

ve bilimsel hayatımızı da değiştirdi. Teknolojinin bilimsel hayatımızdaki etkileri matematiğin yeni bir yön kazanmasına neden oldu. Teknolojinin ilerlemesine paralel olarak matematiksel uygulamaların teknolojideki yeri de arttı. matematiksel uygulamaların teknolojide artması matematiğin içeriğini ve ilgi alanını da değiştirdi.

Belki başlangıçta felsefi olarak kabulendiğimiz "matematiğin etrafımızdaki dünyayı anlamada bize yardım eden gizemli bir potansiyel sağladığı" gerçeğini şimdi çok açık bir şekilde görüyoruz. Ama bu dramatik değişime rağmen değişmeyen birşey var ki o da okullarda okutulan geleneksel matematik konuları ve matematiğin öğretilme şekli. Matematiğin öğretilme şekli değişmeden devam ediyor. Yüzyıllar öncesinden geldiği gibi, günümüzde de çoğunlukla matematik öğrenmenin, kural ve yöntemlerin ezberlenmesinden ibaret olduğu görülüyor.

Bugün çoğu öğretmen matematikteki başarıyı formülleri, kural ve yöntemleri anında uygun bir şekilde kullanabilme olarak görmekte, formülü veya hesaplamayı doğru icra edebilmeyi yeterli bulmaktadır. Oysa öğrenciyi üretken bir şekilde donatmak, hayatında başarılı olacak şekilde eğitmek, yalnızca onun formülleri bilmesine, hesaplamaları doğru yapmasına değil, matematiksel anlayışının ve matematiksel düşünmesinin gelişmesine bağlıdır.

Bu da okul matematiğinde usüllere değil, kavram ve ilişkilere önem vermekle mümkün olur. O halde matematikte başarılı olmanın ne

anlama geldiğini, matematik öğretiminin amaç ve hedeflerini yeniden tanımlamalı ve tesbit etmeliyiz. Bu yeniden tesbit ile, yarının okulları için matematikte arzu edilen uygun öğrenme sonuçlarının çerçevesini çizmeye çalışmalıyız. Bunu başardığımızda ancak öğrencilerimizin günlük hayattaki ihtiyaçlarını karşılamada onlara yardımcı olabileceğiz ve toplumun gelecekteki ihtiyaçlarına da cevap vermiş olacağız.

KAYNAKÇA

- [1] Baki, A.(1995) Are we educating teachers in the way we wish them to educate? 27-31 Ağustos 1995 tarihleri arasında Çeşme'de yapılan Öğretmen Eğitimi Dünya Konferansında bildiri olarak sunuldu.
- [2] Hirsch, R.(1985) The Secondary School Mathematics Curriculum. 1985 Yearbook of NCTM. Reston.
- [3] Morrow, L.(1991) Implementing the Standards. *Arithmetic Teachers*, 38, 21-25.
- [4] National Council of Teachers of Mathematics (1989) *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston.
- [5] Thomson, A.G.(1992) Teachers' beliefs and conceptions. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan, New York.
- [6] Vygostky, L.S.(1986) *Thought and Language*, MIT, Cambridge.

EKSTREMUM DEğERLERİ

Selma Atabey *

Bu makalenin amacı, fonksiyonun türevini kullanmadan bazı ifadelerin en küçük ve en büyük değerini bulma yollarını göstermektir.

Okuyucunun dikkatine iki çözüm yolu sunuyoruz. Bunlardan biri, bir ifadenin, $A + \lambda(\mu x - \nu y)^2$ (A, λ, μ, ν sabitler) şekline dönüştürülmesidir.

O zaman,

$$A + \lambda(\mu x + \nu y)^2 \begin{cases} \geq A & , \lambda > 0 \text{ için} \\ \leq A & , \lambda < 0 \text{ için} \end{cases}$$

dir. Burada ancak $\mu x = \nu y$ ise eşitlik vardır.

İkinci yolda ise, yardımcı açılar seçerek verilen ifade sinüs veya kosinüse bağlı fonksiyon olarak elde edilir. Daha sonra bu fonksiyonların sınırları bulunur.

Φ , belli sayıda değişken içeren bir ifade olsun. Bu değişkenlerin bazı değerleri için de Φ nin değeri M olsun. Değişkenlerin tanım kümesinden aldıkları değerlerin her biri için $\Phi \geq M$ ($\Phi \leq M$) ise M ye Φ nin en küçük (en büyük) değeri denir ve $M = \Phi$ en küçük (ϕ en büyük) şeklinde gösterilir. En büyük ya da en küçük değerlere

* Ankara Atatürk Anadolu Lisesi Öğretmeni

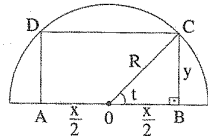
genel olarak ekstremum değeri adı verilir.

İlk önce bir sorunun çözümünü her iki yolla da göstereceğiz. Daha sonra başka sorular inceleyeceğiz ve bu sorularda uygun olan yolu uygulayacağız.

Soru 1:

Yarıçapı R olan bir yarıçemberin içine çizilen ve bir kenarı çap üzerinde olan, diğer iki köşesi de yarı çemberin üzerinde olan dikdörtgenlerden alanı en büyük olanın kenarlarını bulunuz.

Çözüm:



Şekil-1

Dikdörtgenin kenarları $|AB| = x > 0$ ve $|BC| = y > 0$ olsun. (Şekil.1). Bunun alanı $S = x \cdot y$ dir.

I. yol:

OBC üçgenine Pisagor teoremi uygulanırsa $(\frac{x}{2})^2 + y^2 = R^2$ olur.

$v^2 + v^2 = (u - v)^2 + 2uv$ özdeşliğinden yararlanarak,

$(\frac{x}{2} - y)^2 + 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot y = R^2$ bulunur. xy yerine S alırsak,

$$S = R^2 - (\frac{x}{2} - y)^2 \text{ bulunur.}$$

$(\frac{x}{2} - y)^2 \geq 0$ olduğundan, x ve y değişkenlerinin her bir değeri için $S \leq R^2$ dir. Bu da S (en büyük) $= R^2$ olduğunu gösterir. Bunun dışında, S (en büyük) değerinin $\frac{x}{2} = y$ için elde edildiği açıktır.

Aranan $x > 0$ ve $y > 0$ değerleri için

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{2} &= y \\ (\frac{x}{2})^2 + y^2 &= R^2 \end{aligned} \right\}$$

denklemleri elde edilir. Bunun çözümü de $x = \sqrt{2}R$, $y = \frac{R}{\sqrt{2}}$ dir.

II. yol:

$t \in (0, \frac{\pi}{2})$ olmak üzere, t yardımcı açısını seçersek, OBC dik üçgeninden

$$\left. \begin{aligned} x &= 2R \cos t \\ y &= R \sin t \end{aligned} \right\}$$

denklemlerinden

$$S = 2R \cos t \cdot R \sin t = R^2 \sin 2t$$

bulunur.

$2t \in (0, \pi)$ olduğundan, $\sin 2t \leq 1$ dir. Dolayısıyla $S \leq R^2$ dir. S nin en büyük değeri $\sin 2t = 1$, yani $2t = \frac{\pi}{2}$, $t = \frac{\pi}{4}$ için elde edilir. ve bu değer S (en büyük) $= R^2$ için

$$x = 2R \cos \frac{\pi}{4}, \quad y = R \sin \frac{\pi}{4}, \quad \text{yani}$$

$$x = \sqrt{2}R, \quad y = \frac{R}{\sqrt{2}} \text{ olduğu açıktır.}$$

Soru 2:

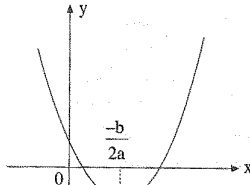
$f(x) = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$) ikinci derece üçterimlisinin ekstremum noktalarını ve ekstremum değerlerini bulunuz.

Çözüm:

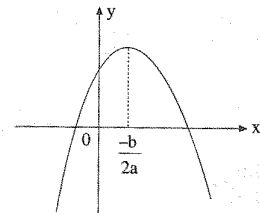
$f(x)$ i aşağıdaki şekilde düzenleyelim:

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) \\ &= a[x^2 + 2x \frac{b}{2a} + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a}] \\ &= a[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}] \end{aligned}$$

$(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$ olduğundan dolayı ekstremum $x = -\frac{b}{2a}$ için vardır. Dolayısıyla, $a > 0$ ise $f(x) \geq \frac{4ac - b^2}{4a} = f$ (en küçük) (Şekil -3) dir.



(Şekil-2)



(Şekil-3)

Ayrıca, $f(x) = ax^2 + bx + c$ üçterimlisinin $D = b^2 - 4ac$ diskriminantının işaretine göre $y = f(x)$ in grafiği için aşağıdakiler geçerlidir:

- 1) $D > 0$ ise a -eksenini keser,
- 2) $D = 0$ ise e -eksenine teğettir,
- 3) $D < 0$ ise e -ile ortak noktası yoktur.

Bu yapılan yorumlar bize şunu söylüyor:

Üçterimlilerin veya üçterimliye dönüştürülebilen ifadelerin ekstremum değerleri ile ilgili her bir soru bu yol ile çözülebilir.

Şimdi ise bunun bir uygulamasını görelim:

Soru 3:

x_1, x_2, \dots, x_n değerlerinin kareleri toplamı, bunların aritmetik ortalamasının k katına eşittir.

$$S = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + \dots + x_2x_n + \dots + x_{n-1}x_n$$

toplamının en küçük değerini bulunuz.

Çözüm:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = k \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

olduğu verilmiş.

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + 2S$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right] \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi de S yi tamkareye tamamlayalım:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \frac{k}{2n} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{k}{2n} \right)^2 - \left(\frac{k}{2n} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i - \frac{k}{2n} \right)^2 - \frac{k^2}{4n^2} \right] \\ &\geq -\frac{k^2}{8n^2}. \end{aligned}$$

Böylece $\sum_{i=1}^n x_i = \frac{k}{2n}$ için S (en küçük) $= -\frac{k^2}{8n^2}$ elde edilir.

Soru 4:

Köşegen uzunluğu d olan dikdörtgenin S alanının değer kümesini bulunuz. Bu dikdörtgenin çevresi en büyük iken S yi bulunuz.

Çözüm:

Dikdörtgenin kenarlarına x ve y diyelim. Bunun alanı $S = xy$ dir. $x^2 + y^2 = d^2$ eşitliğinden $d^2 = (x - y)^2 + 2xy = (x - y)^2 + 2S$ bulunur. Buradan da,

$$S = \frac{1}{2} \left[d^2 - (x - y)^2 \right] \leq \frac{d^2}{2}$$

bulunur. Eşitlik $x = y$ için olacağından S nin değer kümesi $(0, \frac{d^2}{2}]$ aralığıdır.

Dikdörtgenin çevresi

$$C = 2(x + y) = 2\sqrt{(x + y)^2} \text{ dir.}$$

$$(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2) \text{ özdeşliğinden}$$

$$(x + y)^2 = 2(x^2 + y^2) - (x - y)^2 \text{ bulunur.}$$

O zaman,

$$\begin{aligned} C &= 2\sqrt{2(x^2 + y^2) - (x - y)^2} = 2\sqrt{2d^2 - (x - y)^2} \\ &\leq 2\sqrt{2d} \text{ dir.} \end{aligned}$$

Dolayısıyla

C (en büyük) $= 2\sqrt{2}d$ dir ve $x = y$ için elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} x &= y \\ x^2 + y^2 &= d^2 \end{aligned} \right\}$$

denklem sisteminden

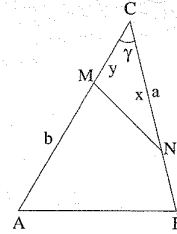
$$x = \frac{d}{\sqrt{2}} = y \text{ bulunur. Bu durumda}$$

$$S = \frac{d^2}{2} \text{ bulunur.}$$

Soru 5:

ABC üçgeninde $|CB| = a, |CA| = b$ ve $\hat{C} = \gamma$ olsun. AC ve BC kenarları üzerinde sırayla öyle M ve N noktaları bulunuz ki MN doğru parçası ABC üçgenini iki bölgeye ayırdığında bu bölgelerin alanlarının oranı $m : n$ şeklinde olsun (C köşesinden başlayarak) ve MN doğru parçasının uzunluğu en küçük olsun.

Çözüm:



(Şekil-4)

$|CN| = x$ ve $|CM| = y$ den M ve N noktaları belirlenir. S ilgili bölgenin alanını göstermek üzere,

$$S_{MNC} = S_{ABNM} = m : n \text{ ve}$$

$$S_{ABC} = S_{MNC} + S_{ABNM} \text{ den}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNC}} = 1 + \frac{S_{ABNM}}{S_{MNC}} = 1 + \frac{n}{m}, \text{ yani}$$

$$S_{MNC} = \frac{m}{m+n} \cdot S_{ABC} \text{ bulunur.}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \sin \gamma \text{ ve } S_{MNC} = \frac{1}{2} xy \sin \gamma$$

olduğundan

$$\frac{1}{2} xy \sin \gamma = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{1}{2} \cdot ab \sin \gamma, \text{ ya da}$$

$$xy = \frac{m}{m+n} \cdot ab \text{ bulunur.}$$

MNC üçgenine kosinüs teoremi uygulanırsa,

$$\begin{aligned} |MN| &= \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \gamma} = \\ &= \sqrt{(x-y)^2 + 2xy - 2xy \cos \gamma} \\ &= \sqrt{(x-y)^2 + 2(1 - \cos \gamma) \frac{m}{m+n} \cdot ab} \\ &\geq 2\sqrt{\frac{m}{m+n} ab \cdot \sin \frac{\gamma}{2}} \end{aligned}$$

$= |MN|$ (en küçük) bulunur.

(Burada $(x-y)^2 \geq 0$ ve $1 - \cos \gamma = 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}$ olduğu göz önüne alındı). $|MN|$ nin en küçük değeri $x = y$ için elde edilir.

$$\begin{aligned} x &= y \\ xy &= \frac{m}{m+n} \cdot ab \end{aligned}$$

denklemlerini çözerek, en küçük değer için

$$x = \sqrt{\frac{l}{m+n} \cdot ab} = y$$

bulunur.

Soru 6:

Bir üçgenin bir açısı γ ve bu açının karşı kenarı c olsun. Bu üçgenin çevresi en büyük iken diğer iki kenarını bulunuz.

Çözüm:

Bu üçgenin diğer iki açısı α ve β ve bunların karşı kenarları da sırayla a ve b olsun. O zaman üçgenin çevresi $\zeta = a + b + c$ dir Sinüs teoreminden,

$$a = \lambda \sin \alpha, \quad b = \lambda \sin \beta, \quad c = \lambda \sin \gamma$$

bulunur. (Burada $a = 2R \sin \alpha$ ise üçgenin çevrel çemberinin yarıçapıdır.) Üçüncü eşitlikten,

$$\lambda = \frac{c}{\sin \gamma} \text{ bulunur. Dolayısıyla, } a = \frac{c}{\sin \gamma} \cdot \sin \alpha, \quad b = \frac{c}{\sin \gamma} \cdot \sin \beta \text{ ve } \zeta = \frac{c}{\sin \gamma} \cdot (\sin \alpha + \sin \beta) + c \text{ dir.}$$

$F = \sin \alpha + \sin \beta$ ifadesinin değeri en büyük olduğundan ζ en büyük değere ulaşır.

$$\begin{aligned} F &= 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ &= 2 \sin \frac{\pi - \gamma}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

dir.

$2 \cos \frac{\gamma}{2} > 0$ ve $\cos \frac{\alpha - \beta}{2} \leq 1$ den F (en büyük) $= 2 \cos \frac{\gamma}{2}$ bulunur.

O zaman,

$$\begin{aligned} \zeta (\text{en büyük}) &= \frac{c}{\sin \gamma} \cdot 2 \cos \frac{\gamma}{2} + c \\ &= c \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}} \right) \text{ dir} \end{aligned}$$

ve $\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 1$, yani $\frac{\alpha - \beta}{2} = 0$ ya da $\alpha = \beta$ için elde edilir.

Böylece $\alpha = \beta$, yeni üçgen ikizkenar iken çevresi en büyüktür. Bu üçgen için,

$$a = \frac{c}{2 \sin \frac{\gamma}{2}} = b$$

bulunur.

Soru 7:

$f(x) = \tan x + \cot x$, $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ fonksiyonunun en büyük değerini ve bu değeri aldığı noktayı bulunuz.

Çözüm:

I. yol: $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ise $\tan x < 0$ ve $\cot x < 0$ olur. O zaman $f(x) < 0$ dir.

Dolayısıyla $f(x) = \tan x + \cot x = -|\tan x + \cot x|$

$$\begin{aligned} &= -\sqrt{(\tan x + \cot x)^2} \\ &= -\sqrt{(\tan x - \cot x)^2 + 4 \tan x \cot x} \\ &= -\sqrt{(\tan x - \cot x)^2 + 4} \leq -2 = f(\text{en büyük}) \end{aligned}$$

olur. Eşitlik $\tan x = \cot x$, yani $\tan^2 x = 1$ veya $\tan x = -1$; $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ için elde edilir. Buradan,

$$x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \text{ bulunur.}$$

II. yol:

$$\begin{aligned} f(x) = \tan x + \cot x &= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x \cos x} \\ &= \frac{2}{\sin 2x} \text{ dir.} \end{aligned}$$

$2x \in (\pi, 2\pi)$ den $-1 \leq \sin 2x < 0$ ve $f(x) = \frac{2}{\sin 2x} \leq \frac{2}{-1} = -2 = f(\text{en büyük})$ bulunur.

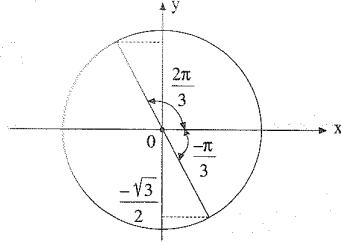
Bu değer $\sin 2x = -1$; $2x \in (\pi, 2\pi)$ için elde edilir. Bu da

$$2x = \frac{3\pi}{2}, \text{ yani } x = \frac{3\pi}{4} \text{ olduğunu gösterir.}$$

Soru 8:

$f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x$; $x \in [0, \pi]$ fonksiyonunun ekstremum değerlerini bulunuz.

Çözüm:



(Şekil-5)

Daha genel olarak, $f(x) = a \sin x + b \cos x$; (a, b ve her ikisi de birden sıfıra eşit olmayan) fonksiyonunu inceleyelim.

$f(x)$ fonksiyonunu sabitler $\sqrt{a^2 + b^2}$ ile çarpıp, bölelim:

$$f(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right)$$

olur.

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} \quad \text{ve}$$

$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ve $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ olacak biçimde α açısı vardır. Gerçekten,

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$$

dir.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{a^2 + b^2} (\sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \alpha) \quad \text{dir.} \end{aligned}$$

Dolayısıyla $f(x)$ in ekstremum değerlerini bulmak, $\sin(x + \alpha)$ fonksiyonunu sınırlama sorusuna dönüşüyor.

Şimdi ise Soru 8'in çözümüne geçelim:

$$a = 1, b = -\sqrt{3} \quad \text{durumu}$$

Dolayısıyla

$$f(x) = 2 \left(\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right)$$

$$= 2 \left(\sin x \cos \frac{\pi}{3} - \cos x \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \quad \text{dir.}$$

$x \in [0, \pi]$ den $x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \pi - \frac{\pi}{3} \right]$ ve $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \leq 1$ bulunur.

Dolayısıyla, $-\sqrt{3} \leq f(x) \leq 2$ dir.

Böylece, f (en büyük) = 2 dir. ve bu değer $\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = 1$, yani $x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ veya $x = \frac{5\pi}{6}$ için elde edilir; f (en küçük) = $-\sqrt{3}$ ve bu değer $\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, yani $x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$ ya da $x = 0$ için elde edilir.

Soru 9:

$f(x) = \frac{1}{\cos^8 x} + \frac{1}{\sin^8 x}$ fonksiyonunun en küçük değerini ve bu değeri aldığı noktayı bulunuz.

Çözüm:

$$x \neq k \frac{\pi}{2}, \quad k = x, \mp 1, \mp 2, \mp 3, \dots$$

olduğu açıktır. $u^2 + v^2 = (u+v)^2 - 2uv$ özdeşliğini iki defa uygularsak,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin^8 x + \cos^8 x}{\sin^8 x \cos^8 x} = \frac{(\sin^4 x)^2 + (\cos^4 x)^2}{\sin^8 x \cos^8 x} \\ &= \frac{(\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2 \sin^4 x \cdot \cos^4 x}{\sin^8 x \cos^8 x} \\ &= \frac{[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x]^2 - 2 \sin^4 x \cdot \cos^4 x}{\sin^8 x \cos^8 x} \\ &= 2^8 \cdot \frac{[1 - \frac{1}{2} (2 \sin x \cdot \cos x)]^2 - \frac{1}{8} (2 \sin x \cdot \cos x)^4}{(2 \sin x \cos x)^8} \\ &= 2^8 \cdot \frac{(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x)^2 - \frac{1}{8} \sin^4 2x}{\sin^8 2x} \\ &\geq 2^8 \cdot \frac{(1 - \frac{1}{2} \cdot 1)^2 - \frac{1}{8} \cdot 1}{1} = 32 \end{aligned}$$

bulunur. (Eşitsizlik kesrin payını küçülterek ve paydasını büyültürük elde edilmiştir.)

Dolayısıyla f (en küçük) = 32 dir. Bu değer $\sin^2 2x = 1$, yani $\sin 2x = \mp 1$ için elde edilir.

Bu denklemin çözümleri:

$$2x = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \quad \text{veya} \quad x = (2n + 1) \frac{\pi}{4}, \quad n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots \quad \text{noktalarını verir.}$$

Aşağıdaki soruların çözümlerini de okuyucuya alıştırma olarak bırakıyoruz:

Soru 10:

Bir kenarı a ve çevresi $2p$ olan üçgenlerden hangisinin alanı en büyüktür ve bu değer a nın hangi değeri için elde edilir.

Soru 11:

Bir üçgenin iki kenarının uzunlukları toplamı k ve bu kenarlar arasındaki açı γ ise, bu üçgenin çevresi en küçük iken kenarlarının uzunlukları nedir?

Soru 12:

Bir üçgenin bir açısı γ ve bu açıdan çıkan yükseklik h olsun. Bu üçgenin alanı en küçük iken, kenarları nedir?

Soru 13:

$f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$ fonksiyonunun ekstremum değerlerini ve ekstremum noktalarını bulunuz.