğuna işarettir. Aşağıda şaşırtıcı birkaç örnek vereceğiz. Öneminden dolayı Jensen eşitsizliğinin iki ayrı şeklini veriyoruz. Bu iki şekil aslında birbirinden çıkarılabilir.

Teorem 11. *A açık bir aralık ve $f : A \to \mathbb{R}$ dışbükey olsun. $t_1 + \cdots + t_n = 1$ olacak şekilde pozitif sayılar ve $x_1 \leq \cdots \leq x_n \in A$ alalım. O zaman*

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} t_k f(x_k)$$

sağlanır. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart f'nin $[x_1, x_n]$ aralığında bir doğru olmasıdır.

İspat. $p = t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_n x_n$ dersek,

$$\begin{aligned} p &\geq t_1 x_n + t_2 x_n + \cdots + t_n x_n \\ &= (t_1 + \cdots + t_n) x_n = x_n \end{aligned}$$

ve benzer şekilde $p \geq x_1$ buluruz. Yani $p \in A$'dır. Teorem 5'ten her x_k için

$$f(x_k) \geq f'_+(p)(x_k - p) + f(p)$$

olduğunu biliyoruz. Bu eşitsizliğin her iki tarafını t_k ile çarpar ve sonra $k = 1$'den $k = n$'ye kadar toplarsak,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} t_k f(x_k) &\le f'_+(p)\sum_{k=1}^{n} t_k x_k - pf'_+(p)\sum_{k=1}^{n} t_k \\ &\quad + f(p)\sum_{k=1}^{n} t_k \\ &= pf'_+(p) - pf'_+(p) + f(p) \\ &= f\Big(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\Big)\end{aligned}$$

elde ederiz. n üzerinde tümevarım kullanarak değişik bir ispat verebilirdik. Eşitlik hali ile ilgili iddiayı da dışbükeyliğin tanımından sonra verdiğimiz geometrik açıklamadan rahatça görürüz. □

Teorem 12. *$g : [c,d] \to (a,b)$ sürekli ve $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ dışbükey olsun. O zaman*

$$f\Big(\frac{1}{d-c}\int_c^d g(x)\,dx\Big) \le \frac{1}{d-c}\int_c^d f(g(x))\,dx$$

sağlanır.

İspat. Teorem 11'in ispatına benzer şekilde

$$p = \frac{1}{d-c}\int_c^d g(x)\,dx$$

dersek, gene $a < p < b$ olur. Teorem 5'ten her $y \in (a,b)$ için $f(y) \ge f(p) + f'_+(p)(y-p)$ olduğunu biliyoruz. $y = g(x)$ alırsak $f(g(x)) \ge f(p) + f'_+(p)(g(x) - p)$ buluruz. Şimdi bu eşitsizliğin her iki tarafının c'den d'ye integralini alırsak,

$$\begin{aligned}\int_c^d f(g(x))\,dx &\ge f(p)\int_c^d dx + f'_+(p)\int_c^d g(x)\,dx \\ &\quad - pf'_+(p)\int_c^d dx \\ &= f(p)(d-c) + f'_+(p)p(d-c) \\ &\quad - pf'_+(p)(d-c) \\ &= (d-c)f\Big(\frac{1}{d-c}\int_c^d g(x)\,dx\Big)\end{aligned}$$

elde ederiz. Artık her iki tarafı $d-c$'ye bölmek yetecektir. □

Bu ve bundan sonraki integralle ilgili sonuçlarda aslında integrali alınan fonksiyonun sürekli olması, tanım kümesinin bir aralık, hatta gerçel sayıların bir altkümesi bile olması bile gerekmez. Üzerinde integral alınabilecek bir küme ve integrali tanımlanabilecek bir fonksiyon yeter.

Şimdi Teorem 12'de $f(x) = e^x = \exp x$ alırsak, $[0,1]$ aradığında tanımlı sürekli bir g fonksiyonu için

$$\exp\int_0^1 g(x)\,dx \le \int_0^1 e^{g(x)}\,dx,$$

ya da $h(x) = e^{g(x)}$ yazarsak $g(x) = \ln h(x)$ olacağından,

$$\exp\int_a^1 \ln h(x)\,dx \le \int_0^1 h(x)\,dx$$

buluruz.

$t_1 = t_2 = \cdots = t_n = \frac{1}{n}$ alır ve $f(x) = e^x$'i Teorem 11'de kullanırsak

$$\exp\Big(\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)\Big) \le \frac{1}{n}(e^{x_1} + \cdots + e^{x_n}),$$

ya da $y_k = e^{x_k}$ yazarsak $x_k = \ln y_k$ olacağından,

$$\begin{aligned}(y_1\cdots y_n)^{1/n} &= \exp\ln(y_1\cdots y_n)^{1/n} \\ &= \exp\Big(\frac{1}{n}\ln(y_1\cdots y_n)\Big) \\ &= \exp\Big(\frac{1}{n}(\ln y_1 + \cdots + \ln y_n)\Big) \\ &\le \frac{1}{n}(y_1 + \cdots + y_n)\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu ise *aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğ*idir. $n = 2$ aldığımızda iyi bildiğimiz

$$\sqrt{y_1 y_2} \le \frac{y_1 + y_2}{2}$$

şekline girer. Teorem 12'de bütün t_k'leri eşit almak yerine her birini pozitif ve toplamları 1 olacak şekilde seçersek, aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinin daha genel hali olan

$$y_1^{t_1}\cdots y_n^{t_n} \le t_1 y_1 + \cdots + t_n y_n$$

eşitsizliğini de buluruz [4].

Teorem 11'i bu kez $f(x) = e^{-x}$ dışbükey fonksiyonu ile kullanacak olursak, yukarıdakilere benzer işlemlerden sonra

$$\frac{1}{\frac{t_1}{y_1} + \cdots + \frac{t_n}{y_n}} \le y_1^{t_1}\cdots y_n^{t_n}$$

eşitsizliğini buluruz. Bu, $n = 2$ ve eşit t_k'ler ile

$$\frac{2}{\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2}} \le \sqrt{y_1 y_2}$$

biçimine girer. Son iki eşitsizliğin sol tarafına *harmonik ortalama* denir [4].

Harmonik, geometrik ve aritmetik ortalamaların arasındaki bağıntılarda eşitlik olması için Teorem 11'de söylendiği gibi $f(x) = e^x$ ve $f(x) = e^{-x}$ fonksiyonlarının $[x_1, x_n]$ aralığında doğru vermesi şarttır. Bu da ancak $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ iken mümkündür. Dolayısıyla verdiğimiz üç çeşit ortalamanın birbirine eşitliği ancak bütün sayılar birbirine eşitse oluşur.

Bu dergide başka yazılardaki [**1,3,6**] bazı eşitsizlikler de Jensen eşitsizliğinde uygun dışbükey fonksiyonlar seçilerek elde edilebilir.

E. Hölder, Cauchy-Schwarz ve Minkovski Eşitsizlikleri

Dışbükey fonksiyonlardan söz ederken çoğu kez toplamları 1 olan iki pozitif sayı kullandık. Bu iki sayıyı biraz daha özel seçebiliriz: p ve q, toplamları ve çarpımları aynı, yani $p + q = pq$ olan pozitif iki gerçel sayı olsun. Bu şart

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olması demektir. Böyle seçilen p ve q'ya birbirinin *eşleniği* denir. p ve q eşlenik iseler, $1 < p, q < \infty$ olacağı açıktır; öbür türlü birinin negatif olması gerekirdi. Eşlenik iki sayıdan birinin sınırsız artması diğerinin 1'e yaklaşmasını gerektirir. Fakat ∞ bir gerçel sayı olmadığından dolayı $p = 1$ ya da $q = 1$ almayacağız. Önemli bir özel durum, $p = q = 2$ simetrik halidir.

Aşağıdaki teoremlerde seçeceğimiz sayılar ve fonksiyonlar gerçel veya karmaşık değerli olabilir. Duruma göre $|\cdot|$, mutlak değer veya modülü gösterir. Pozitif sayılar veya fonksiyonlar için tabii ki $|\cdot|$ kullanmaya gerek kalmaz.

Teorem 13. *$1 < p < \infty$ ve q, p'nin eşleniği olsun. $a_1, \ldots, a_n$ ve $b_1, \ldots, b_n$ sayıları*

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q \right)^{1/q}$$

eşitsizliğini sağlar. Buna Hölder eşitsizliği denir.

İspat. Sayılardan sıfır olanları toplamlara katkıları olmadıklarından atılmış kabul edelim. Göstereceğimiz eşitsizliğin sağındaki iki çarpana sırayla A ve B diyelim. Açıkça $0 < A, B < \infty$'dur. O zaman $c_k = a_k/A$ ve $d_k = b_k/B$ tanımlamamızda sorun çıkmaz; c_k ve d_k'ler de 0'dan farklıdır. Üstelik

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |d_k|^q = 1$$

sağlanır. Üstel fonksiyon $(0, \infty)$ aralığındaki her değeri aldığından, her k'ye karşılık $|c_k| = e^{s_k/p}$ ve $|d_k| = e^{t_k/q}$ gerçekleyen s_k ve t_k pozitif sayılarını bulabiliriz. p ve q eşlenik olduklarından üstel fonksiyonun dışbükeyliği

$$\exp\left(\frac{s_k}{p} + \frac{t_k}{q} \right) \le \frac{1}{p} e^{s_k} + \frac{1}{q} e^{t_k} \qquad (**)$$

verir. Bu ise

$$|c_k|\,|d_k| \le \frac{1}{p}|c_k|^p + \frac{1}{q}|d_k|^q$$

demektir. Bu işlemi her $k = 1, \ldots, n$ için yapıp toplarsak

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |c_k||d_k| &\le \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} |c_k|^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{n} |d_k|^q \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

elde ederiz. c_k ve d_k'nin tanımını hatırlarsak ispat biter. □

Hölder eşitsizliğinin de integral hali vardır. İspatını, Teorem 13'ünküne çok benzer olduğundan vermiyoruz.

Teorem 14. *$1 < p < \infty$ ve q, p'nin eşleniği olsun. Bir $[a, b]$ aralığında tanımlı f, g sürekli fonksiyonları*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx, \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx \right)^{1/q}$$

eşitliğini sağlar.

$p = q = 2$ halinde Hölder eşitsizliği *Cauchy-Schwarz eşitsizliği* adını alır. Mutlak değerin temel özellikleri olan

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \le \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|$$

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)g(x)|\,dx$$

eşitsizlikleri ile birleştirildiğinde, iki vektörün iç çarpımının mutlak değeri en fazla vektörlerin boylarının çarpımı kadardır anlamına da gelir.

İspatını incelersek, Teorem 13'te eşitliğin sağlanabilmesi için (**)'da her k için eşitlik olması gerektiğini görürüz. Ortalamalardaki eşitlik halleri ile ilgili açıklamalardan, bunun ancak her k için $s_k = t_k$ olması ile mümkün olduğu ortaya çıkar. Bu ise her k için $|c_k|^p = |d_k|^q$ olması demektir. Sonuç olarak Hölder şitsizliğinde eşitliğin var olabilmesi için gerek ve yeter şart her k için $|a_k|^p/|b_k|^q = C$ gerçekleyen sıfırdan farklı bir C sayısının varlığıdır. İntegralli durumda ise eşitlik için gerek ve yeter şart her $x \in [a,b]$ için $|f(x)|^p/|g(x)|^q = C$ gerçekleyen ve sıfır olmayan bir C sayısının varlığıdır. Cauchy-Schwarz eşitsizliklerinde eşitlik için sağlanması gerekenler $|a_k|/|b_k| = C$ veya $|f(x)|/|g(x)| = C$ şeklinde yazılabilir.

Teorem 15. *$1 < p < \infty$ olsun. $a_1, \ldots, a_n$ ve $b_1, \ldots, b_n$ sayıları*

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(|a_k| + |b_k|)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{1/p}$$

eşitsizliğini sağlar. Buna **Minkovski eşitsizliği** *denir.*

İspat. Gene önce 0'ları atmakla işe başlayalım. O zaman bütün toplamlar 0 ile ∞ arasındadır.

$$\begin{aligned}(|a_k| + |b_k|)^p &= |a_k|(|a_k| + |b_k|)^{p-1} \\ &\quad + |b_k|(|a_k| + |b_k|)^{p-1}\end{aligned}$$

yazıp toplar ve sağdaki terimlere ayrı ayrı Hölder eşitsizliğini uygularsak,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}|a_k|(|a_k| + |b_k|)^{p-1} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}(|a_k| + |b_k|)^{(p-1)q}\right)^{1/q}\end{aligned}$$

ve bunun a_k ile b_k'nin yeri değiştirilmiş halini elde ederiz. Burada q, p'nin eşleniğidir ve bu yüzden $(p-1)q = p$ olur. Elimizdekileri toplarsak

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^p &\leq \left(\sum_{k=1}^{n}(|a_k| + |b_k|)^p\right)^{1/q} \\ &\quad \cdot\left[\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{1/p}\right]\end{aligned}$$

buluruz. Şimdi her iki tarafı sağdaki ilk çarpana böler ve $1 - 1/q = 1/p$ olduğunu kullanırsak istediğimizi elde ederiz. □

Teorem 16. *$1 < p < \infty$ olsun. Bir $[a,b]$ aralığında tanımlı f, g sürekli fonksiyonları*

$$\begin{aligned}&\left(\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^p\,dx\right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlar.

Minkovski eşitsizliği de mutlak değerin temel özellikleri olan

$$\begin{aligned}|a_k + b_k|^p &\leq (|a_k| + |b_k|)^p \\ |f(x) + g(x)|^p &\leq (|f(x)| + |g(x)|)^p\end{aligned}$$

eşitsizlikleri ile birleştirilebilir. $p = q = 2$ halinde *üçgen eşitsizliğini* elde ederiz. Yazının başındaki üçgen eşitsizliğiyle ilişkiyi kurmak için, b_k'leri $-b_k$'ler ile değiştirmek yeter.

Minkovski eşitsizliğinde eşitlik halini incelemek için, ispatında kullanılan Hölder eşitsizliklerinde eşitliğin hangi durumlarda olacağına bakarız. Buradan elde edilen gerek ve yeter şart her k için veya her $x \in [a,b]$ için $|a_k|/|b_k| = C$ veya $|f(x)|/|g(x)| = C$ gerçekleyen sıfırdan farklı bir C sayısının varlığıdır.

Yukarıdaki eşitsizliklerden bir kısmı bu dergide daha önce de yayımlanmıştı [5]. Ama burada daha genel hallerini verdik ve dayandıkları temel noktanın dışbükeylik olduğunu gösterdik.

KAYNAKÇA

[1] E. Alkan, *Bir Eşitsizlik Üzerine*, *Matematik Dünyası*, **5**, sayı 4, 17–18 (1995).

[2] Ş. Alpay, *Rolle ve Ortalama Değer Teoremleri*, *Matematik Dünyası*, **2**, sayı 5, 16–18 (1992).

[3] Y. Avcı & N. Ergun, *Alkan'ın Eşitsizliğine Ek*, *Matematik Dünyası*, **6**, sayı 1, 9 (1996).

[4] H. Demir, *Bazı Ortalamalar*, *Matematik Dünyası*, **1**, sayı 1, 17–21 (1991).

[5] A. K. Erkip, *Bazı Temel Eşitsizlikler*, *Matematik Dünyası*, **1**, sayı 4, 20–23 (1991).

[6] A. K. Erkip, *Emre Alkan'ın Eşitsizliği Üzerine*, *Matematik Dünyası*, **6**, sayı 1, 10 (1996).

[7] J. van Tiel, *Convex Analysis*, Wiley, Chicester, 1984.