

## NEDEN BİRÇOK ÖĞRENCİ CALCULUS DERSİNDE ZORLANIYOR?

Deborah Hughes Hallett \*

**Editörün Notu.** Bu yazıda sözü geçen *calculus* dersi, teknik dallardaki hemen hemen tüm üniversite öğrencilerinin birinci sınıfta almak zorunda oldukları ve lise üçüncü sınıfta da konularından bir kısmı işlenmeye çalışılan matematik dersidir. Türkçe’de analiz veya türevsel ve integral hesap adıyla da geçmektedir. Yalnız bu iki terim *calculus*’un tam karşılığı değildir; analiz bütün ispatlarıyla *calculus*’un teorisidir; öte yandan *calculus* dersinde genellikle türev ve integralden daha fazla konu vardır, analitik geometri, vektörler, seriler gibi. Bu nedenle Türkçe olmamasına rağmen, yazının aşlındaki *calculus* sözünü değiştirmedik.

Tüm dünyada üniversite öğrencileri *calculus* dersi için çaba sarfetmektedirler. Bu çabaya rağmen pek çoğu başarısız olmaktadır. Başarısız olduklarında, harcanan zaman boşa gitmiş ve birçok düş de yıkılmış olur. Öğretim elemanları da, başarısız öğrencilere pek çok şeyi tekrar öğretmek zorunda kalırlar. Öğrencilerin mühendis veya temel bilimci olma hedefleri de kaybolur. Buradaki amacım, Türkiye’de ve başka yerlerdeki bu durum hakkında ve bunun nasıl önlenebileceği konusunda bir şeyler söylemektir.

ABD’nin çeşitli üniversitelerinde ve Harvard’da birçok defa *calculus* öğretmiş olmam ve Orta Doğu Teknik Üniversitesi’ne 1981–1982 yıllarında misafir öğretim görevlisi olarak gelmem bana kıyaslamam için iyi bir imkân sağladı. ODTÜ’de olmaktan o kadar memnun kaldım ki 1984’te bir dönemliğine tekrar geri geldim. Yüzlerce öğrenciye *calculus* öğrettim ve öğrencilerin *calculus* öğrenmekte neden güçlük çektikleriyle ilgilenmeye başladım.

Beni ilk şaşırtan, öğrencilerin üniversiteye giriş sınavları sonuçlarıyla, *calculus* dersinde başarılı olmaları arasında çok az bir ilişkinin olmasıydı. Ancak, öğrencilerin yaptığı hatalar beni daha az şaşırttı. Birçok hata Harvard’daki öğrencilerin yaptığı hatalara çok fazla benzi-

yordu. İki üniversitede de yaptığım gözlemler sonucu, çalışmasına rağmen başarılı olamayan öğrencilerin başarısızlıklarının nedeninin *calculus*’taki fikirleri zor bulmalarından değil de, *calculus* öncesi bilgilerinin yetersiz olmasından kaynaklandığını gördüm.

Örneğin, ODTÜ’de denklem çözemeyen, iki dereceli polinomun köklerini bulamayan, kesirli sayıları toplayamayan (esasında birçoğu kesirli bir ifade gördüklerinde otomatik olarak bölümleri çarpıyorlardı), polinomları çarpanlara ayıramayan veya üstel fonksiyonlarla rahatlıkla uğraşamayan birçok öğrenciyle karşılaştım. Birçokları da fonsiyonlarla ilgili notasyonu, logaritmayı, trigonometriyi bilmiyorlardı. Fakat şunu da söylemem gerekir: Harvard’da ve ABD’nin diğer üniversitelerinde aynı altyapıya sahip olan öğrenciler var. Ancak aradaki fark şudur: Bu gibi öğrenciler *calculus* sınıflarında değil, çoğunlukla *calculus* öncesi sınıflarda bulunurlardı. Buna rağmen ODTÜ’dekibu gibi öğrencilere *calculus* öğretmeye çalıştım, üstelik de daha zor bir *calculus* dersini . . . (ODTÜ’nin *calculus* dersleri Harvard’dakine göre daha fazla konu içeriyordu.)

*Calculus* dersini, *calculus* öncesi konuları anlamayan öğrencilere öğretmek durumunda kalanlar, bunun heves kıran bir çaba olduğunu bilirler. Öğretici için bu gibi öğrencilere konulardan anlam çıkarmak olanaksızdır ve iki taraf da anlamının getireceği zevkten mahrum kalırlar. Sonuçta öğrenciler konuları ezberlemekten başka çare bulamazlar. Çünkü konulardan anlam çıkarabilecek araçları yoktur. Ezberleme, unutmayı ve gelecek yıllarda daha da fazla sıkıntıyı getirir.

Birkaç örnek vereyim: Öğrencilerimin birçok defalar,

$$\frac{d}{dx}(x \ln x - x) = \ln x - 1$$

\* Harvard Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi

yazdıklarında ilk önce türev almayı anlamadıklarını düşündüm. Daha dikkatli baktığımda ise problemin bu olmadığını anladım. Sonuca

$$\frac{d}{dx}(x \ln x - x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1$$

yazarak, ortadaki  $x$ 'lerin götürmesi ve "hiçbir şeyin kalmaması" biçiminde ulaşmalarıydı sorun. Diğer bir deyişle, *calculus* hatası gibi görünen, esasında *calculus* öncesinden gelen bir hataydı. Bir başka öğrencim,

$$\frac{0.4 \times 10^{-16}}{4} = 0.1 \times 10^{-4}$$

yazarak, çarpmanın çarpma üstünde dağılımı konusunda katı bir inanç sergilemişti.

Güçlük çektikleri alanları daraltmak istersek, Türk öğrencilerin en büyük iki problemi grafik çizimi ve cebirsel sadeleştirme diyebiliriz. Ne ABD'deki ne de Türkiye'deki öğrenciler grafik çizmeyi seviyor, fakat karşılaşırsa, Türkiye'deki öğrenciler Atlantik'in öbür tarafındakilere nazaran daha kötüydüler. ODTÜ'deki birçok öğrencim, çok basit grafikleri doğru olarak çizemiyordu. Bir fonksiyonun  $x$  ve  $y$  eksenini kestiği noktaları öğrettikten sonra özenerek çizdikleri grafikte buldukları noktalardan geçmediğini görmek beni hayal kırıklığına uğratmıştı. Açıkçası, ne yaptıklarını anlamamışlardı.

Buradaki problem, grafik çizmenin bir insanın düşünmesinde önemli bir yardımcı, yani ilham almak için veya sonucu kontrol etmek için istenilerek kullanılan bir araç olmasıdır. Ancak birçok Türk öğrenci için grafik çizimi bir "yardımcı"dan çok baş ağrısıdır. Bunun sonucu olarak, birçok öğrenci *calculus*'un, belki de matematiğin, en önemli araçlarından biri olan "yaptığını şekilsel olarak canlandırmayı" kullanamıyordu.

İkinci olarak, okyanusun iki tarafındaki öğrenciler de sadeleştirme konusunda büyük güçlük çekmektedirler. Çoğu zaman terimleri sadeleştiremiyorlar, yapabilecekleri zaman da sadeleştirme yapmıyorlar. Sadeleştirmeyi problemi kolaylaştırmak olarak göreceklere, öğreticileri tarafından hazırlanan tuzaklar olarak düşünüyorlar. Fakat basitleştirmemek *calculus*'ta problemleri daha fazla iş gerektiren problemler haline getirir. Örnek olarak bir öğrencimin

türevini almak istediği ifadeye bakalım:

$$\frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2}$$

$$\frac{x}{2} - \frac{\cos x}{2}$$

Sadeleştirmeden emin olamadığından 2'lerin ifade kalmamasını seçer, ayrıca buna ilâve her küçük kesrin türevini bölüm türevi alma kuralına göre alır. Aslında söylemeye gerek yok ama problemin sonunda ifade o kadar içinden çıkılmaz hale gelir ki ümitsizce problemi bırakır.

Bundan nasıl bir sonuç çıkartabiliriz? Türkiye'de de ABD'de olduğu gibi öğrenciler çok fazla konu çok çabuk öğretiliyor. Sonuç olarak da, çok azını anlıyorlar ve hatırlıyorlar. Buna ek olarak, yeni bir ortamda öğrendiklerinin kullanılması istenildiğinde, bunu başaramıyorlar. Bir önceki bilgilerin parça parça olması, yarım yamalak anlaşılması yeni çalışmalara bir temel olamaz. Sonuçta da, öğrenciler *calculus*'tan kalır. Başarılı olamadıkça çoğunlukla matematiğe sevgi azalır.

Öğrencilerin lisede daha az konuyu çalışmalarının, fakat daha iyi ve tamamen öğrenmelerinin iyi olacağına inanıyorum. Bu durumda öğrenciler hem *calculus* hem de *calculus* öncesi derslerini alıyorlar, fakat her ikisini de tam olarak öğrenemiyorlar. *Calculus*'u hiç görmemiş ama, bunun yerine *calculus* öncesi derslerinde tam olarak ustalaşmış olmaları çok daha iyi olacaktır.

Harvard'da yaptığım araştırmaya göre, lisede *calculus* dersini az ya da çok görmüş olanlar, hiç görmemiş olanlara nazaran genellikle daha başarısızdı. Bunun nedeni, *calculus* dersini lisede alanların tam anlamıyla öğrenememeleri ve almayanlara göre *calculus* öncesi konuları da tam olarak bilememeleridir. Öte yandan, *calculus* dersini lisede almayanlar, *calculus* öncesi konuları tam olarak anlamadan üniversitede *calculus* dersini almamaktalar. Sağlam bir alt yapı *calculus*'taki başarı için en önemli etken olduğundan ikinci gruptakiler bu dersi daha iyi yapmaktadırlar.

Bana göre, bunun ifade ettiği şey çok açıktır. *Calculus*'u, daha önceki bilgiler tam anlamıyla öğrenilmeden başarıyla öğretemeyiz; daha ileri konuları açmak önceki konuları pekiştiremez. Eğer lise müfredatı daha az konuyu içermesi ve daha iyi öğretilmesi için değiştirilirse, bunun öğrencilerimizin matematiksel sağlığı açısından çok yararı olur.