**6.** $\mathbb{N}$ ile pozitif tamsayılar kümesini gösterelim. Her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$m \mid n \iff f(m) \mid f(n)$$

koşulunu sağlayan ve örten olan tüm $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonlarını bulunuz.

# PROBLEM SEMİNERLERİ

28 Şubat 1996'dan itibaren yapılacak olan Matematik Problem Seminerleri'nde, problemlere doğru çözüm sunan katılımcılara çeşitli ödüller verilecektir. Ödüle hak kazanabilmek için, yazılı ve tam çözümlerin, ilgili problem seminerinin başlamasından önce, postayla ya da elden Problem Semineri Grubu'na iletilmiş olması gerekmektedir. Çözümlerin iletileceği mektup adresi şöyledir: TÜBİTAK, Bilim Adamı Yetiştirme Grubu, Matematik Problem Seminerleri, Atatürk Bulvarı, No. 221, 06100 Kavaklıdere, ANKARA

Her seminerdeki dört problem sırayla 1, 2, 3 ve 5 puan değerinde olacaktır. Her doğru çözüm için problemlerin zorluk derecelerine göre değişik ödüller verileceği gibi, bir dönem boyunca yapılacak yedi problem seminerinde aldıkları toplam puana göre ilk üç sırayı elde eden katılımcılara, toplam puanları 30'un üstünde olmak koşuluyla, ayrıca dönem ödülleri verilecektir.

Ödüle hak kazananların isimleri *Bilim ve Teknik* dergisinde ilân edilecek, ilginç çözüm ve yaklaşımlar her dönem sonunda yayınlanacak olan Problem Semineri Kitabı'na alınacaktır.

### Problem Semineri 95/10, 8 Kasım 1995

**1.** $a, b$ aralarında asal pozitif tamsayılar ise,

$$\left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{2a}{b}\right] + \cdots + \left[\frac{(b-1)a}{b}\right] = \left[\frac{b}{a}\right] + \left[\frac{2b}{a}\right] + \cdots + \left[\frac{(a-1)b}{a}\right] = \frac{1}{2}(a-1)(b-1)$$

olduğunu gösteriniz. ($x$ gerçel sayısı için, $[x]$ ile $x$'ten büyük olmayan en büyük tamsayıyı gösteriyoruz.)

**2.** $a$ ve $b$ aralarında asal pozitif tamsayılar olsun. $x$ ve $y$ negatif olmayan tamsayılar olmak üzere, $ax + by$ biçiminde yazılamayan en büyük pozitif tamsayıyı bulunuz.

**3.** Tek kişilik bir oyunda, $a > b$ pozitif tamsayılar olmak üzere, oyuncu, oyunun her oynanımından sonra, ya $a$ ya da $b$ puan almaktadır. Oyun istenildiği kadar yinelenebilmekte ve toplam puan, oyunun her seferinde alınan puanların toplamı olarak hesap edilmektedir. Toplam puan olarak elde edilemeyen tam olarak 35 pozitif tamsayının bulunduğu ve bu sayılardan birinin de 58 olduğu bilinmektedir. $a$ ve $b$'yi bulunuz.

**4.** $a$, $b$ ve $c$, herhangi farklı ikisi aralarında asal olan pozitif tamsayılar olsun. $x, y, z$ negatif olmayan tamsayılar olmak üzere, $xbc + yca + zab$ biçiminde yazılamayan en büyük tamsayının $2abc - ab - bc - ca$ olduğunu gösteriniz.

### Problem Semineri 95/11, 22 Kasım 1995

**1.** Düzlemde herhangi üçü doğrudaş olmayan yedi nokta verilmiş olsun. Bu noktaları birleştiren doğru parçalarından bazılarını kırmızıya, bazılarını maviye boyuyoruz. Boyanmamış hiçbir doğru parçası kalmadığı gibi, bu yedi noktadan herhangi üçünü birleştiren doğru parçalarından en az biri kırmızıya boyanıyor. En az kaç doğru parçasının kırmızıya boyanması gerektiğini bulunuz.

**2.** Düzlemde herhangi üçü doğrudaş olmayan $n$ nokta verilmiş olsun. Bu noktaları birleştiren doğru parçalarından bir bölümünü kırmızıya, bir bölümünü de maviye boyuyoruz. Bu işlem sonucunda, boyanmamış hiçbir doğru parçası kalmadığı gibi, bütün köşeleri başlangıçtaki nokta kümesine ait ve bütün kenarları kırmızıya boyanmış hiçbir üçgen de oluşmuyor. En fazla kaç doğru parçasının kırmızıya boyanması gerektiğini bulunuz.

**3.** Tavan ve taban yüzeyleri $A_1A_2A_3A_4A_5$ ve $B_1B_2B_3B_4B_5$ beşgenleri olan bir prizma verilmiş olsun. Bu iki beşgenin kenarlarını ve $[A_iB_j]$ $(i, j = 1, 2, 3, 4, 5)$ doğru parçalarını ya kırmızı ya da maviye boyuyoruz. Bu boyama sonucunda, köşeleri prizmanın köşeleri olan ve tüm kenarları aynı renge boyanmış hiçbir üçgen oluşmuyorsa, tavan ve taban beşgenlerinin tüm kenarlarının aynı renge boyanmış olduğunu gösteriniz.

4. Üç boyutlu uzayda herhangi dördü aynı düzlem üstünde bulunmayan dokuz nokta verilmiş olsun. Bu noktaları birleştiren doğru parçalarından bazılarını kırmızıya, bazılarını maviye boyuyor, bazılarını ise boyanmadan bırakıyoruz. Mavi ya da kırmızıya boyanmış doğru parçalarının sayısını $n$ ile gösterirsek, $n$'nin, bu boyama işlemi nasıl yapılırsa yapılsın mutlaka tüm kenarları aynı renkte ve bütün köşeleri başlangıçtaki nokta kümesine ait bir üçgenin oluşmasını zorunlu kılan en küçük değerini bulunuz.

## Problem Semineri 95/12, 6 Aralık 1995

Bir $ABC$ üçgeninin kenar uzunlukları $a, b, c$; $[BC]$, $[CA]$ ve $[AB]$ kenarlarının orta noktaları sırayla $M, N, P$; $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{AMC} = \phi_a$, $\widehat{BNA} = \phi_b$, $\widehat{CPB} = \phi_c$; $S = \text{alan}(ABC)$; ve $n \geq 1$ için

$$\frac{a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}}{(4S)^n} = K_n$$

olsun. Verilenlere göre aşağıdakileri ispatlayınız:

1. $a^2 = b^2 + c^2 - 4S \cot \alpha$.
2. $\cot^2 \phi_a + \cot^2 \phi_b + \cot^2 \phi_c = K_2 - 1$.
3. $\dfrac{1}{\sin^2 \phi_a} + \dfrac{1}{\sin^2 \phi_b} + \dfrac{1}{\sin^2 \phi_c} = K_2 + 2$.
4. Her pozitif $n$ tamsayısı için her üçgende $K_n \geq 3^{1-n/2}$'dir.

## Problem Semineri 95/13, 20 Aralık 1995

Aşağıdaki sorularda $\mathbb{R}$ gerçel sayıları, $\mathbb{R}^+$ pozitif gerçel sayıları, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayıları, $\mathbb{Q}^+$ pozitif rasyonel sayıları, $\mathbb{Z}$ tamsayıları ve $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$ pozitif tamsayıları göstermektedir.

1. Aşağıdaki koşulları sağlayan tüm $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonlarını bulunuz:

(a) Eğer $x < y$ ise $f(x) < f(y)$'dir.

(b) Her $x, y \in \mathbb{N}$ için $f(yf(x)) = x^2 f(xy)$'dir.

2. $F$ ile tüm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının kümesini gösterelim. $A = \{ f \in F : f(0) \neq 0$ ve her $m, n \in \mathbb{Z}$ için $f(n)f(m) = f(n+m) + f(n-m) \}$ olsun.

(a) $f(1) = \frac{5}{2}$ olan tüm $f \in A$ fonksiyonlarını bulunuz.

(b) $f(1) = \sqrt{3}$ olan tüm $f \in A$ fonksiyonlarını bulunuz.

3. $\alpha$ ve $\beta$ gerçel sayılar olmak üzere, her $x, y$ pozitif gerçel sayıları için

$$f(x)f(y) = y^\alpha f\left(\frac{x}{2}\right) + x^\beta f\left(\frac{y}{2}\right)$$

koşulunu sağlayan tüm $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

4. Her $x, y \in \mathbb{Q}^+$ için $f(xf(y)) = f(x)/y$ koşulunu sağlayan tüm $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ fonksiyonları bulunuz.

## Problem Semineri 96/1, 10 Ocak 1996

1. Bir $ABC$ üçgeni ile aynı düzlemli ve $B, C$ noktalarından geçen $O$ merkezli çember veriliyor. $B$ ve $C$ noktalarından sıra ile $BA$ ve $CA$ doğrularına çizilen dikmelerin kesiştiği nokta $D$ olsun. $D$'den $BC$'ye çizilen dikmenin $AO$ doğrusunu kestiği nokta ile $A$ noktasının $O$ noktasına göre simetrik olduğunu kanıtlayınız.

2. Düzlemde bir $S$ çemberi ve bir $A$ noktası verilmiş olsun. Merkezi $S$ üzerinde bulunan ve $A$ noktasından geçen çemberlerden birbirini dik kesenlerin kesişim noktalarının geometrik yerini bulunuz.

3. Bir çember üzerinde verilmiş farklı altı noktadan üç tanesini seçerek, bunların oluşturduğu üçgenin ağırlık merkezi ile geri kalan üç noktanın belirlediği üçgenin ortosantrından geçen doğruyu çizelim. Altı noktadan üçü 20 değişik biçimde seçilebileceğine göre, bu şekilde 20 doğru elde edilecektir. Bu doğruların aynı noktadan geçtiğini gösteriniz.

4. Kenar uzunlukları $a, b, c, d$ olan bir $ABCD$ teğetler dörtgeni verilmiş olsun. $P \in [AB]$, $Q \in [BC]$, $R \in [CD]$ ve $S \in [DA]$ noktalarının aşağıdaki koşulları sağlayabilecek şekilde seçilebileceğini gösteriniz:

**(i)** $P, Q, R, S$ noktalarından bir $\delta$ çemberi geçer;

**(ii)** kenar uzunlukları yine $a, b, c, d$ olan herhangi bir $A'B'C'D'$ dörtgeni aldığımızda,

$$\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|P'A'|}{|P'B'|}, \quad \frac{|QB|}{|QC|} = \frac{|Q'B'|}{|Q'C'|},$$
$$\frac{|RC|}{|RD|} = \frac{|R'C'|}{|R'D'|}, \quad \frac{|SD|}{|SA|} = \frac{|S'D'|}{|S'A'|}$$

eşitliklerini sağlayan $P' \in [A'B']$, $Q' \in [B'C']$, $R' \in [C'D']$ ve $S' \in [D'A']$ noktalarından da yine yarıçapı $\delta$'nın yarıçapıyla aynı olan bir çember geçer.

## Problem Semineri 96/2, 28 Şubat 1996

$\mathbb{N}$ pozitif tamsayılar kümesini göstermek üzere, $(F_n)$ Fibonacci dizisi, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ olacak şekilde tanımlanmaktadır.

**1.** **(a)** $\omega = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ için $\omega^n = F_n\omega + F_{n-1}$ olduğunu gösteriniz.

**(b)** Her $m, n \in \mathbb{N}$ için,

$$F_{m+n} = F_m F_n + F_m F_{n-1} + F_{m-1} F_n$$

olduğunu gösteriniz.

**2.** $p$ bir asal sayı olsun.

**(a)** $p \mid F_k$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ olduğunu gösteriniz. $m(p)$ ile bu koşulu sağlayan en küçük pozitif tamsayıyı gösterelim.

**(b)** $n$ negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere, $p \mid F_n$ olması için gerek ve yeter şartın $m(p) \mid n$ olduğunu gösteriniz.

**3.** $p$ bir asal sayı olsun. $m(p)$ sayısı çift ise

**(a)** $p \not\equiv 13 \pmod{20}$ veya $p \not\equiv 17 \pmod{20}$ olduğunu ve

**(b)** $p \equiv 3 \pmod{20}$ ya da $p \equiv 7 \pmod{20}$ olmasının $F_{m(p)-1} \equiv -1 \pmod{p}$ olmasını gerektirdiğini kanıtlayınız.

**4.** Fibonacci dizisinin $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ve $F_{12} = 144$ dışında tam kare olan başka hiçbir teriminin bulunmadığını kanıtlayınız.

## Problem Semineri 96/3, 13 Mart 1996

**1.** Bir küre, bu küre üstünde bir çember ve bu küre üstünde bulunmayan bir $P$ noktası veriliyor. $P$ noktası ile verilen çembere ait noktaları birleştiren doğruların, küreyle verilen çember dışında kesiştikleri noktaların, yine küre üstündeki bir çember üzerinde bulunacağını kanıtlayınız.

**2.** Bir döryüzlünün iki aykırı kenarının orta noktalarından geçen herhangi bir düzlemin, dörtyüzlüyü eşit hacimli iki parçaya ayıracağını kanıtlayınız.

**3.** Bütün yüzleri eşkenar dörtgen olan ve köşelerinden yedi tanesi bir küre üstünde bulunan bir altıyüzlü veriliyor. Bu altıyüzlünün geri kalan sekizinci köşesinin de aynı küre üstünde bulunması gerektiğini gösteriniz.

**4.** Bir küre ve bu kürenin içinde yer alan bir $P$ noktası veriliyor. $P$ noktasından çıkan ve birbirlerine dik olan ışın üçlülerinin küre ile kesiştikleri noktaların belirlediği düzlem üstünde $P$ noktasının dik izdüşümlerinin oluşturduğu geometrik yeri bulunuz.

## Problem Semineri 96/4, 27 Mart 1996

**1.** 18 takımlı bir futbol liginde her takım her hafta tam olarak bir maç yapmaktadır. Sekiz haftalık bir dönem boyunca herhangi iki takım en fazla bir kez karşılaşmışsa, bu dönemin sonunda herhangi ikisi aralarında maç yapmamış en az üç takımın bulunduğunu gösteriniz.

**2.** 1024 tenisçi ustalıklarına göre iyiden kötüye doğru $1, 2, \ldots, 1024$ sayıları ile derecelendiriliyor. Ustalık dereceleri arasındaki fark ikiden büyük olan herhangi iki tenisçi karşılaştığında, derecesi küçük olan diğerini mutlaka yenmektedir. Bunun dışındaki durumlarda ise, her iki tarafın da oyunu kazanması mümkündür. Bu 1024 tenisçi arasında düzenlenen eleme usulü bir turnuvada, onuncu turda oynanan final maçı sonunda şampiyon belli olmaktadır. Şampiyonun ustalık derecesinin en fazla kaç olabileceğini saptayınız.

**3.** $k$ tanesi Avrupa'dan olmak üzere toplam 20 ülkenin katıldığı tek devreli ve lig usulü bir dünya futbol şampiyonası yapılmaktadır. Yalnızca Avrupa takımlarının kendi aralarındaki maçlar dikkate alınarak Avrupa şampiyonu, bütün takımlar arasındaki karşılaşmalara göre de dünya şampiyonu belirlenmektedir. Her maçta galibiyet 2, beraberlik 1, mağlubiyet ise 0 puan getirmektedir. Sonuçta Avrupa şampiyonu olan takımın toplam puanının başka hiçbir takımın toplam puanına eşit olmadığı bilinmektedir. Bu şampiyonada

**(a)** hiçbir maçın beraberlikle sonuçlanmadığı,

**(b)** bazı maçların berabere bittiği

durumlar için ayrı ayrı, Avrupa şampiyonu olan takımın dünya şampiyonasında sonuncu olmasını mümkün kılan $k$ değerlerinden en büyüğünü bulunuz.

**4.** Tek devreli ve lig usulü yapılan bir hentbol turnuvasında, her maçta galibiyet 2, beraberlik 1, mağlubiyet 0 puan getirmektedir. Turnuvanın sonunda, turnuvaya katılan takımların boş olmayan her altkümesi için, bu altkümeye dahil takımlarla yaptığı maçlarda tek sayıda toplam puan kazanmış en az bir takımın bulunduğu görülmüştür. (Bu takımın kendisinin verilen altkümeye dahil olduğu durumlarda, toplam puan doğal olarak bu takımın kendi dışındaki takımlarla yaptığı maçlarda kazandığı toplam puan olarak yorumlanmaktadır.) Bu turnuvaya katılan takımların sayısının çift olduğunu kanıtlayınız.

## Problem Semineri 96/5, 10 Nisan 1996

Her $n > 1$ tamsayısını, $p_1,\ldots,p_t$ farklı asal sayılar ve $\alpha_1,\ldots,\alpha_1$ pozitif tamsayılar olmak üzere, tek türlü $n = p_1^{\alpha_1}\cdots p_1^{\alpha_t}$ olarak yazabiliriz. $P(n)$ ile $\{p_1,\ldots,p_t\}$ kümesini, $E(n)$ ile de $\alpha_1+\cdots+\alpha_t$ sayısını gösterelim. Ayrıca $P(1) = \emptyset$ ve $E(1) = 0$ olsun. Bir $n$ pozitif tamsayısına, aşağıdaki koşulları sağlayan $k > 0$, $a > 0$ $10^k > b > 0$ tamsayıları varsa bir $LB$ sayısı diyeceğiz:

(i) $n = 10^k a + b$;

(ii) $P(n) = P(a) \cup P(b)$;

(iii) $E(n) = E(a) + E(b)$.

**1.** $n < 100$ pozitif bir tamsayı ise, $n$'nin bir $LB$ sayısı olmadığını gösteriniz.

**2.** 1000'den küçük tüm $LB$ sayılarını bulunuz.

**3.** Eğer $n$ bir $LB$ sayısı ise ve $n$'nin tam olarak $d$ rakamlı bir asal çarpanı varsa, $n$'nin tam olarak $2d+1$ rakamının bulunduğunu gösteriniz.

**4.** Bir $LB$ sayısına başka bir $LB$ sayısının 10 katı değilse ilkel diyeceğiz. Sonsuz sayıda ilkel $LB$ sayısının bulunduğunu gösteriniz.

## ÇÖZÜMLER

### Problem Semineri 95/9

**1.** $n$ asal değilse, $1 < n_1, n_2$ ve $n = n_1 n_2$ olacak şekilde $n_1, n_2$ tam sayıları bulunur. $y = x^{n_1}$ alırsak,

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 + x + \cdots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x} \\ &= (x^{n_1-1} + \cdots + 1)(y^{n_2-1} + \cdots + 1) \end{aligned}$$

olur.

Şimdi de $n$'nin asal olduğu duruma bakalım. $p(x)$'in indirgenebildiğini farzedelim. O zaman $p(x+1)$ de indirgenebilir. Öte yandan

$$p(x+1) = \frac{(x+1)^n - 1}{(x+1)-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{k-1}$$

olur. $n$ asal, $n \mid \binom{n}{k}$ $(k = 1,\ldots,n-1)$, $n^2 \nmid \binom{n}{1}$ ve $n \nmid \binom{n}{n}$ olduğundan, Eisenstein kriterine göre $p(x+1)$, dolayısıyla da $p(x)$ indirgenemez.

**2.** Polinomun tamsayılar üstünde indirgenebildiğini farzedelim. O zaman $p(x)$, 2 moduna göre de indirgenebilir ve çarpanlarından birinin birinci ya da ikinci dereceden olması gerekir. Bu durumda $p(x)$'in 2 moduna göre çarpanlarından biri $x$, $x+1$ ya da $x^2+x+1$ olur. Oysa

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2(x-1)(x^2+x+1) + 1 \\ &\equiv x^2(x+1)(x^2+x+1) + 1 \pmod 2 \end{aligned}$$

olduğundan, bu olanaksızdır.

**3.** $p(\pm 1) \neq 0$ ve $p(\pm 3) \neq 0$'dır. Dolayısıyla $p(x)$'in katsayıları tamsayılar olan birinci dereceden bir çarpanı yoktur. Şimdi $2 \le k \le n-2$ ve $a_0,\ldots,a_k$ ile $b_0,\ldots,b_{n-k}$ tamsayılar olmak üzere

$$\begin{aligned} p(x) = (a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0)(b_{n-k}x^{n-k} \\ + \cdots + b_1 x + b_0) \end{aligned}$$

olduğunu farzedelim. O zaman $a_0 b_0 = 3$ olur. Genelliği yitirmeden $3 \mid a_0$ ve $3 \nmid b_0$ olduğunu kabul edelim. Öte yandan $a_1,\ldots,a_k$ sayılarının hepsi 3 ile bölünemeyeceğinden, $3 \mid a_i$ $(i = 0,\ldots,t-1)$ ve $3 \nmid a_t$ olacak şekilde bir $t \in \{1,\ldots,k\}$ vardır. Ancak $1 \le t \le k \le n-2$ olduğundan, $a_t b_0 + a_{t-1} b_1 + \cdots + a_0 b_t = 0$ olur. Burada $3 \nmid a_t b_0$ ve $3 \mid a_{t-i} b_i$ $(i = 1,\ldots,t)$ olması bir çelişki yaratır.

**4.** $x^5+mx+n = (x^2+ax+b)(x^3+cx^2+dx+e)$ olduğunu varsayalım. Katsayıları karşılaştırarak

$$n^2 + (4am - 11a^5)n + a^2(m+a^4)(4m-a^4) = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$n = \frac{1}{2}\left(11a^5 - 4am \pm 5a^3\sqrt{5a^4 - 4m}\right)$$

olur. $n$' nin tamsayı olabilmesi için, $5a^4 - 4m = z^2$ olacak şekilde bir $z$ tamsayısı bulunmalıdır. $m = \pm 1$ olduğuna göre, $z^2 - 5a^4 = \pm 4$ olur. Burada $x = a^2$, $y = \frac{1}{2}(x+z)$ dönüşümlerini yaparsak, $y^2 - xy - x^2 = \pm 1$ eşitliğini elde ederiz. Bu denklemi sağlayan tamsayılar Fibonacci sayılarıdır. Öte yandan, tam kare olan Fibonacci sayıları 0, 1 ve 144'tür. Dolayısıyla $x = 0$, $x = 1$ ya da $x = 144$'tür. $x = 0$ ise, $m = -1$ ve $n = 0$ olur. Bu durumda $x^5 + mx + n = x^5 - x$ polinomunun birinci dereceden çarpanı vardır. Bu nedenle $x = 1$ ya da $x = 144$, yani $a = \pm 1$ ya da $a = \pm 12$'dir.

$m = 1$ durumunda, $a = \pm 1$ ise, $n = \pm 1$ ya da $n = \pm 6$ olur; $a = \pm 12$ ise, $n$ için tamsayı çözüm bulunmaz. $m = -1$ durumunda ise, $a = \pm 1$ için, $n = 0$ ya da $n = \pm 15$; $a = \pm 12$ için de $n = \pm 22440$ ya da $\pm 2\,759\,640$ olur. Öte yandan, $n = 0$ dışındaki tüm durumlar için $x^5 + mx + n$ polinomunun ikinci ve üçüncü dereceden çarpanlarının indirgenemediği kolaylıkla görülür.