YİNE GEOMETRİK EŞİTSİZLİKLER ÜZERİNE

John Rigby *
Çeviren: Ahmet Delil

20 yılı aşkın bir zaman önce Hacettepe Üniversitesi'nde (İngilizce olarak) 12 ay ders verdim. Matematiği Türkçe yazmayı hiç denemedim ve o zamanlar öğrendiğim Türkçe'yi de epey unuttum, ama bana *Matematik Dünyası*'nın iki sayısını ödünç veren ve bu makaleyi Türkçe'ye çevirmeyi nazikçe kabul eden araştırmacılarımızdan Ahmet Delil'e üç kelimeden oluşan *çok teşekkür ederim* demeyi biliyorum.

Emre Alkan'ın makalesi [**1**] hoşuma gitti, çünkü bana geometrik eşitsizlikler üzerine yaptığım çalışmaları anımsattı ve konu üzerinde tekrar düşünmemi sağladı. Hep güzel olur sonuçların yeni ispatlarını veren birilerinin olması. Aşağıda Emre Alkan'ın makalesindeki bazı problemler hakkında düşüncelerim var. Kolay izlenebilmesi için [**1**]'deki numaralanmamış problemleri numaralandırdım.

[**2**] ve [**3**], geometrik eşitsizlikler üzerine yazılmış önemli iki kitaptır. [**2**] kolay anlaşılabilir ve 150 sayfadır. Bu kitap birçok yeni araştırma için ilham kaynağı oldu ve 700 sayfalık ansiklopedik birçok eski ve yeni çalışmayı içeren [**3**]'ün yayınlanmasına yol açtı.

Problem 1.

Şekil 1'deki gibi, alanı S, ağırlık merkezi G olan bir ABC üçgenini ele alalım. Bu durumda

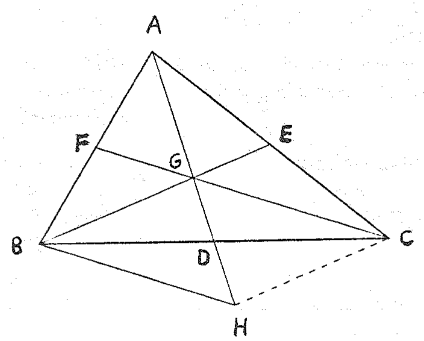
$$4S \leq \sqrt{3}(|GB||GC|+|GC||GA|+|GA||GB|) \quad (1)$$

eşitsizliğini ispatlamak istiyoruz. Şekil 1'de H noktasını $\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{DH}$ (yani $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GH}$) olacak biçimde seçelim. Bu durumda $BHCG$ bir paralelkenar ve BHG üçgeni, kenar uzunlukları $|GA|$, $|GB|$ ve $|GC|$ olan bir üçgen olur. Bu üçgenin kenarlarını a, b, c ve alanını Δ ile gösterelim. Böylece $\Delta = S/3$ olacaktır. (1) eşitsizliği şimdi şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$bc + ca + ab \geq 4\sqrt{3}\Delta. \quad (2)$$

* University of Wales, College of Wales öğretim üyesi

Bu eşitsizlik BHG üçgeninin kenarları ile alanı arasında kurulmuş bir eşitsizliktir. BHG üçgeni ile başlayarak şeklimizi tekrar oluşturabiliriz. Böylece (1) ve (2) eşitsizliklerinin denk olduğunu, yani birinin diğerinden elde edilebildiğini görürüz, ancak (2) daha kolay ispatlanabilir. Genel olarak $|GA|$, $|GB|$, $|GC|$ ve S'yi içeren herhangi bir eşitsizliğe karşılık a, b, c ve Δ'yi içeren bir eşitsizlik vardır ve bunun tersi de doğrudur.



Şekil 1

(2) eşitsizliği [**2**, §4.5]'te vardır. [**2**]'deki bir başka eşitsizlik de

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\Delta, \quad (3)$$

eşitsizliğidir; bu da [**2**, §4.4]'tedir. Dahası, [**2**]'de olmayan başka bir eşitsizlik

$$2(bc + ca + ab) - (a^2 + b^2 + c^2) \geq 4\sqrt{3}\Delta \quad (4)$$

eşitsizliğidir, ancak bunu [**3**, s. 179]'da buldum. $\sum bc = bc+ac+ab$, $\sum a^2 = a^2+b^2+c^2$, vb. olarak tanımlayacak ve

$$\sum a^2 \geq \sum bc \geq 2\sum bc - \sum a^2 \geq 4\sqrt{3}\Delta \quad (5)$$

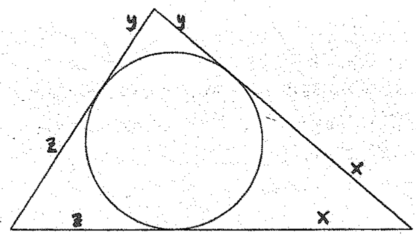
olduğunu ispatlayacağız. O zaman (4) eşitsizliğinin (3)'ten, (3) eşitsizliğinin de (2)'den daha güçlü olduğu ortaya çıkacaktır. (4) eşitsizliğini kendime şu soruyu sorarak elde ettim: "$P(a, b, c)$

simetrik, homojen bir ikinci derece polinomu olmak üzere, $a = b = c$ iken eşitliğin sağlandığı $P(a,b,c) \geq 4\sqrt{3}\Delta$ şeklindeki en uygun ya da en güçlü eşitsizlik nedir?" En uygun eşitsizlikler için okuyucuya [4] önerilir, ancak (5)'in ispatı zor değil.

(5)'in İspatı. $x = (b+c-a)/2$, $y = (a+c-b)/3$ ve $z = (a+b-c)/3$ pozitif sayıları kullanılarak, bir üçgenin a, b, c kenarları $a = y+z$, $b = z+x$, $c = x+y$ biçiminde yazılabilir. Bunu geometrik olarak Şekil 2'den görebiliriz. Bu durumda, (5)'teki ilk iki eşitsizlik $\sum x^2 - \sum yz \geq 0$ olarak yazılabilir ve kolayca ispatlanabilir, çünkü (2) ile çarpıldığında $(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2 \geq 0$ haline dönüşür. Ayrıca,

$$2\sum bc - \sum a^2 > 0 \qquad (6)$$

olduğunu görmeliyiz. Bu da doğrudur, çünkü x, y, z cinsinden yazdığımızda $4\sum yz > 0$ haline dönüşür.



Şekil 2

(5)'teki son eşitsizlik olan (4)'ü ispatlamak için, kenarları a, b, c olan bir üçgenin alanına ilişkin Heron formülünü, yani s yarı çevre olmak üzere, $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ formülünü kullanacağız. x, y, z cinsinden yazılınca bu formül $\Delta = \sqrt{xyz(x+y+z)}$ haline dönüşür. Böylece (4)'ün her iki yanının karesi alınarak

$$16\left(\sum yz\right)^2 \geq 48xyz(x+y+z), \qquad (7)$$

veya buna denk olarak

$$8\sum x^2(y-z)^2 \geq 0 \qquad (8)$$

eşitsizliği bulunabilir. Bu son eşitsizlik doğrudur, çünkü sol tarafı üç karenin toplamıdır. Şimdi (7)'nin her iki yanının karekökünü aldığımızda, ki bunu yapabiliriz çünkü (6) doğrudur, elde edeceğimiz (4) eşitsizliğidir. Ayrıca, ancak $x = y = z$ (eşkenar üçgen) durumunda (8)'de eşitlik vardır. □

İlgi çekicidir ki (2), (3) ve (4) eşitsizliklerinden en güçlü olanı, kareler alıp x, y, z cinsinden ifade ettiğimizde en basit formdadır. ((2) ve (3)'ün karesini alıp ne elde ettiğinizi görün!) Burada görüldüğü gibi, bir sonucu ispatlamaya çalıştığımızda daha genel, daha iyi ya da daha güçlü bir şeyi ispatlamak çoğu kez daha kolaydır.

Problem 3.

$\sum a^4 - 2\sum b^2c^2 + \sum a^2 - bc$ ifadesi ($\sum$ sembolü evvelki anlamında kullanılmak üzere) daha önceki gibi x, y ve z cinsinden yazıldığında pozitif olan

$$\sum x^2(y-z)^2 + \frac{1}{2}\sum yz(y-z)^2$$

haline dönüşür ve eşitlik sadece $x = y = z$, yani eşkenar üçgen halinde görülür. $a = b = c$ halinde eşitlik veren bütün simetrik dördüncü dereceden polinom eşitsizlikleri üzerine genel bir inceleme [4]'te verilmiştir. Ancak [4]'te dikkatsizce yapılmış bir hata var: 198. sayfanın 11. satırı

$$B = \frac{1}{2}\left[-\sum a^4 + 2\sum a^3(b+c) - 2\sum b^2c^2 - \sum a^2bc\right]$$
$$\geq 0$$

şeklinde olmalı.

Problem 4.

$\sum$ sembolü yine evvelki anlamında kullanılmak üzere,

$$\sum \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{5}{8} + \frac{r}{4R}$$

eşitsizliğini [2] veya [3]'te bulamadım, ancak daha zayıf olan

$$\sum \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{3}{4}$$

eşitsizliği [2, §2.15]'te var. Daha zayıf, çünkü $\frac{r}{R} \leq \frac{1}{2}$'dir ve böylece $\frac{5}{8} + \frac{r}{4R} \leq \frac{3}{4}$ olur.

$$\sum \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{r}{4R} \qquad (9)$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu tahmin ettim ancak ispatlayamadım. Eğer doğruysa, (9)'un bu tipteki eşitsizliklerin en güçlüsü olduğu söylenebilir, çünkü B ve C açıları eşit olan bir ikizkenar üçgende, B ve C'yi 90°'ye yaklaştırdığımızda $r/R \to 0$ olurken

$$\sum \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \to \frac{1}{2}$$