

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}} = N$$

Şekil 9

Eminim ki bu sorular cevaplandıktan sonra yeni sorular türeyecek ve bu konu eğer genişletilirse analitik geometrinin önemli bir parçası haline gelebilecektir.

Bu proje hazırlanırken, Machintosh üzerinde, Şekil 2 ve 4'ün çizimlerinde Geometer's Sketchpad, diğer çizimlerde ise Nucalc programı kullanıldı.

KAYNAKÇA

- Brown, Richard G., *Advanced Mathematics*, 1994, Boston.
 Dunham, William, *Journey Through Genius*, 1990, Toronto.
 Euclid, *The Thirteen Books of Elements*, 1956, Toronto.
 Locknod, E.H., *A Book of Curves*, 1961, Cambridge.
 Protter, Murray H. and Charles B. Morrey, Jr. *Calculus with Analytic Geometry A First Course*, 1977, Massachusetts.

OKUL MATEMATİĞİNDE NE ÖĞRETELİM, NASIL ÖĞRETELİM?

Adnan Baki *

Taştışmasız, toplumun devamlılığı ve kalkınmasında eğitimin hayati önemi bugün herkesçe kabul edilmektedir. Eğitim sistemimiz içerisinde matematik eğitimi önemli bir yer tutmasına rağmen matematik eğitimi tanımlamada çoğu zaman güçlük çekeriz. Eğer matematiği, okul matematiği ve akademik matematik olarak ikiye ayırırsak, matematik eğitiminden ne anlıyoruz sorusuna daha kolay cevap verebilme imkanı bulabiliriz. Bu sınıflamada akademik matematiği kısaca matematikçilerin uğraştığı matematik olarak tanımlayabiliriz. Amacı, matematiğin ulaştığı seviyeyi kullanarak teorik ve pratik alanda matematiğe bilimsel katkıda bulunmaktır. Okul matematiği ise toplum için nasıl bir insan yetiştirmek istiyoruz

sorusuna cevap ararken matematik ile ilgili ne öğretelim ve nasıl öğretelim konusu ile ilgilenir.

Bu sınıflandırmayı biraz daha aydınlatmak bakımından şunu da söylemeliyiz. Okul matematiğinin iki amacı var: Birincisi, toplumdaki büyük bir kitleyi matematik yönünden eğiterek sanayinin, teknolojinin ve günlük hayat-taki diğer alanların ihtiyaç duyduğu elemanları yetiştirmek; ikincisi de akademik matematiğin alt yapısını hazırlamak, yani akademik matematikte çalışacak matematikçileri daha küçük yaşlarda bir matematikçi gibi şekillendirerek hazırlamak ve onları matematik bilimcisi olarak akademik hayata kazandırmak.

Özetlersek, matematik alanında yeni bilgi üretmek veya yeni buluşlar yapmak akademik

* Karadeniz Teknik Üniversitesi, Eğitim Fakültesi Öğretim Üyesi

matematiğin işi ve o bilginin genç nesillere aktarılması da okul matematiğinin işidir. Ama belirtmeliyiz ki günümüzde mevcut matematiksel bilgi birikimi okul süresince öğretilebilecek olanın kat kat üstündedir. Bu nedenle okul matematiğinde öğrencilere ancak temel kavramlar ve matematiksel bilgi edinme yolları öğretilmelidir. Bunu da başarabilmesi için okul matematiğinin her seviyede belirli müfredatı olmalıdır. Örneğin, ilk ve orta dereceli okullarda okul matematiğinin amacı, öğrenciye istenilen matematik kültürü vermek ve arzu edilen matematik beceriler yanında matematiksel düşünme yeteneğini de geliştirmek olarak özetlenebilir.

Üniversite seviyesinde ise okul matematiğini iki farklı alanda düşünmek zorundayız. Birincisi Fen Fakültelerindeki matematik bölümlerinde okutulan matematik, ikincisi de eğitim fakültelerinin matematik eğitimi bölümlerinde okutulan matematik.

Matematik bölümlerinde okutulan matematiğin amacı öğrenciye ayrıntılı matematik bilgisi vermek, matematiksel düşünme seviyesini yükseltmek, böylece matematik biliminin dallarının farkında olan öğrenciyi bu bilim dalında araştırma yapabilecek seviyeye yükseltmek olmalıdır. Kısaca öğrenciyi matematikçi yapabilmek olmalıdır. Şüphesiz, aynı yaklaşımla bunu yüksek lisans ve doktora programları için düşünürsek, bu programlarda okutulan matematiği de okul matematiği olarak kabul edebiliriz. Ancak bu program içerisindeki matematikçinin ortaya koyduğu ürün akademik matematiğin kümesine dahil olur.

Eğitim fakültelerinde okutulan matematik ilk ve orta dereceli okullarda okutulan matematik müfredatlarına paralellik arzeden, onları kapsayan ve daha yüksek seviyede ele alan bir matematik programı olmalıdır. Yani öğretmen adayının sahip olması gereken alan bilgisini sağlayan bir matematik programı söz konusudur. Aynı karakteri sınıfa yansıtması ondan beklendiğine göre, bu programda, öğretmen adayına en azından bir matematikçi karakteri verilmelidir. Belki burada okutulan matematik teorik bakımdan matematik bölümlerinde okutulan matematikle eş değerde olmak zorunda değildir. Ancak mahiyet ve kapsamı en azından aynı düzeyde olmalıdır.

Nasıl öğrenilirse öyle öğretilir gerçeği göz önünde tutulursa, matematik eğitimi bölümündeki müfredatın ve derslerin verilmesinin daha çok ayrıntılar ihtiva etmesinin

zorunluluğu ortaya çıkar. Öğrendiğinin nasıl öğretildiğini öğrenen öğretmen adayı aynı ekolü gittiği okullarda devam ettirir [5]. Dolayısıyla, öğrendiğinin nasıl öğretildiğini aynı zamanda öğrendiği için, öğretilenin nasıl öğretildiği fakülte sıralarında çok daha önem kazanır. Bunun için matematik eğitimi bölümündeki hocaların matematikçilikleri yanında eğitimcilikleri de aynı ölçüde önemlidir.

OKUL MATEMATİĞİNDE REFORM İHTİYACI

Yukarıda yaptığımız ayırımı hatırlamamız açısından tekrar edersek, okul matematiği, öğrenciye istenilen matematik kültürü vererek ve matematiksel düşünme yeteneğini geliştirerek, toplumun ihtiyaç duyduğu teknisyen, teknokrat, mühendis ve bilim adamlarını yetiştirmeyi amaçlar. Kısaca, toplum bugün okullardan şunu bekliyor: Okullarda bütün öğrenciler matematikte belli seviyede yetiştirme fırsatı bulmalı, hayatımızın bir parçası olan teknolojiyi anlayabilecek şekilde bilgilendirilmeli. Şimdi burada matematikte belli bir seviyede yetişmeden ne anlıyoruz? Bundan, bir kişinin keşfetme, bulma karar verme, mantıksal çıkarımda bulunabilme ve birçok matematiksel metotları ve yöntemleri etkili bir biçimde kullanarak problem çözebilme seviyesine gelmesi için görmesi gereken eğitimi kastediyoruz. Bu amaç okul matematiğine her ülkede büyük sorunluluklar yüklemiştir.

Örneğin, 60'lı yıllarda Sputnik'in Rusya'da uzaya fırlatılması ile birlikte Rusya ile uzayda yarışabilmek için, Amerika reform hareketleri başlatmıştır. Bunun da başlangıç noktasını okul matematiği oluşturmuştur [2]. Yüksek seviyede iyi yetişmiş teknisyen, mühendis ve bilimciler ile bu yarışın mümkün olabileceğine inanan Amerika bugün hepimizin bildiği modern matematik hareketini başlatmış ve modern matematik müfredatını 60'lı yıllarda geliştirerek uygulamaya koymuştur. Türkiyede modern matematik müfredatına 70'li yıllarda geçilmiştir.

Ama 90'lı yıllarda modern matematik müfredatının yetersizliği Amerika'da tartışılır olmuş, matematik eğitimi yükseltmek ve her kesime yaygınlaştırmak Amerikan eğitimcilerinin son yıllardaki en önemli gündemi haline gelmiştir. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)'in hazırladığı rapor [4], gündemde olan bu konuyu göstermesi bakımından en çarpıcı örnektir.

Bu çalışmaya sebep olan birinci faktör, okullardan mezun olan gençlerin istenilen

düzeyde veya ihtiyaç duyulan seviyede matematik bilgisine ve becerisine sahip olmamalarıydı. Mezunlar matematik yönden günlük hayatta arzu edilen fonksiyonu gösteremiyor ve iş hayatının talep ettiği nitelikte eleman olamıyordu. Bu ihtiyaca cevap vermek düşüncesi ile Amerikan eğitimcileri matematik eğitimini yükseltmek ve her kesime yaygınlaştırmak amacı ile bahsettiğimiz raporu 1989'da kaleme almışlar ve arkasından 90'lı yıllarda ülke çapında uygulamaya koymuşlardır [3].

Amerikada eğitimciler bu raporda belirlenen amaçlar ve hedefler doğrultusunda müfredatlar ve stratejiler geliştirmek için yoğun çaba sarfetmektedir. Şüphesiz ülkemizde de aynı ihtiyaçlar mevcuttur ve bizim de müfredatlarımızı ve eğitim stratejilerimizi yeniden gözden geçirmemiz gerekmektedir. Bizim NCTM gibi güçlü bir organizasyonumuz yok, dolayısıyla müfredatın geliştirilmesi, stratejilerin belirlenmesi bizlere (üniversite ve bakanlıkta çalışan eğitimcilere) düşmektedir. Bakanlık bu konuda üniversitelerle ne derecede işbirliğine hazır, bunu bu aşamada net bir şekilde ortaya koymak mümkün değildir. Belki de bakanlıkta akla ilk gelen Amerikalı eğitimcilerin hazırladıklarını tercüme etmek olabilir, ama bu işi halletmeyecektir. Çünkü bunun bir örneğini modern matematik müfredatlarını ve kitaplarını hazırlarken yaptık. Hareketin muhtevası amacını ve felsefesini bilmeyenler ülkemizde uzun zaman tartışılan *modern matematik kaosuna* sebep oldu. Kolaycılığa kaçmamız, modern matematik uygulamasında yaptığımız hatanın tekrarı olur [1].

Bu da şimdiye kadar batıda matematik eğitimi reformları ile ilgili bilimsel çalışmalardan ve NCTM raporlarından yararlanmayacağımız anlamına gelmemelidir. Ülke gerçeklerimiz ve ihtiyaçlarımız göz önünde tutularak okul matematiğimiz için kendi müfredatımızı geliştirirken şüphesiz matematik eğitiminde yapılan çalışmalardan ve başta bahsettiğimiz NCTM standartlarından yararlanmamızın bilimsel açıdan da doğru olacağı kanaatindeyim. Nitekim bu çalışmada, yeni matematik müfredatımızın amaçları olarak sunduğumuz aşağıdaki dört amaç NCTM 1989 raporunun ışığı altında tespit edilmiştir. Bu amaçlar şu şekilde özetlenebilir:

1. Öğrenci matematiğe değer vermeyi öğrenmeli

Hazırlanacak yeni matematik müfredatı, matematiğin insanlık tarihinde oynadığı rol,

kültürümüzle ilişkisi ve günlük hayatımızdaki yeri hakkında öğrencinin bilinçlenmesini sağlamalı. Büyük matematikçilerin hayatları ve yaptıkları matematiksel çalışmalarının bugünkü medeniyetimizin gelişmesindeki rollerini ortaya koyan örneklerin seçilerek müfredata koyulması, öğrencinin matematiğin değerini kavraması açısından çok önemlidir. Ayrıca matematik müfredatının içerdiği faaliyetlerin günlük hayat ile yakından ilişkilendirilmesi de öğrencinin matematiğe karşı olumlu tavrı geliştirmesine yardım edecektir. Bir bakıma herkes matematikçi sayılır. Pazarda alışveriş yaparken, arsasını ölçerken, borsaya bakıp hissesinin değerinin artış miktarını hesaplarken, kişi bilinçli bir şekilde matematik yapıyor, matematik becerilerini ve bilgilerini kullanıyor. Bu bakış açısından hareketle yeni müfredat düzenlenmeli. Okul matematiği günlük hayat ile ilişkilendirilmeli, istatistiksel uygulamalar, veri-tabanı oluşturma ve günlük hayattan problemlerin seçilmesi gibi. Böylece, matematikle uğraşmanın hiç de yabancı olmayan bir uğraş ve insanın kaçınılmaz günlük faaliyetlerinden biri olduğu öğrenci tarafından fark edilecek ve gözünde matematik, soyut kavramlar yığını olmaktan çıkacak, onun için korkulur değil, öğrenilmesi gerekli bir ders haline gelecektir.

2. Öğrenci matematiksel düşünmeyi öğrenmeli

Varsayımda bulunma, sonuç çıkarma, kanıt elde etme, hipotezler kurarak bunları teoremlerle destekleme becerileri matematiksel çalışmanın esaslarını oluşturur. Bu becerileri geliştirmek okul matematiğinin esas amaçlarından biri olmalıdır. Bu amacın gerçekleşmesi için öğretmen bir teoremin ispatı veya bir problemin çözümünü sırasında sesli düşünmeli ve ifadelerini matematik terminolojisinden seçmeli. Öğretmen matematiksel düşünmenin önemini vurgulamalı, mantıksal çıkarım yollarını ve alternatif çözüm yollarını öğrencileri ile birlikte tartışmalı ve sadece öğretmenin matematiğini veya çözümlerini tekrar etme mahiyetinde olan ödevlerden kaçınmalı. Bu yolla öğrenci sadece öğretmenin veya kitabın doğru çözüm olmadığını bilecek ve matematiksel varsayımları sorgulama alışkanlığı kazanacaktır. Böyle bir eğitim ortamında öğrenci artık bilginin kaynağının yalnız öğretmenin ve okul kitabının olmadığını kavrayacak, kendi matematik bilgisini kurabileceği başka kaynaklar aramaya yönelecektir.

3. Öğrenci matematiksel konuşmayı öğrenmeli

Okul matematiği, öğrencinin matematiksel terminolojiyi iyi kullanabilecek bir seviyeye gelmesinin sağlayacak stratejiler ve faaliyetler içermelidir. Öğrenci atif olarak sınıf içi diyaloglara katılabilir. Bu yolla, öğrenci düşüncelerini uygun matematik dili kullanarak akıcı ve anlaşılır biçimde ifade etmeyi öğrenecektir. Örneğin, sınıf içi kolektif çalışmalar ve grup çalışmaları sırasında matematiksel düşüncelerin ve problemlerin tartışılması, okunması ve yazılması bu türden faaliyet ve stratejilerdir. Kişinin matematik dilini konuşabilmesi onun matematiksel düşüncesinin gelişmesine katkıda bulunacaktır. Ayrıca, problem çözümü sırasında veya bir problemin ifadesinde matematik dili kullanabilme becerisi veya fiziksel yada sosyal bir olayı matematik kavramlarla ifade edebilme becerisi kişiyi toplumda farklı bir konuma getireceği muhakkaktır. Bu gerçek yeni müfredatın hazırlanması sırasında mutlaka ön planda tutulmalıdır.

4. Öğrenci iyi bir problem çözücü olarak yetiştirilmeli

Problem çözümü öyle bir yöntemdir ki onun vasıtasıyla öğrenci matematiğin gücünü keşfeder ve kullanır. Problem çözme becerisini geliştirmek için problemler öğrencinin ilgisini çeken türden olmalı. Öyle ki öğrenciyi uzun süre usandırmadan meşgul etmeli. Bunun için Piaget'nin *disequilibrium* teorisine uygun problemler üretilebilir. Bu tür problemlerde daha çok öğrencinin mevcut bilgi ve tecrübesi ile başlangıçta çelişkili gibi görünen yapılar vardır. Öğrenci böyle problemleri çözerken aynı zamanda önceki bilgilerinin de doğruluğunu test eder, yeni varsayımlar kurma imkanı bulur. Okul matematiğinde yer alan problemler öğrencinin o andaki seviyesinin çok altında veya çok üstünde olmamalı. Aksi durum, öğrencinin problem çözümü faaliyetine karşı ilgisinin azalmasına neden olur.

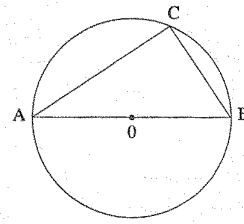
Problem öğrencinin seviyesinden çok yüksek ise, büyük bir ihtimal öğrenci problemi çözmekten vazgeçer. Bunu ünlü Rus psikolog Vigostky [6] *Scaffolding* benzetmesi ile açıklıyor. Problem öyle bir yerde olmalı ki öğrenci mevcut bilgilerini kullanabilsin ve bir ileri aşamayı gerektiren düşünce ve kavramlarla problemin çözümü sırasında tanışabilsin.

Çoğu zaman, seçilen problemlerin tek doğru çözümünün olmamasına veya belli formüle ya da algoritmaya dayanmamasına özen

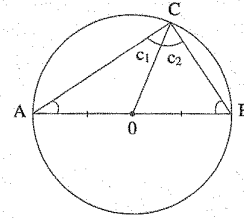
gösterilmeli. Alışılmış problemler yerine sıradan olmayan problemlere yer verilmeli. Öğretmen bu tür faaliyetlerde, teorem ispatı veya problem çözümü sırasında farklı stratejiler geliştirmeli, değişik kaynaklar ve çözüm yolları denemeli. Bunu bir örnekle açıklamaya çalışalım.

Bir Örnek:

Kabul edelim ki öğretmen sınıfında "bir çember üzerinde çapı gören çevre açısı diktir" önermesinin doğruluğunu gösterecektir. Öğretmen farklı fakat birbirleriyle ilişkili matematiksel kavramları kullanarak farklı çözüm yolları üretebilir. Örneğin, birinci çözüm yolu olarak sentetik geometriyi kullanabilir:



Bu durumda öğretmen önce, ABC üçgenini AB kenarı çemberin çapı ve C , çember üzerinde bu üçgenin bir köşesi olacak şekilde çizer. Burada önermenin ispatı için, öğretmenin C açısının dik açı olduğunu göstermesi yeterli olacaktır.



Çember üzerine çizilen ABC üçgeninde $|AO| = |OC|$ ve $|OB| = |OC|$ olduğundan AOC ve COB üçgenleri birer ikizkenar üçgen olacaktır. Bir ikizkenar üçgende taban açıları eşit olduğundan

$\hat{A} = \hat{C}_1, \hat{B} = \hat{C}_2$ dir. Ayrıca, ABC üçgeninde

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \text{ ise}$$

$$\hat{A} + (\hat{C}_1 + \hat{C}_2) + \hat{B} = 180^\circ \text{ yazılabilir.}$$

Böylece

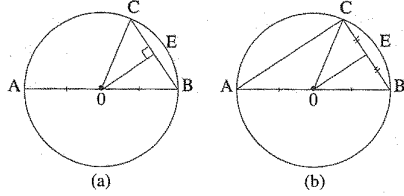
$$(\hat{A} + \hat{C}_1) + (\hat{C}_2 + \hat{B}) = 180^\circ \text{ ve } \hat{C}_1 = \hat{A} \text{ ve } \hat{C}_2 = \hat{B} \text{ olduğundan,}$$

$$2\hat{A} + 2\hat{B} = 180^\circ, \text{ dolayısıyla}$$

$$2(\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ \text{ ve } \hat{A} + \hat{B} = 90^\circ \text{ olur ve buradan da}$$

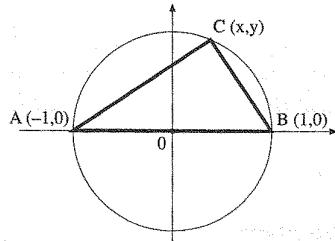
$$\hat{C} = 90^\circ \text{ bulunur.}$$

Öğretmen ikizkenar üçgenlerdeki ve benzer üçgenlerdeki özellikler yardımı ile ikinci bir çözüm yolu geliştirebilir. Bunun için önce Şekil (a)'da olduğu gibi bir çemberde O merkez. AB çap ve BC üzerinde $|EB| = |EC|$ olacak şekilde bir E noktası seçilebilir.



Şekil (a)'da OCB üçgeni ikizkenar üçgen olduğundan $[OE]$ doğrusu $[CB]$ 'nin kenarortayıdır ve $[CB]$ kenarına diktir. Şekil (b)'de OEB açısının ölçüsü 90° 'dir. C ile A 'nın birleştirilmesi ile elde edilen ABC üçgeninde $[OE]$ doğrusu $[CB]$ ve $[AB]$ kenarlarının orta noktalarını birleştiren bir doğru durumuna gelir. Bu durumda iki benzer üçgen elde ettik OEB üçgeni ile ACB üçgeni benzerdir. OEB açısı 90° ise ACB açısı da 90° olur.

Öğretmen üçüncü çözüm yolunu analitik geometri kavramlarını kullanarak öğrencilerine gösterebilir. Bir birim çember üzerinde $A(-1,0)$ ve $B(1,0)$ noktalarını seçebiliriz. C de bu çember üzerinde herhangi bir nokta olsun. Bu durumda \hat{C} açısının 90° olduğunu göstereceğiz.



Birim çemberin denkleminin $x^2 + y^2 = 1$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca $[AC]$ 'nin eğimi

$$m_1 = \frac{y-0}{x+1} = \frac{y}{x+1}$$

ve $[BC]$ 'nin eğimi

$$m_2 = \frac{y-0}{x-1} = \frac{y}{x-1}$$

dir ve

$$m_1 m_2 = \frac{y}{x+1} \frac{y}{x-1} = \frac{y^2}{x^2-1} \quad (1)$$

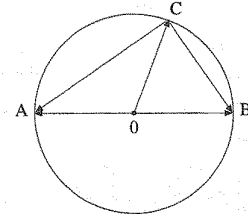
olur. Çember denkleminin $y^2 = 1 - x^2$ (1)'de yerine yazılırsa $m_1 m_2 = \frac{1-x^2}{x^2-1} = \frac{-1(x^2-1)}{x^2-1} = -1$ elde edilir. Eğimlerinin çarpımı -1 olan doğrular birbirlerine dik olduğundan $\hat{C} = 90^\circ$ olduğunu göstermiş oluruz.

Yine öğretmen dördüncü çözüm yolu olarak vektörler yardımı ile bu önermenin doğruluğunu ispat edebilir. Bunun için vektörlerin nokta çarpımları ile ilgili bir ön bilgi verilebilir.

$\vec{u} \neq 0$ ve $\vec{v} \neq 0$ olmak üzere bu iki vektörün iç çarpımı

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\hat{A}) \text{ 'dir.}$$

Eğer $u \cdot v = 0$ ise $|u||v| \cos(\hat{A}) = 0$ ve $|u|, |v| \neq 0$ olduğundan $\cos(\hat{A}) = 0$ 'dır. Buradan $\hat{A} = 90^\circ$ olur. Şimdi bu ön bilgiden aşağıdaki şekile dönelim.



$$\begin{aligned} \vec{CA} &= \vec{OA} - \vec{OC}, \quad \vec{CB} = \vec{OB} - \vec{OC}, \\ |\vec{OA}| &= |\vec{OB}| = |\vec{OC}| = r \text{ den } \vec{OA} \cdot \vec{OA} = r^2, \\ \vec{OB} \cdot \vec{OB} &= r^2, \quad \vec{OC} \cdot \vec{OC} = r^2, \\ \vec{OA} \cdot \vec{OC} &= -\vec{OC} \cdot \vec{OB}, \\ \text{ve } \vec{OB} &= -\vec{OA} \text{ dan} \\ \vec{OA} \cdot \vec{OC} &= -\vec{OC} \cdot \vec{OB} \text{ dir. Buradan} \end{aligned}$$

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = (\vec{OA} - \vec{OC}) \cdot (\vec{OB} - \vec{OC})$$

$$= \vec{OA} \cdot \vec{OB} - \vec{OA} \cdot \vec{OC} - \vec{OC} \cdot \vec{OB} + \vec{OC} \cdot \vec{OC}$$

$= -r^2 + r^2 = 0$ çıkar. Yani $\vec{CA} \perp \vec{CB}$ 'dir. Böylece \hat{C} açısının dik açı olduğu gösterilmiş olur.

Teoremlerin ispatlarının veya problemlerin çözümlerinin böyle farklı çözüm yollarıyla öğrenciye sunulması, başlangıçta birbirinden farklı ve bağımsız olarak düşünülen matematiksel kavramların bir problem çözümü sırasında nasıl iç içe olabildiklerini öğrenciye göstermek bakımından önemlidir. Çünkü öğrenci artık matematiği birbirinden bağımsız ilişkiler ve kurallar yerine, onu birbirine bağlı bir ilişkiler ve kavramlar ağı gibi görmeye başlayacaktır.

Sonuç

Teknolojinin iş hayatı, devlet ve endüstri üzerine etkileri doğrudan doğruya fiziksel, sosyal