

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

ALİŞTİRMA PROBLEMLERİ

A131. $a < b < c < d$ için

$$f(x) = |x - a| + 2|x - b| + 3|x - c| + 4|x - d|$$

fonksiyonunun alabileceği en küçük değeri bulunuz.

A132. n bir tamsayı olsun ve $1 \leq i \leq n$ için $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ aralığında x_i noktaları verilsin.

$$\left| \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \dots + \frac{x_n}{n} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2n}$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu gösteriniz.

A133. y ekseninde sabit $(0, k)$ noktasında dik kesişen iki doğru x eksenini A ve B noktalarında kesiyorlar. $[AB]$ üzerine kurulan eşkenar üçgenin üçüncü köşesinin geometrik yeri nedir?

A134. Bir ABC üçgeninin B ve C köşelerinden geçen çember, AB ve AC doğrularını X ve Y noktalarında kesiyor. XY doğrusu BC doğrusunu bir Z noktasında kesiyorsa,

$$\frac{|BZ|}{|ZC|} = \frac{|XB| \cdot |AB|}{|YC| \cdot |AC|}$$

olduğunu ispatlayınız.

A135. Bir parabolün odağı F , parabol üzerindeki bir nokta P , P noktasının parabolün eksenine üzerindeki dik izdüşümü Q ve parabolün tepe noktası A ise, $|PQ|^2 = 4|AF| \cdot |AQ|$ olduğunu ispatlayınız.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y131. *MATEMATİK* sözcüğündeki harflerin tümünü kullanarak, bunların gelişigüzel dizilimleriyle elde edilen anlamlı, anlamsız tüm 9 harfli sözcüklerden kaç tanesinde iki ünsüz harf ard arda gelmez? (*Nurettin Ergun*)

Y132. Bir havuzun çevresinde saat yönünde sırayla 0 dan 60'a kadar numaralanmış 61 tane taş var. 0. taşın üzerindeki bir kurbağa önce 1. taşa, oradan 2. taşın üstünden atlayıp 4. taşa, oradan 4 taşın birden üstünden atlayıp 9. taşa, ... şeklinde sıçrayarak havuzun çevresinde doluyor. Kurbağa $k + 1$ 'inci sıçrayışta

saat yönünde $2k$ taşın üstünden atlayıp bir sonrakine sıçıyor. Yeterince uzun bir süre sonunda kurbağanın üzerine basmadığı taş kalır mı? Kalırsa kaç tane böyle taş kalır? (*Albert Erkip*)

Y133. Bir parabolün herhangi üç teğetinin ikişer ikişer kesişme noktaları X, Y, Z ise XYZ çemberinin bu parabolün odağından geçtiğini ispatlayınız.

Y134. Birbirinin dışında bulunan A ve B merkezli iki çemberin ortak dış teğetleri bir C noktasında kesişiyor. Ortak iç teğetlerden biri de dış teğetleri D ve E noktalarında kesiyor. CDE çemberinin $[AB]$ 'nin orta noktasından geçtiğini ispatlayınız.

Y135. A, B, C açılarının ölçüleri sırayla 1, 2, 4 ile orantılı olan bir ABC üçgeninin alanını çevrel çemberinin yarıçapı cinsinden hesaplayınız.

ÇÖZÜMLER

A121. $\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$ denkleminin gerçel çözümlerini bulunuz. (*Selma Atabey*)

Çözüm. Denklemi $\sqrt[3]{4}$ sayısına bölelim. $\frac{9}{4} = (\frac{3}{2})^2$ ve $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ olduğundan

$$\left(\sqrt[3]{\frac{3}{2}} \right)^2 = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + 1$$

bulunur. $T = \sqrt[3]{3/2}$ alırsak, $T^2 - T - 1 = 0$ 'dan

$$T_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

köklerini buluruz. $T > 0$ olduğundan + işaretini seçer ve

$$x = \frac{\log 3 - \log 2}{\log(1 + \sqrt{5}) - \log 2}$$

buluruz.

(Çözenler: *Mustafa Akyüz, İhsan Aydemir, Atasagun Baykal, Barış Demir, Namık Gök, Cemal Özboğa, Samanyolu Problem Grubu.*)

A122. Her n pozitif tamsayısı için

$$(2n^2 + 3n + 1)^n \geq 6^n (n!)^2$$

eşitsizliğini kanıtlayınız. (Turgay Uçkun)

Çözüm. $1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2$ sayılarının geometrik ortalaması $\sqrt[n]{1^2 2^2 \dots n^2} = (n!)^{2/n}$ 'dir. Aritmetik ortalaması ise

$$\frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6}$$

olur. Aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$(n!)^{2/n} \leq \frac{2n^2 + 3n + 1}{6},$$

ve dolayısıyla istenen sonuç çıkar.

(Çözenler: Atasagun Baykal, Barış Demir, Celalettin Orhan, Samanyolu Problem Grubu.)

A123. $0 < r < 1$ şeklindeki bir r rasyonel sayısının ondalık açılımı $r = 0.x_1x_2x_3 \dots$ olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

limitini hesaplayınız. (Nurettin Ergun)

Çözüm. Limitini aradığımız ifadeye A_n diyelim. Rasyonel sayıların ondalık açılımı devirlidir; o halde

$$r = 0.x_1x_2 \dots x_p \overline{y_1y_2 \dots y_m}$$

şeklinde yazılabilir. $0 \leq q < m-1$ olacak şekilde, n 'yi $n = km + q$ diye yazalım.

$$A_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_p}{n} + \frac{k(y_1 + y_2 + \dots + y_m)}{n} + \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_{q-1}}{n}$$

olacaktır. n büyüdükçe ilk terim ve son terim sifira, n/k oranı ise m 'ye gideceğinden, aranan limit

$$\frac{y_1 + y_2 + \dots + y_m}{m},$$

yani devirli kısmın rakamlarının ortalaması olacaktır. Burada bazı sayılar için aranan limitin açılıma bağlı olduğuna işaret edelim. $r = \frac{1}{10}$ için $r = 0.1\overline{0}$ yazarsak limit sıfır, $r = 0.0\overline{9}$ yazarsak limit dokuz olacaktır.

(Çözenler: Emre Alkan, İhsan Aydemir.)

A124. Kenar uzunlukları a, b, c, d olan iki merkezli bir dörtgenin alanının $S = \sqrt{abcd}$ olduğunu gösteriniz.

(Hem çevrel hem de içteğet çemberi olan bir dörtgene iki merkezli dörtgen adı verilir.)

Çözüm. Teğetler dörtgeninde karşılıklı kenarların toplamı eşittir. $a + c = b + d$, yani $a - d = b - c$ 'den kare alarak

$$a^2 + d^2 - 2ad = b^2 + c^2 - 2bc \quad (1)$$

bulunur. Kirişler dörtgeninde karşılıklı açılarının toplamı 180° 'dir. ABD ve DBC üçgenlerinde kosinüs teoreminden

$$|BD|^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos C,$$

ve $\cos C = \cos(180^\circ - A) = -\cos A$ olduğundan,

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 + 2bc \cos A \quad (2)$$

çıkar. (2)'den (1)'i çıkarırsak

$$\cos A = \frac{ad - bc}{ad + bc}$$

ve

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{2\sqrt{abcd}}{ad + bc} \quad (3)$$

bulunur. Dörtgenin alanı ABD ve DBC üçgenlerinin alanlarının toplamı, yani

$$S = \frac{1}{2}ad \sin A + \frac{1}{2}bc \sin C = \frac{\sin A}{2}(ad + bc)$$

sayısıdır. (3)'ten $S = \sqrt{abcd}$ çıkar.

(Çözenler: Emre Alkan, Atasagun Baykal, Namık Gök, Cemal Özboğa, Samanyolu Problem Grubu, Muhsin Yılmaz.)

A125. Bir ABC üçgeninin kenarları a, b, c , çevrel çemberinin yarıçapı R olsun. ABC dar açılı ise, $a^2 + b^2 + c^2 > 8R^2$ olduğunu gösteriniz. (Ergün Yaraneri)

Çözüm. Çevrel çemberin B noktasından geçen çapı $[BA']$ olsun. B açısı dar açı olduğundan $AA'C$ açısı geniş açı olur ve buradan $|AA'|^2 + |A'C|^2 < b^2$ bulunur. Diğer taraftan BAA' ve BCA' birer dik üçgen olup $c^2 + |AA'|^2 = 4R^2$ ve $a^2 + |CA'|^2 = 4R^2$ sağlanır. Dolayısıyla

$$a^2 + b^2 + c^2 > a^2 + c^2 + |AA'|^2 + |CA'|^2 = 8R^2$$

çıkar.

(Çözenler: Atasagun Baykal, Namık Gök, Ülkü Öztaş, Samanyolu Problem Grubu.)

Y121. $2m - 1 \leq n$ olacak şekildeki n, m pozitif tamsayıları için

$$\binom{2n}{2m-1} = 2 \left[\binom{n}{2m-1} + \binom{n}{2m-2} \binom{n}{1} + \binom{n}{2m-3} \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{m} \binom{n}{m-1} \right]$$

olduğunu gösteriniz. (Nurettin Ergun)

Çözüm. Eşitliğin sol tarafı $(1+x)^{2n}$ çarpımının açılımında x^{2m-1} 'in katsayısıdır. Bu çarpımı $(1+x)^n(1+x)^n$ şeklinde hesaplırsak, x^{2m-1} elde etmek için ilk çarpımdan x^{2m-k} , ikincisinden de x^k 'li terimleri çarpmak gerekir. $(1+x)^n$ açılımında x^k 'nin katsayısına c_k diyelim. $0 \leq k \leq m-1$ ve $m \leq k \leq 2m-1$ aralıklarındaki terimler simetriden dolayı sırayla birbirlerine eşit olacağından, x^{2m-1} 'in katsayısı

$$2(c_{2m-1}c_0 + c_{2m-2}c_1 + \dots + c_m c_{m-1})$$

olur. $c_k = \binom{n}{k}$ olduğundan, bu bize aranan eşitliğin sağ tarafını verir.

(Çözenler: Atasagun Baykal, Samanyolu Problem Grubu.)

Y122. Bir ABC üçgeninde a, b, c kenar uzunlukları, r içteğet çemberin yarıçapı, $2s = a + b + c$, $p = ab + bc + ac$ ve S üçgenin alanı olsun. ABC üçgeninin bir dik üçgen olması için gerek ve yeter koşulun

$$r^3 - sr^2 + (p - s^2)r - \frac{S^2}{s} = 0$$

olduğunu gösteriniz. (Selma Atabey'in bir sorusundan türetilmiştir.)

Çözüm. Bir ABC üçgeninde A açısının dik olması için gerek ve yeter koşul $r = s - a$ olmasıdır. Bunu b ve c kenarları için tekrarlırsak, ABC üçgeninin dik olması için gerek ve yeter koşul

$$(r - (s - a))(r - (s - b))(r - (s - c)) = 0$$

olmasıdır. Bu son çarpım açılıp gerekli sadeleştirme yapıncaya istenen koşul elde edilir.

(Çözen: Atasagun Baykal.)

Y123. $N > 2$ bir tamsayı ve $n = 3N$ ise, düzgün bir n -gende uzunluklarının farkı bir kenarın uzunluğuna eşit olan iki köşegen olduğunu gösteriniz. (Ferit Öktem)

Çözüm. Düzgün bir n -genin bir kenarı $2 \sin \frac{\pi}{n}$, köşegenleri ise $k = 2, 3, \dots, n-2$ için

$2 \sin \frac{k\pi}{n}$ uzunlukları ile orantılıdır.

$$\sin \frac{k\pi}{n} - \sin \frac{j\pi}{n} = 2 \cos \frac{k+j}{2n} \pi \sin \frac{k-j}{2n} \pi$$

olduğundan, $k - j = 2$ ve $\frac{k+j}{2n} = \frac{1}{3}$ seçebilirsek istenen koşul sağlanır. $n = 3N$ olduğundan, $k = N + 1$ ve $j = N - 1$ bulunur. $N > 2$ ise istenen sağlanacaktır. $N = 2$ için ise bir köşegenle bir kenarın farkı bir kenara eşit olacaktır.

(Çözenler: Atasagun Baykal, Samanyolu Problem Grubu.)

Y124. $(x-1)^n(2x^2+1)^n$ çarpımının açılımı $A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_{3n}x^{3n}$ olsun. $A_0 + A_3 + A_6 + \dots + A_{3n}$ toplamını hesaplayınız.

Çözüm. Verilen polinoma $P(x)$ diyelim.

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

için $\omega^2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{\omega}$ ve $\omega^3 = 1$ olduğu görülür. ($\bar{\omega}$, ω 'nin karmaşık eşleniği demektir.) O halde $1 + \omega^{3k} + (\omega^2)^{3k} = 1 + 1 + 1 = 3$, $1 + \omega^{3k+1} + (\omega^2)^{3k+1} = 1 + \omega + \omega^2 = 0$ ve $1 + \omega^{3k+2} + (\omega^2)^{3k+2} = 1 + \omega^2 + \omega = 0$ sağlanır.

$$P(1) + P(\omega) + P(\omega^2) = \sum_{j=0}^{3n} A_j(1 + \omega^j + (\omega^2)^j) = 3(A_0 + A_3 + \dots + A_{3n}),$$

ve dolayısıyla

$$A_0 + A_3 + \dots + A_{3n} = \frac{P(1) + P(\omega) + P(\omega^2)}{3}$$

olacaktır. Öte yandan $P(1) = 0$,

$$\begin{aligned} P(\omega) &= [(\omega-1)(2\omega^2+1)]^n \\ &= [2\omega^3 - 2\omega^2 + \omega - 1]^n \\ &= [-2\omega^2 + \omega + 1]^n = (-3\omega^2)^n \\ P(\bar{\omega}) &= P(\omega) = \overline{P(\omega)} = \overline{(-3\omega^2)^n} = (-3\omega)^n \end{aligned}$$

olduğundan,

$$P(1) + P(\omega) + P(\omega^2) = (-3)^n[\omega^n + \omega^{2n}]$$

bulunur. $n = 3k$ ise $\omega^n + \omega^{2n} = 2$ ve de $n \neq 3k$ ise $\omega^n + \omega^{2n} = \omega + \omega^2 = -1$ olduğundan, aranan toplam

$$\begin{aligned} n \equiv 0 \pmod{3} & \text{ ise } -2(-3)^{n-1}, \\ n \not\equiv 0 \pmod{3} & \text{ ise } (-3)^{n-1} \end{aligned}$$

olacaktır.

(Çözen: Murat Aygen.)

Y125.

$$f_p(n) = \frac{1}{(p+1)!} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (n+1) \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (n+1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & C_1^{p-1} & C_2^{p-1} & \cdots & C_{p-2}^{p-1} & 0 & (n+1)^{p-1} \\ 1 & C_1^p & C_2^p & \cdots & C_{p-2}^p & C_{p-1}^p & (n+1)^p \\ 1 & C_1^{p+1} & C_2^{p+1} & \cdots & C_{p-2}^{p+1} & C_{p-1}^{p+1} & (n+1)^{p+1} \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlanan f_p fonksiyonu için $f_p(n) = 1 + 2^p + 3^p + \cdots + n^p$ olduğunu gösteriniz. (Tamer Adanır)

Çözüm. Bilindiği gibi

$$C_k^m = \binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k(k-1)\cdots 2 \cdot 1}$$

demektir. Önce $f_p(n) - f_p(n-1) = n^p$ olduğunu gösterelim. Determinant fonksiyonu matrislerin satır ve sütunlarına göre doğrusal olduğundan,

$$f_p(n) - f_p(n-1) = \frac{1}{(p+1)!} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (n+1) - n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (n+1)^2 - n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \binom{p-1}{1} & \binom{p-1}{2} & \cdots & \binom{p-1}{p-1} & 0 & (n+1)^{p-1} - n^{p-1} \\ 1 & \binom{p}{1} & \binom{p}{2} & \cdots & \binom{p}{p-2} & \binom{p}{p-1} & (n+1)^p - n^p \\ 1 & \binom{p+1}{1} & \binom{p+1}{2} & \cdots & \binom{p+1}{p-2} & \binom{p+1}{p-1} & (n+1)^{p+1} - n^{p+1} \end{vmatrix}$$

elde ederiz. Şimdi $k = 1, 2, \dots, p$ iken sırayla k 'yinci sütunu $-n^{k-1}$ ile çarpıp $p+1$ 'inci sütuna ekleyelim. Determinantın değeri değişmez; ayrıca

$$(n+1)^{p+1} - n^{p+1} - 1 - n \binom{p+1}{1} - n^2 \binom{p+1}{2} - \cdots - n^{p-1} \binom{p+1}{p-1} = \binom{p+1}{p} n^p,$$

$$(n+1)^p - n^p - 1 - n \binom{p}{1} - n^2 \binom{p}{2} - \cdots - n^{p-1} \binom{p}{p-1} = 0,$$

ve benzer şekilde diğerleri de sıfır olur. Böylece

$$f_p(n) - f_p(n-1) = \frac{1}{(p+1)!} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \binom{p-1}{1} & \binom{p-1}{2} & \cdots & \binom{p-1}{p-2} & 0 & 0 \\ 1 & \binom{p}{1} & \binom{p}{2} & \cdots & \binom{p}{p-2} & \binom{p}{p-1} & 0 \\ 1 & \binom{p+1}{1} & \binom{p+1}{2} & \cdots & \binom{p+1}{p-2} & \binom{p+1}{p-1} & \binom{p+1}{p} n^p \end{vmatrix}$$

haline gelir. Köşegeninin üstündeki bütün elemanları sıfır olan böyle bir matrisin determinanı köşegen elemanlarının çarpımıdır. Buradan derhal

$$f_p(n) - f_p(n-1) = \frac{1}{(p+1)!} n^p \binom{p+1}{p} \binom{p}{p-1} \binom{p-1}{p-2} \cdots 2 \cdot 1 = \frac{(p+1)!}{(p+1)!} = n^p$$

elde edilir. Bu indirgeme bağıntısıyla $f_p(n) = n^p + (n-1)^p + \cdots + 2^p + 1^p + f_p(0)$ olur. Öte yandan $f_p(0)$ 'a bakılırsa, birinci ve $p+1$ 'inci sütunlar aynı olduğundan, $f_p(0) = 0$ çıkar. Sonuç olarak $f_p(n) = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$ buluruz.

(Çözen: Emre Alkan.)