

GAMA FONKSİYONU

H. Turgay Kaptanoğlu

A. Tanım

Gama fonksiyonu, $0 < x < \infty$ değerleri için Euler integrali dediğimiz

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

integrali ile tanımlanır. Önce bu ifadenin ne demek olduğunu anlamaya çalışalım. $x-1$ bir gerçel sayı olduğundan, t^{x-1} ifadesi $e^{(x-1)\ln t}$ şeklinde tanımlanır. Bunun için de t 'nin doğal logaritmasının tanım kümesinde, yani $t > 0$ olması gerekir. Yani aslında

$$f(t) = t^{x-1} e^{-t}$$

fonksiyonu $t = 0$ 'da tanımsızdır. Fakat az sonra bunun öneminin olmadığını göreceğiz. Ayrıca $t > 0$ iken $f(t) > 0$ 'dır ve $e^{-t} < 1$ gerçeklenir.

Hemen akla gelen ikinci soru bu integralin sonlu olup olmadığı, çünkü iki sorun var: Hem sonsuz uzunluktaki bir aralık üzerinde integral alıyoruz, hem de $0 < x < 1$ iken $f(t)$ fonksiyonu t sifira (sağdan) yaklaşırken sınırsız artıyor, yani

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{x-1} e^{-t} = +\infty$$

oluyor. Gama fonksiyonunu tanımlayan integrali, f fonksiyonunun grafiğinin altında kalan alan olarak yorumlarsak, bu iki nedenden dolayı integralin sonsuz çıkma olasılığı var. Ama x 'i pozitif bir sayı almamız bütün bu sorunları ortadan kaldırıyor; bunu açıklayalım.

Yukarıdaki integralle ne demek istediğimizi daha açık yazalım. ε ve M pozitif sayılar olsun. Eğer limitler varsa,

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_{\varepsilon} + \lim_{M \rightarrow \infty} J_M \end{aligned}$$

demektir. Buradan $f(t)$ 'nin $t = 0$ 'da tanımlı olmasının gerekmediğini hemen görürüz. Aslında $x \geq 1$ iken, $f(t)$ fonksiyonu $(0, 1]$ aralığında

sürekli ve sınırlı olduğundan, ilk integralde limit almaya gerek kalmaz.

Şimdi Γ 'nin tanımındaki limitlerin varlığını gösterelim.

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon} &= \int_{\varepsilon}^1 t^{x-1} e^{-t} dt < \int_{\varepsilon}^1 t^{x-1} dt \\ &= \frac{t^x}{x} \Big|_{t=\varepsilon}^{t=1} = \frac{1}{x} - \frac{\varepsilon^x}{x} \end{aligned}$$

eşitsizliğinden, $x > 0$ iken I_{ε} integralinin, $\varepsilon > 0$ ne olursa olsun, $1/x$ ile üstten sınırlı olduğunu görürüz. $\varepsilon \rightarrow 0^+$ iken, pozitif bir fonksiyonun gittikçe büyüyen bir aralıktaki integrali olduğu için I_{ε} artar. Üstten sınırlılık ve artanlık, $x > 0$ durumunda

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_{\varepsilon}$$

limitinin varlığını gösterir. Bu hesaptan anlaşılması gereken, $0 < x < 1$ olsa bile, $t \rightarrow 0^+$ iken t^{x-1} 'in sınırsız arttığı, fakat yeteri kadar yavaş arttığı için, grafiğiyle x eksenini arasındaki alanın sonlu kalabildiğidir.

J_M integralinin limiti için şu sonuca ihtiyacımız olacak:

Önerme 1. n negatif olmayan bir tamsayı ve $t > 0$ ise,

$$e^t > \frac{t^0}{0!} + \frac{t^1}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^n}{n!}$$

sağlanır.

İspat. Tümevarım kullanacağız. $n = 0$ iken $0! = 1$ diye tanımlarız. O zaman $t > 0$ iken $e^t > 1$ olacağı açıktır. Eşitsizliğin $n = k$ için doğru olduğunu kabul edelim ve $t \geq 0$ için

$$h(t) = e^t - 1 - t - \frac{t^2}{2!} - \dots - \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}$$

tanımlayalım. $h(0) = 1$ 'dir. Öte yandan

$$h'(t) = e^t - 1 - t - \frac{t^2}{2!} - \dots - \frac{t^k}{k!},$$

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

$t > 0$ iken tümevarım varsayımı gereği pozitiftir; yani $h(t)$, $t > 0$ aralığında artandır. $t = 0$ 'da 1 değerini alan ve pozitif sayılarda artan bir fonksiyonun, orada negatif veya sıfır olamayacağı açıktır. Bu önermenin özel bir hali negatif olmayan n tamsayıları için

$$e^t > \frac{t^n}{n!} \quad (t > 0)$$

eşitsizliğidir. \square

Artık J_M integraline bakabiliriz. n bir pozitif tamsayı olsun. Önerme 1'den

$$e^{-t} = \frac{1}{e^t} < \frac{n!}{t^n} \quad (t > 0)$$

ve sonra da

$$t^{x-1}e^{-t} < \frac{n!}{t^{n+1-x}} \quad (t > 0)$$

çıkar. Verilen bir $x > 0$ için $n > x$ sağlayan bir n pozitif tamsayısı seçelim.

$$\begin{aligned} J_M &= \int_1^M t^{x-1}e^{-t} dt < \int_1^M n! t^{x-n-1} dt \\ &= n! \frac{t^{x-n}}{x-n} \Big|_{t=1}^{t=M} = \frac{n!}{x-n} (M^{x-n} - 1) \\ &= \frac{n!}{n-x} \left(1 - \frac{1}{M^{n-x}} \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği, J_M integralinin, $M > 0$ ne olursa olsun, $\frac{n!}{n-x}$ ile üstten sınırlı olduğunu söyler. $M \rightarrow \infty$ iken J_M aynı zamanda arttığından,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} J_M$$

limiti vardır. Bu hesaptan da anlaşılması gereken, $t \rightarrow \infty$ olsa bile e^{-t} 'nin sifıra iniş hızının t^{x-1} 'in sınırsız artış hızını, $t^{x-1}e^{-t}$ 'nin grafiğiyle x eksenini arasındaki alanı sonlu yapacak kadar etkili bir biçimde bastırdığıdır.

Böylece $x > 0$ için gama fonksiyonunun iyi tanımlanmış olduğunu göstermiş olduk.

B. Temel Özellikler

Şunu biliyoruz: $t > 0$ için $f(t)$ pozitif olduğundan, $x > 0$ için $\Gamma(x)$ de pozitiftir.

$x = 1$ için gama fonksiyonunun değerini hesaplamak kolaydır:

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M e^{-t} dt = \lim_{M \rightarrow \infty} [-e^{-t}]_0^M \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} [1 - e^{-M}] = 1. \end{aligned}$$

Öte yandan $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt$ olur. Bu integrali $x > 0$ için parçalı integralleme yoluyla hesaplamaya çalışalım. $u = t^x$ ve $dv = e^{-t} dt$ dersek, $du = xt^{x-1} dt$ ve $v = -e^{-t}$ olur. Böylece

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ M \rightarrow \infty}} \int_0^M t^x e^{-t} dt \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ M \rightarrow \infty}} \left[-t^x e^{-t} \right]_{t=\varepsilon}^{t=M} \\ &\quad + x \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ M \rightarrow \infty}} \int_\varepsilon^M t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^x e^{-\varepsilon} - \lim_{M \rightarrow \infty} M^x e^{-M} + x\Gamma(x) \end{aligned}$$

olur. Birinci limit açıkça 0'dır. İkinci limit de 0'dır; bunu görmeyen bir yolu x 'i sabit tutup M 'yi değişken olarak düşünerek M^x/e^M üzerinde L'Hôpital kuralını [5] uygulamaktır. Elde ettiğimiz

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

eşitliği gama fonksiyonunun *fonksiyonel denklemdir*.

Şimdi x 'i bir n pozitif tamsayısı olarak seçer, fonksiyonel denklemini kendisinin sağ tarafındaki $\Gamma(n)$ 'ye uygularsak $\Gamma(n+1) = n(n-1)\Gamma(n-1)$ buluruz; sonra bu işlemi sağ tarafta $\Gamma(1) = 1$ çıkana kadar tekrarlırsak

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

buluruz. Bu bize, yalnızca doğal sayılarda tanımlı olan faktöriyel işleminin gama fonksiyonu aracılığıyla bütün pozitif gerçel sayılara genişletildiğini söyler.

Peki, gama fonksiyonunu pozitif olmayan sayılarda da tanımlı kılabilir miyiz? Evet, hem de yukarıdaki yolla. Bir n pozitif tamsayısı alır, fonksiyonel denklemini $\Gamma(x+1)$ yerine $\Gamma(x+n)$ için kullanır ve bu işlemi sağ tarafta $\Gamma(x)$ kalana kadar tekrarlırsak, her $x > 0$ için

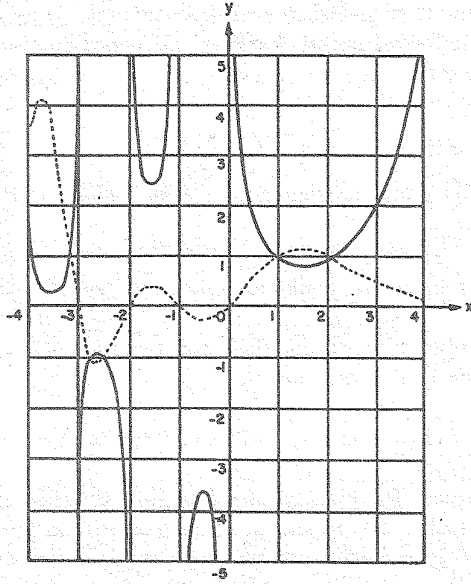
$$\begin{aligned} \Gamma(x+n) &= (x+n-1)(x+n-2) \cdots (x+1)x\Gamma(x), \\ \Gamma(x) &= \frac{\Gamma(x+n)}{(x+n-1)(x+n-2) \cdots (x+1)x} \end{aligned}$$

elde ederiz. $-n < x < -n+1$ ise $0 < x+n < 1$ olur ve $\Gamma(x+n)$ tanımlıdır. O halde son denklemini gama fonksiyonunu $-n < x < -n+1$ aralığında

tanımlamak için kullanabiliriz. Kala kala sıfır ve negatif tamsayılar kaldı. Bunlar için yapacak bir şey yok, çünkü son denklemin sağ tarafı buralarda anlamsız, ve gama fonksiyonu buralarda tanımsız kalacak, çünkü x sıfıra veya negatif tamsayıya yaklaştığında bu denklem $|\Gamma(x)|$ 'in sınırsız arttığını da söylüyor.

Aslında en başta gama fonksiyonunu yalnızca $(0, 1]$ aralığında tanımlamak yeterdi. $\Gamma(x + n)$ için yukarıda verdiğimiz denklem sayesinde, tanım aralığını $(n, n + 1]$ tipindeki tüm aralıklara, yani bütün pozitif gerçel sayılara genişletebilirdik.

Sonuç 2. *Gama fonksiyonun tanım kümesi T , sıfır ve negatif tamsayılar dışında kalan bütün gerçel sayılardır.*



—, $y = \Gamma(x)$, - - - - , $y = 1/\Gamma(x)$

Diğer bir önemli özellik için, bir $1 < p < \infty$ ve bunun eşleniği q ile Hölder eşitsizliğini [4] gama fonksiyonunun tanımındaki integrale uygulayalım. $0 < x, y < \infty$ olsun ki $\Gamma(x)$ ve $\Gamma(y)$ pozitif çıksın ve logaritmalarını alabilelim.

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) &= \int_0^\infty t^{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^\infty t^{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}} e^{-\frac{t}{p} - \frac{t}{q}} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty (t^{x-1} e^{-t})^{1/p} (t^{y-1} e^{-t})^{1/q} dt \\ &\leq \left(\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \right)^{1/p} \\ &\quad \cdot \left(\int_0^\infty t^{y-1} e^{-t} dt \right)^{1/q} \\ &= \Gamma(x)^{1/p} \Gamma(y)^{1/q} \end{aligned}$$

çıkar. Her iki tarafın logaritmasını aldığımızda, logaritma artan bir fonksiyon olduğundan eşitsizlik korunur. Logaritmayı çarpma üzerinde toplama olarak dağıtıp $a, b > 0$ için $\ln a^b = b \ln a$ özelliğini kullanırsak,

$$\ln \Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \leq \frac{1}{p} \ln \Gamma(x) + \frac{1}{q} \ln \Gamma(y)$$

elde ederiz. Bu ise $\ln \Gamma$ fonksiyonunun dışbükey [4] olması demektir.

C. Çarpım Formülleri ve Sonuçları

Asıl ilginç olan, gama fonksiyonunun, şimdiye kadar verdiğimiz üç temel özelliğinden kesin olarak belirlenmesidir [2]:

Teorem 3. *g , tanım kümesi $(0, \infty)$ aralığını içeren pozitif değerli bir fonksiyon olsun. Eğer*

- (a) $g(1) = 1$ ise,
- (b) $g(x + 1) = xg(x)$ sağlanıyorsa, ve
- (c) $\ln g$ dışbükeyse,

o zaman g 'nin tanımlı olduğu her x için $g(x) = \Gamma(x)$ 'tir.

İspat. Yukarıdaki üç özelliği sağlayan yalnızca bir fonksiyon olduğunu göstereceğiz. Gama fonksiyonu da bu üç özelliğe sahip olduğundan, o bir fonksiyon gama fonksiyonu olacaktır. (b) özelliği sayesinde, g 'yi bir kere $(0, 1]$ aralığında belirlersek, tanımlı olduğu her yerde g belirlenmiş olacaktır.

$h = \ln g$ olsun; o zaman $h(1) = 0$ 'dir ve h dışbükeydir; ayrıca $0 < t < \infty$ için $h(t + 1) = h(t) + \ln t$ sağlanır. Bu eşitlik $t = n$ diye pozitif bir tamsayı alınıp tekrarlandığında $h(n + 1) = \ln(n!)$ verir. Bir kere de $t = n + 1 + x$ alınıp tekrarlandığında

$$h(n + 1 + x) = h(x) + \ln[x(x + 1) \cdots (x + n)]$$

verir. Şimdi $0 < x < 1$ alalım. [4]'teki Önerme 4'ü $a = n + 1$, $b = n + 1 + x$ ve $c = n + 2$ alıp h 'ye uygularsak,

$$\begin{aligned} \frac{h(n+1+x) - h(n+1)}{x} &\leq \frac{h(n+2) - h(n+1)}{x} \\ &= \ln((n+1)!) - \ln(n!) \\ &= \ln(n+1) \end{aligned}$$

elde ederiz ki bu $x = 1$ halinde de = olarak geçerlidir. $0 < x \leq 1$ alıp [4]'teki Önerme 4'ü bir defa da $a = n$, $c = n + 1$ ve $b = n + 1 + x$ ile uygularsak,

$$\begin{aligned} \frac{h(n+1+x) - h(n+1)}{x} &\geq \frac{\varphi(n+1) - \varphi(n)}{1} \\ &= \ln(n!) - \ln((n-1)!) \\ &= \ln n \end{aligned}$$

elde ederiz. Son iki eşitsizlik birlikte

$$\ln n \leq \frac{h(n+1+x) - h(n+1)}{x} \leq \ln(n+1)$$

verir. Daha önce $h(n+1+x)$ ve $h(n+1)$ için elde ettiğimiz formülleri burada yerine koyar ve logaritmanın bir özelliğini kullanırsak

$$\ln n \leq \frac{h(x) + \ln[x(x+1) \cdots (x+n)/n!]}{x} \leq \ln(n+1)$$

buluruz. Şimdi x ile çarpıp, $x \ln n$ çıkartıp, gene logaritmanın özelliklerini kullanıp sadeleştirirsek,

$$0 \leq h(x) - \ln \left[\frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)} \right] \leq x \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

çıkar. Logaritmanın sürekliliğinden, sağ tarafın $n \rightarrow \infty$ iken limiti 0'dır. Dolayısıyla ortadaki ifadenin de $n \rightarrow \infty$ iken limiti 0'dır; yani h kesin olarak köşeli parantez içindeki ifadenin limiti olarak belirlenir. Logaritmanın birebir fonksiyon olması g 'nin de kesin olarak belirlendiğini gösterir. \square

İspatın sonunda Γ için elde ettiğimiz Gauss formülünü yazalım:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)} \quad (0 < x \leq 1).$$

Bu formülün her $x \in T$ için geçerli olduğunu görmek için,

$$\Gamma_n(x) = \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}$$

diyelim.

$$\begin{aligned} \Gamma_n(x+1) &= \frac{n}{x+n+1} x \Gamma_n(x) \\ \Gamma_n(x) &= \frac{x+n+1}{n} \frac{1}{x} \Gamma_n(x+1) \end{aligned}$$

olur. $n \rightarrow \infty$ iken bir $x \neq 0$ için bir tarafın limiti varsa, diğer tarafın da vardır, yani Gauss formülündeki limit, $x \neq 0$ için varsa, $x+1$ için de vardır, ve de $x+1$ için varsa ve $x \neq 0$ ise, x için de vardır. Özetle, $G(x)$ ile göstereceğimiz limit her $x \in T$ için vardır, $G(x+1) = xG(x)$ sağlanır, ve $0 < x \leq 1$ için $G(x) = \Gamma(x)$ 'tir. G tek olduğundan, G ile Γ , T kümesinde çakışırlar.

Şu önerme $\Gamma(x)$ için değişik bir formül elde etmemizde yararlı olacak:

Önerme 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right)$ limiti vardır.

Bu limit γ ile gösterilir ve γ 'ya Euler-Mascheroni sabiti denir.

İspat. $C_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ ve $D_n = C_n - 1/n$ dersek, her $n = 1, 2, \dots$ için

$$C_{n+1} - C_n = \frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right),$$

$$D_{n+1} - D_n = \frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

olduğunu görürüz.

$$\frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

olduğunu biliyoruz. Her iki tarafın 1'den $\frac{n+1}{n}$ 'ye kadar integralini alırsak,

$$\ln \left(\frac{n+1}{n} \right) = \int_1^{\frac{n+1}{n}} \frac{dx}{x}$$

buluruz. $1/x$ fonksiyonunun $[1, \frac{n+1}{n}]$ aralığında aldığı en büyük değer 1, en küçük değer ise $\frac{n}{n+1}$ 'dir. Bu değerleri aralığın uzunluğu olan $1/n$ ile çarparsak, yukarıdaki integral için alt ve üst sınırlar bulmuş oluruz:

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \leq \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Bu eşitsizlikleri $\{C_n\}$ ve $\{D_n\}$ dizilerinin fark formülünde kullanırsak, her n için

$$C_{n+1} - C_n \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0,$$

$$D_{n+1} - D_n \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0$$

çıkar; yani $\{C_n\}$ azalan bir dizi, $\{D_n\}$ artan bir dizidir. Tanımlarından her n için $D_n < C_n$ olduğundan, $D_1 = 0$ teriminin $\{C_n\}$ dizisi için bir alt sınır olduğunu görürüz. Azalan ve alttan sınırlı dizilerin ise limiti vardır (ve bu limit en büyük alt sınırdır). \square

Şimdi $\Gamma_n(x)$ 'i tanımlayan ifadede n^x yerine eşiti $e^{x \ln n}$ yazalım. Sonra $n!$ ifadesini $1/n!$ olarak paydaya taşıdıktan sonra, çarpanlarını sırayla $(x+1)(x+2) \cdots (x+n)$ 'nin paydası olacak şekilde dağıtalım. Sonra da $\Gamma_n(x)$ 'i

$$1 = e^{-x} e^{-x/2} \cdots e^x e^{x/2} \cdots e^{x/n}$$

ile çarparsak elimize

$$\Gamma_n(x) = \frac{e^{x \ln n} e^{-x} e^{-x/n} \cdots e^{-x/n}}{x \frac{x+1}{1} \frac{x+2}{2} \cdots \frac{x+n}{n}} e^x e^{x/2} \cdots e^{x/n}$$

geçer. Buradaki büyük kesirin payını tek bir üstel fonksiyonda birleştirebiliriz. Ayrıca paydadaki $\frac{x+k}{k}$ kesirlerini de $1 + x/k$ şeklinde yazabilir ve her birini $e^{x/k}$ ile beraber düşünebiliriz. O zaman $\Gamma_n(x)$ ifadesi

$$\frac{1}{x} \exp \left[x \left(\ln n - 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n} \right) \right] \prod_{k=1}^n \frac{e^{x/k}}{1 + x/k}$$

halini alır. Burada \prod , çarpımı gösterir; $\exp(\cdot)$ ise $e^{(\cdot)}$ demekten başka bir şey değildir. Önerme 4 sayesinde, $n \rightarrow \infty$ iken, yuvarlak parantez içindeki ifadenin limitinin $-\gamma$, sol tarafın limitinin ise T 'deki x 'ler için $\Gamma(x)$ olduğunu biliyoruz. O zaman her $x \in T$ için, $n \rightarrow \infty$ iken sağdaki çarpımın da limiti vardır; dolayısıyla

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= e^{-\gamma x} \frac{1}{x} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{k}{x+k} e^{x/k} \\ &= e^{-\gamma x} \frac{1}{x} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k}{x+k} e^{x/k} \quad (x \in T) \end{aligned}$$

olur. Bu eşitlik *Weierstrass çarpım formülüdür*.

Yukarıda $\{C_n\}$ dizisinin limiti olarak tanımladığımız γ 'nın ne büyüklükte bir sayı olduğu hakkında biraz fikir verelim. Her şeyden önce $\{D_n\}$ dizisinin de limiti vardır ve bu limit γ 'dır, çünkü iki dizinin terimleri arasındaki fark sadece $1/n$ 'dir ve bu 0'a yakınsar. $\{D_n\}$ dizisi artan olduğundan, γ onun en küçük üst sınırıdır. Dolayısıyla her n için $D_n < \gamma < C_n$ sağlanır. $D_2 = 1 - \ln 2 > 0$ 'dır, çünkü $1 < 2 < e$ ve $\ln 1 = 0 < \ln 2 < 1 = \ln e$ 'dir. Ayrıca

$C_2 = \frac{3}{2} - \ln 2 < 1$ 'dir, çünkü $\ln 2$ yaklaşık olarak 0.7'dir. Böylece $0 < \gamma < 1$ olduğu ortaya çıkar. n 'yi büyük seçerek γ için daha dar aralıklar bulabiliriz. γ için yaklaşık bir değer 0.57722'dir. Son bir not: γ 'nın rasyonel mi irrasyonel mi bir sayı olduğu bilinmiyor.

D. Beta Fonksiyonu

Bir başka *Euler integrali* de iki değişkenli bir fonksiyon tanımlar. *Beta fonksiyonu*, $x > 0$ ve $y > 0$ değerleri için

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

integrali ile tanımlanır. $0 < x < 1$ ve $0 < y < 1$ iken, bu integral de gama fonksiyonunu tanımlayan integral gibi limitlerle verilir, çünkü t^{x-1} 'den dolayı 0'a yaklaşırken, $(1-t)^{y-1}$ 'den dolayı da 1'e yaklaşırken sorunlar vardır. Bu sorunlar gene gama fonksiyonunda yapıldığı gibi aşılr.

İntegralin içindeki ifade pozitif olduğundan beta fonksiyonu da pozitif değerlidir; o zaman logaritmasını almamızda sakınca yoktur. y 'yi sabit tutup x 'e değişken olarak baktığımızda, tıpkı gama fonksiyonu için kullandığımız yolla, $\ln B$ 'nin de dışbükey olduğunu görürüz. $B(1, y) = 1/y$ de kolayca hesaplanır. Beta fonksiyonu için de bir fonksiyonel denklem çıkartalım.

$$B(x+1, y) = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t} \right)^x (1-t)^{x+y-1} dt$$

yazar,

$$u = \left(\frac{t}{1-t} \right)^x \quad \text{ve} \quad dv = (1-t)^{x+y-1} dt$$

diyip, parçalı integralleme yaparsak,

$$B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$$

elde ederiz. Bütün bunların ayrıntılarını okuyucuya bırakıyoruz.

Şimdi sabit bir $y > 0$ alıp,

$$g(x) = \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)} B(x, y) \quad (x > 0)$$

fonsiyonuna bakalım. $g(x+1) = xg(x)$ ve $g(1) = 1$ olduğunu hemen görürüz. Logaritma çarpımı toplama çevirdiğinden ve dışbükey

fonsiyonların toplamı da dışbükey olduğundan [4] (y 'nin ve böylece $\Gamma(y)$ 'nin pozitif bir sabit olduğunu unutmayalım), $\ln g$ 'nin de dışbükey olduğunu anlarız. Artık yapılacak en doğal şey Teorem 3'ü uygulayıp, her $x > 0$ için $g(x) = \Gamma(x)$ yazmaktır. Bu da bize şu ilginç formülü verir:

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0).$$

Bu formülden daha başka ilginç formüller de türetebiliriz. Integralde $0 < t < 1$ olduğundan $\sin^2 \theta = t$ sağlayan bir θ vardır ve $dt = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta$ olur. O zaman gene pozitif x, y için

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = 2 \int_0^1 (\sin \theta)^{2x-1} (\cos \theta)^{2y-1} d\theta$$

gerçeklenir. Şimdi $x = y = \frac{1}{2}$ koyar, $\Gamma(1) = 1$ ve $\Gamma(\frac{1}{2}) > 0$ olduğunu kulanırsak,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

buluruz. (π sayısı yazıda bir yerde çıkmalıydı!) Geri dönüp gama fonksiyonunun ilk tanımında $t = s^2$ değişken değişimini yapmak

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^{\infty} s^{2x-1} e^{-s^2} ds \quad (x \in T)$$

verir. Şimdi $x = \frac{1}{2}$ koyarsak,

$$\int_0^{\infty} e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

elde ederiz. $y = e^{-s^2}$ fonksiyonunun grafiği y eksenini etrafında simetriktir; dolayısıyla $s > 0$ iken grafiğin altında kalan alanla $s < 0$ iken grafiğin altında kalan alan birbirine eşittir. Sonuç olarak

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}$$

çıkar.

E. Türevlenebilme ve Dışbükeylik

Biraz da gama fonksiyonunun türevinin olup olmadığını araştıralım. Fonksiyonel denklemden dolayı pozitif sayılara bakmak yeterli. Pozitif sayılarda ise gama fonksiyonunun pozitif değerli olduğunu biliyoruz, dolayısıyla logaritmasını alabiliriz. Logaritma sürekli bir fonksiyondur

ve bundan dolayı limitlerle yer değiştirebilir. Logaritmanın sonlu çarpımları toplamlara çevirdiğini de biliyoruz. Diğer bir bildiğimiz, logaritmanın üstel fonksiyonun ters fonksiyonu olduğu; yani her gerçel a için $\ln e^a = a$ ve her pozitif b için $e^{\ln b} = b$ sağlandığı. O zaman Weierstrass çarpım formülünden

$$\begin{aligned} \ln \Gamma(x) &= -\gamma x - \ln x + \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \prod_{k=1}^n \frac{k}{x+k} e^{x/k} \\ &= -\gamma x - \ln x + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{x}{k} - \ln \left(\frac{k}{x+k} \right) \right) \\ &= -\gamma x - \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{k} - \ln \left(\frac{k}{x+k} \right) \right) \end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi türev almaya çalışırsak sağdaki sonsuz toplam sorun çıkartmaya aday. Sonlu toplamların türevinin her bir terimin türevinin toplamı olduğu doğru, fakat bu sonsuz toplamlarda da geçerli mi? Evet, eğer türevi elde edilecek olan sonsuz toplam burada pek bahsetmek istemediğimiz *düzgün yakınsaklık* özelliğine sahipse. Elimizdeki toplamlar için bu özelliğin olduğu biliniyor ve her terimin ayrı ayrı türevini alıp toplamamızda bir sakınca yok. Zincir kuralının birkaç uygulamasından sonra

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x) &= \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \\ &= -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} \right) \\ &= -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k(x+k)} \quad (x > 0) \end{aligned}$$

buluruz. Düzgün yakınsaklık özelliği tekrar tekrar türev alsak da sağlanıyor, dolayısıyla gama fonksiyonu sonsuz kere türevli ve

$$\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (m-1)}{(x+k)^m} \quad (m \geq 2)$$

formülü her $x > 0$ için geçerli. Yukarıda yaptığımız gibi fonksiyonel denklemler sayesinde bu formülü her $x \in T$ için geçerli yapmak da mümkün.

$m = 2$ hali biraz daha incelenmeğe değer, çünkü

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \right) &= \frac{\Gamma(x)\Gamma''(x) - (\Gamma'(x))^2}{(\Gamma(x))^2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} \end{aligned}$$

her zaman pozitif. Buradan her $x \in T$ için

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma''(x) - (\Gamma'(x))^2 &> 0 \\ \Gamma(x)\Gamma'''(x) &> (\Gamma'(x))^2 \geq 0\end{aligned}$$

çıkar. Bu ise her $x \in T$ için, $\Gamma(x)$ ve $\Gamma''(x)$ sayılarının ya her ikisinin birden pozitif ya da her ikisinin birden negatif olması demektir. $|\Gamma(x)|$ fonksiyonunu düşünürsek, ikinci türevi hep pozitif olur. [4]'teki Sonuç 8'den dolayı $|\Gamma(x)|$ fonksiyonu T üzerinde dışbükeydir. Dikkatli bakarsak, $\Gamma(x+n)$ 'yi veren formülden, gama fonksiyonunun işaretinin $(-n, -n+1)$ aralığında $(-1)^n$ 'nin işareti ile aynı olduğunu görürüz; burada n bir pozitif tamsayıdır. $x > 0$ iken de $\Gamma(x)$ pozitiftir. Dolayısıyla gama fonksiyonu $(0, \infty)$, $(-2, -1)$, $(-4, -3)$, ... aralıklarında dışbükeydir; T 'deki geri kalan aralıklarda ise $-\Gamma$ dışbükeydir.

F. Sinüs Fonksiyonu İçin Bir Bağntı

Başlangıç olarak

$$g(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} 2^x \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

fonksiyonuna bakalım. Açıkça g en az $(0, \infty)$ aralığında tanımlı ve orada pozitif değerlidir. Ayrıca $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ özelliğinden

$$\begin{aligned}g(x+1) &= \frac{2^{x+1}}{2\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x}{2} + 1\right) \\ &= \frac{2^x}{2\sqrt{\pi}} 2\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \frac{x}{2} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) = xg(x)\end{aligned}$$

sağlanır.

$$\ln g(x) = (\ln 2)x + \ln \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) + \ln \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

özdeşliğinde sağdaki her terim dışbükey olduğundan, $\ln g$ dışbükeydir. O zaman g , Γ 'dan başka bir şey değildir (Teorem 3); yani

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sqrt{\pi} 2^{1-x} \Gamma(x)$$

özdeşliği, her iki taraf da tanımlı iken doğrudur; buna da Gauss formülü deniyor. Burada x yerine $1-x$ koyarsak,

$$\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{\pi} 2^x \Gamma(1-x)$$

elde ederiz.

Şimdi $\varphi(x) = \Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin \pi x$ fonksiyonuna bakalım. Bu fonksiyon sadece tamsayı olmayan gerçel x 'ler için tanımlıdır. x yerine $1-x$ koyarsak

$$\begin{aligned}\varphi(x+1) &= \Gamma(x+1)\Gamma(-x)\sin(\pi x + \pi) \\ &= x\Gamma(x) \frac{\Gamma(1-x)}{-x} (-\sin \pi x) \\ &= \Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin \pi x = \varphi(x)\end{aligned}$$

buluruz; yani φ periyodiktir ve periyodu 1'dir. Az önce elde ettiğimiz bağıntıları kullanarak da

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{x}{2}\right) \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{x}{2}\right) \sin \frac{\pi x}{2} \\ &\quad \cdot \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right) \cos \frac{\pi x}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\pi} 2^{1-x} \Gamma(x) \sqrt{\pi} 2^x \Gamma(1-x) \\ &\quad \cdot 2 \sin \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi x}{2} \\ &= \pi \Gamma(x) \Gamma(1-x) \sin \pi x \\ &= \pi \varphi(x)\end{aligned}\quad (*)$$

elde ederiz. Bu özdeşlik de tamsayı olmayan x 'ler için geçerlidir.

Gama ve sinüs fonksiyonları sonsuz kere türevli olduklarından, φ de öyledir, tabii x tamsayı değilse.

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{\Gamma(1+x)}{x} \Gamma(1-x) \sin \pi x \\ &= \pi \Gamma(1+x) \Gamma(1-x) \frac{\sin \pi x}{\pi x}\end{aligned}$$

yazalım. Bu eşitliğin sağ tarafının $x \rightarrow 0$ iken limitini alırsak $\pi \Gamma(1)^2 1 = \pi$ buluruz, çünkü gama fonksiyonu 1'de süreklidir. Eğer $\varphi(0) = \pi$ diye tanımlarsak, φ sıfırda da sürekli olur. Diğer tamsayılarda da aynı limiti buluruz, çünkü φ periyodiktir. O halde φ 'yi tamsayılarda π diye tanımlarsak, φ bütün gerçel sayılarda sürekli olur. Yukarıdaki eşitliğin türevini alıp tekrar $x \rightarrow 0$ iken limitine bakabiliriz. Gama fonksiyonu 1'de sonsuz kere türevli olduğundan yalnız $\sin \pi x / \pi x$ ifadesinden gelen terimlerde limiti araştırmak yeter. L'Hôpital kuralından [5] onların da limiti kolayca bulunur. Sonra tekrar $\varphi'(0)$ 'ı limit yardımıyla tanımlar ve periyodiklikle bütün tamsayılara genişletiriz. Özetle, φ bütün gerçel sayılarda sonsuz kere türevlidir. Ayrıca tanımından $0 < x < 1$ için $\varphi(x)$ pozitiftir. $\varphi(0) = \pi$ ve periyodiklik sayesinde bu her gerçel sayıda da doğrulanır. Böylece φ 'nin logaritması alınabilir.