PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A126. $32n - 7 = m^2$ koşulunu sağlayan sonsuz çoklukta (m, n) tamsayı çifti olduğunu gösteriniz.

A127. Çevresi bir birim olan ikizkenar üçgenlerden alanı en büyük olanı bulunuz. (*Burhan Bursevi*)

A128. İki merkezli bir $ABCD$ dörtgeninin alanı S, köşegen uzunlukları e ve f ise, $ef \geq 2S$ eşitsizliğinin sağlandığını ve eşitliğin ancak $ABCD$ harmonik bir dörtgen ise geçerli olduğunu gösteriniz. (*Dinçer Akay*)

A129. Her noktada türevli ve her $x, y \in \mathbb{R}$ için $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy$ özdeşliğini sağlayan bütün $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

A130. Bir ABC üçgeninin çevrel çember merkezi O, yarıçapı R, içteğet çember merkezi I ve yarıçapı r olsun. $[OI]$'nın ortasının kenarlara uzaklıklarının toplamı $\frac{1}{2}(R+4r)$'dir; kanıtlayınız. (*Ergün Yaraneri*)

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y126. Dışbükey ve aldığı değerler alttan ve üstten sınırlı olan bütün $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz. (Dışbükey fonksiyonlar için [1]'e bakınız.)

Y127. A bir açık aralık, $f : A \to \mathbb{R}$ dışbükey ve $c \in A$ olsun. f'nin c noktasında türevli olabilmesi için gerek ve yeter şartın

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) + f(c-h) - 2f(c)}{h} = 0$$

olduğunu gösteriniz. (Dışbükey fonksiyonlar için [1]'e bakınız.)

Y128. $a_1 = 2$ ve her tamsayı $n \geq 1$ için $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$ şeklinde tanımlanan (a_n) dizisi için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$$

toplamını hesaplayınız.

Y129. Dışbükey düzgün bir beşgenin alanının, köşegenlerinin oluşturduğu yıldızın ortasındaki küçük düzgün beşgenin alanına oranını hesaplayınız. (*Hüseyin Demir*)

Y130. Bir ABC üçgeninin içinde alınan birbirine dıştan teğet eş iki çember $[BC]$'ye, çemberlerden biri $[AB]$'ye ve öteki $[AC]$'ye teğet olup, ortak iç teğet $[BC]$'yi D'de kesiyor. Benzer çizimler $[CA]$ ve $[AB]$ için yapıldığında benzer noktalar E ve F ise, $[AD]$, $[BE]$ ve $[CF]$'nin noktadaş olduğunu gösteriniz. (*Hüseyin Demir*)

ÇÖZÜMLER

A116. Bir $ABCD$ kirişler dörtgeninde $[AC]$ çaptır ve $|DC| < |CB| < |BA| < AD|$ geçerlidir. Çemberin çapı r olduğuna göre, alan$(ABCD) \leq 2r^2$ olduğunu gösteriniz. (*Cuma Arslan*)

Çözüm. ABC üçgeninde B köşesine ait yüksekliğin alabileceği en büyük değer, AC çap olduğundan, r'ye eşittir. Buradan

$$\text{alan}(ABC) = \frac{1}{2}|AC|h_B \leq \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot r = r^2$$

çıkar. Aynı şekilde alan$(ABD) \leq r^2$ ve sonuçta alan$(ABCD) \leq r^2 + r^2 = 2r^2$ bulunur.

(**Çözenler:** *Atasagun Baykal, Levent Koçoğlu, Ali Işıtan, Semih Özlem, Samanyolu Problem Grubu, Fatih Selimefendigil, Ali Törün.*)

A117. $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{0} 2^k k^2$ toplamını hesaplayınız. (*Ergün Yaraneri*)

Çözüm. İstenen toplam

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \left(\frac{1}{2}\right)^k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} k^2 \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

limitine eşittir. $k^2 x^k = x^2 (x^k)'' + x(x^k)'$ özdeşliğinden

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 x^k = x^2 \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)'' + x \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)'$$

elde edilir. $x \neq 1$ için

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

sağlanır. Türev alınarak

$$T_n'(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2},$$

$$T_n''(x) = \frac{1}{(x+1)^3}[(n^2-n)x^{n+1} - 2(n^2-1)x^n + (n^2+n)x^{n-1} - 2]$$

bulunur. $x = \frac{1}{2}$ alınarak sadeleştirmeler yapılırsa

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\left(\frac{1}{2}\right)^n = 6 - \frac{n^2+4n+6}{2^n}$$

elde edilir.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4n+6}{2^n} = 0$$

olduğundan, aranan toplam $\sum_{k=-\infty}^{0} 2^k k^2 = 6$'dır.

(**Çözenler:** *Murat Aygen, Atasagun Baykal, Semih Özlem, Samanyolu Problem Grubu, Fatih Selimefendigil, Ali Törün.*)

A118. Bir çemberin dışındaki bir A noktasından, çembere B ve C noktalarında değen teğetler ile A'dan geçen ve çemberi birbirinden farklı E ve G noktalarında kesen bir doğru çiziliyor. AE ve BC doğrularının kesim noktası F ise,

$$\frac{|AE|}{|AG|} = \frac{|EF|}{|FG|}$$

olduğunu gösteriniz. (*Recep Zihni*)

Çözüm. $|AB|$, $|AC|$, $|AE|$, $|EF|$, $|FG|$, $|BF|$, $|FC|$ uzunlukları sırayla x, x, u, v, t, y, z ile gösterilsin. ABC üçgeninde Stewart bağıntısından $(u+v)^2 = x^2 - yz$ ve F noktasının çembere göre kuvvetinden $yz = vt$ bulunur; dolayısıyla $(u+v)^2 = x^2 - vt$ olur. A noktasının çembere göre kuvvetinden de $x^2 = u(u+v+t)$ yazılırsa, $(u+v)^2 = u(u+v+t) - vt$ ve buradan $v/t = u/(u+v+t)$, yani $|AE|/|AG| = |EF|/|FG|$ elde edilir.

(**Çözenler:** *Atasagun Baykal, Cemal Özboğa, Samanyolu Problem Grubu.*)

A119. ABC üçgeninde $\widehat{ABC} = 30°$ ve $\widehat{ACB} = 45°$'dir. $[AB]$ üzerinde $|AL| = |LB|$ olacak şekilde bir L noktası, $[BC]$ üzerinde de $\widehat{LKA} = 30°$ olacak şekilde bir K noktası alınıyor. $[AK] \cap [LC] = \{M\}$ ise, $\widehat{CMA}$)'yı hesaplayınız. (*Alaattin Aktaş*)

Çözüm. $[BC]$ üzerinde $|LA'| = |LB|$ olacak biçimde alınan A' noktası için, $BA'A$ üçgeni bir dik üçgen, ALA' üçgeni bir eşkenar üçgen, $AA'C$ üçgeni bir ikizkenar dik üçgen, $LA'C$ üçgeni bir ikizkenar üçgen, $\widehat{LCA'} = 15°$ ve $\widehat{ACL} = 30°$ olur. $[AL]$, K ve C noktalarından eş açılarla görüldüğünden, $ALKC$ dörtgeni bir kirişler dörtgeni ve dolayısıyla $\widehat{LAK} = 15°$'dir Buradan $\widehat{CMA} = 60°$ bulunur.

(**Çözenler:** *Atasagun Baykal, Ali Işıtan, Semih Özlem, Samanyolu Problem Grubu, Ali Törün, Erol Ünal, Adem Yekelek.*)

A120. 1 ve 1000 dahil olmak üzere, 1'den 1000'e kadar tüm doğal sayıların rakamları toplamını hesaplayınız. (*Cuma Arslan*)

Çözüm. 000'dan 999'a kadar olan sayılarda toplam $3 \cdot 1000 = 3000$ rakam vardır. Her rakam eşit sayıda tekrarlandığından, 000'dan 999'a kadar olan sayılarda $0, 1, 2, \ldots, 9$ rakamlarının her biri $3000/10 = 300$ kere görünür. Bu rakamların toplamı

$$300(0+1+2+\cdots+9) = 300 \cdot 45 = 13500$$

tür. 1000 sayısı için de $1+0+0+0 = 1$ ekleyince aranan toplam 13501 olarak bulunur.

(**Çözenler:** *Atasagun Baykal, Cemal Özboğa, Samanyolu Problem Grubu, Erol Ünal.*)

Y116. Dar açılı bir ABC üçgeninde A, B, C köşelerinden geçen yükseklikler çevrel çemberi ikinci defa A', B', C' noktalarında keserlerse ve $A'B'C'$ üçgeninin alanı S ile gösterilirse,

$$|AA'|^2 \sin 2A + |BB'|^2 \sin 2B + |CC'|^2 \sin 2C > 6S$$

eşitsizliğini ispatlayınız. (*Rauf Harput*)

Çözüm. Dar açılı bir üçgende yükseklikler, yükseklik ayaklarını köşe kabul eden üçgenin açıortaylarıdır. $|A'B'| = x$, $|B'C'| = y$, $|A'C'| = z$ olmak üzere $2S = xz \sin 2A$'dır. B ve C için de benzer eşitlikler yazılarak

$$6S = xz \sin 2A + xy \sin 2B + yz \sin 2C$$

elde edilir. $[AA'] \cap [B'C'] = \{P\}$, $|PC'| = u$, $|PB'| = v$, $|AP| = m$, $|A'P| = n$ denirse, $A'B'C'$ üçgeninde $[A'P]$ açıortayının uzunluğu $|A'P|^2 = xz - uv$ ile hesaplanır. P'nin çembere göre kuvvetinden $uv = mn$ yazılarak $n|AA'| = xz$ bulunur. P, $[AA']$'nün bir iç noktası olduğundan $|AA'| > |A'P|$ ve $|AA'|^2 > n|AA'|$, yani $|AA'|^2 > xz$'dir. Benzer biçimde diğerleri de yazılır. A, B, C dar açılar olduklarından sinüsleri pozitiftir. Buradan $|AA'|^2 \sin 2A > xz \sin 2A$ ve $|B'|^2 \sin 2B > xy \sin 2B$ yazılıp, taraf tarafa toplama ile istenen eşitsizlik elde edilir.

(**Çözenler:** *Atasagun Baykal, Samanyolu Problem Grubu.*)

Y117. Çevrel çemberinin yarıçapı R olan düzgün bir n-gende, bir köşenin diğerlerinden uzaklıklarının toplamının $2R \cot \pi/2n$ ve çarpımının nR^{n-1} olduğunu gösteriniz. (*Ferit Öktem*)

Çözüm. Düzgün çokgenin köşeleri A_0, A_1, A_2, ..., A_{n-1} olsun. Bilinen

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sin 2k\alpha = \frac{\sin(n-1)\alpha \sin n\alpha}{\sin \alpha}$$

bağıntısı kullanılarak,

$$\sum_{k=1}^{n-1} |A_0A_k| = \sum_{k=1}^{n-1} 2R \sin \frac{k\pi}{n} = 2R \cot \frac{\pi}{2n}$$

bulunur.

Gene bilinen

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

bağıntısı kullanılarak,

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n-1} |A_0A_k| &= \prod_{k=1}^{n-1} 2R \sin \frac{k\pi}{n} = 2^{n-1} R^{n-1} \frac{n}{2^{n-1}} \\ &= nR^{n-1}\end{aligned}$$

elde edilir.

Y118. Bir ABC üçgeninin alanı S, çevrel çember yarıçapı R ve içteğet çember yarıçapı r ise,

$$\frac{27Rr^3}{2} \le S^2 \le \frac{r(4R+r)^3}{27}$$

olduğunu gösteriniz. (*Dinçer Akay*)

Çözüm. ABC üçgeninde $bc \sin A = ah_a$ ve $h_a = c \sin B = b \sin C'$ olduğundan, $h_a \sin A = a \sin B \sin C$ ve benzer yolla $h_b \sin B = b \sin A \sin c$ ile $h_c \sin C = c \sin A \sin B$ bulunur; bu eşitliklerden $h_a h_b h_c = 2S^2/R$ elde edilir. Aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden çıkan

$$\frac{1}{r^3} = \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)^3 \ge 27 h_a h_b h_c = \frac{27R}{2S^2}$$

bize eşitsizliklerden soldakini verir.

ABC üçgeninn dışteğet çember yarıçapları r_a, r_b, r_c için

$$r r_a r_b r_c = \frac{S^4}{u(u-a)(u-b)(u-c)} = S^2$$

ve

$$\begin{aligned}r_a + r_b + r_c - r &= S\left(\frac{1}{u-a} + \frac{1}{u-b} + \frac{1}{u-c} - \frac{1}{u}\right) \\ &= \frac{abc}{S} = 4R\end{aligned}$$

sağlanır. Yine aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden çıkan

$$(4R+r)^3 = (r_a + r_b + r_c)^3 \ge 27 r_a r_b r_c = \frac{27S^2}{r}$$

istenen eşitsizliklerden sağdakini verir.

(**Çözen:** *Atasagun Baykal.*)

Y119. Eksen uzunlukları $2a$ ve $2b$ olan bir elipsin herhangi bir noktasından çizilen normalinin elips içinde kalan kısmının uzunluğunun alabileceği en büyük ve en küçük değerleri bulunuz. (*Süreyya Tevfik*)

Çözüm. Elipsin denklemi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dir. Simetriden dolayı $b \ge a$ olduğunu kabul edebiliriz. Elipsin üzerinde bir (x_0, y_0) noktası alalım. Bu noktada teğetin eğimi $\frac{-b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}$ olduğundan, normalin denklemi

$$y - y_0 = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x - x_0),$$

ya da sadeleştirilmiş haliyle

$$y = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0} x + \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) y_0 = mx + n$$

olarak bulunur. Normal, elipsi (x_0, y_0) ve (x_1, y_1) noktalarında kessin. $y_i = mx_i + n$ $(i = 0, 1)$ olduğundan, kirişin uzunluğunun karesi

$$d^2 = (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 = (1 + m^2)(x_0 - x_1)^2$$

olarak bulunur. x_0, x_1 reel sayıları

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+n)^2}{b^2} = 1,$$

yani

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)x^2+\frac{2mn}{b^2}x+\left(\frac{n^2}{b^2}-1\right)=0$$

denkleminin kökleridir. Buradan

$$\frac{(x_0-x_1)^2}{4}=\frac{\frac{m^2n^2}{b^4}-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)\left(\frac{n^2}{b^2}-1\right)}{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)^2}$$

bulunur.

$$\frac{y_0^2}{b^2}=1-\frac{x_0^2}{a^2}$$

olduğunu kullanarak sadeleştirmeleri yaparsak,

$$d^2=\frac{4b^2[(b^2-a^2)x_0^2+a^4]^3}{[(b^4-a^4)x_0+a^6]^2}$$

bulunur. $x_0^2=t$ dersek, $|x_0|\leq a$ olduğundan t değeri $[0,a^2]$ aralığındadır. $G=b^2-a^2\geq 0$ kısaltmasını da kullanırsak istenen uzunluğun karesi

$$f(t)=\frac{4b^2(Gt+a^4)^3}{[(a^2+b^20Gt+a^6]^2}$$

ile ifade edilir. $f'(t)$'ye eşit olan şu ifade

$$\frac{4b^2G(Gt+a^4)^2[5(a^2+b^2)Gt+5a^6+2b^2a^4]}{[(a^2+b^2)Gt+a^6]^3}$$

ancak t negatifken 0 olduğundan, f'nin minimum ve maksimum değerleri $t=0$ ve $t=a^2$'de alınır. Yani en küçük ve en büyük kirişler sırayla $x=0$ ve $x=\pm a$ noktalarındadır. O halde aranan en büyük ve en küçük değerler $2b$ ve $2a$'dır.

(**Çözen:** *Atasagun Baykal.*)

Y120. $[AB]$ ve $[CD]$ kenarları paralel olan $ABCD$ yamuğunun A ve D köşelerinden çizilen içaçıortaylar X, C ve B köşelerinden çizilen içaçıortaylar Y noktasında kesişiyor. $|XY|$'yi yamuğun kenar uzunlukları cinsinden ifade ediniz. (*Coşkun Üstün*)

Çözüm. $\hat{A}$ ile $\hat{D}$ ve $\hat{B}$ ile $\hat{C}$ bütünden açılar olup açıortayları birbirine diktir. $\widehat{A\times D}=90°$ olduğundan, $[DA]$'nın orta noktası E olmak üzere, $|EX|=|EA|$ ve dolayısıyla $EX \parallel AB$'dir. $[BC]$ nin orta noktası F olmak üzere $FY \parallel AB$'dır. $EF \parallel AB$ olduğundan, E,X,Y,F aynı doğru üzerindedir. $|EF|$ orta taban uzunluğu, $|EX|=\frac{1}{2}|DA|$ ve $|FY|=\frac{1}{2}|BC|$ olduğundan,

$$|XY|=\frac{1}{2}(|AB|+|CD|-|AD|-|BC|)$$

bulunur.

(**Çözenler:** *Atasagun Baykal, Ali Işıtan, Cemal Özboğa, Samanyolu Problem Grubu, Ali Törün, Erol Ünal, Adem Yekelek.*)

KAYNAKÇA

[1] H. T. Kaptanoğlu, *Dışbükey Fonksiyonlar*, *Matematik Dünyası*, 6, sayı 1, 11–18 (1996).

Matematikçiler Derneği kuruldu. Olağan ilk genel kurul toplantısını 18 Kasım 1995'te yapan derneğin adresi Strasbourg cad., No: 18/18, Sıhhiye, Ankara; telefon numarası (312) 231 31 73. Derneğe üye olmak isteyenlerin, Karayolları Genel Müdürlüğü, Bilgi-İşlem Şubesi Müdürlüğü'nde (312) 419 14 30 / 361 numaralı telefondaki Gülten Öner'e başvurmaları gerekiyor.

Derneğin amaçları "matematik mezunları arasında birlik ve dayanışmayı sağlamak, mezunların meslek sorunlarının çözümlenmesi ve mesleki gelişmenin sağlanması için bilimsel araştırma ve yayın çalışması yapmak, matematikçilerin haklarını yurt çıkarları doğrultusunda savunmak" olarak özetleniyor. Bu yönde dernek, anayasal statü olan *oda* kimliğini kazanmayı da hedefliyor.