1 Ocak'tan 1 Şubat'a kadar 3 gün

Toplam 29 günlük bir artış söz konusudur.

Bunun ortalaması $\frac{29}{11} = 2,6$ gündür.

Bu artış formüle edilmeye çalışılırsa m 1'den 11'e kadar değiştiğinde $[2,6m-0,2]-2$ fonksiyonu aynı artmayı vercektir. (Bu formül Reverend Zeller tarafından deneme yanılma yolu ile bulunmuştur.) Dolayısıyla N yılının m ayının ilk günü

$$d_N + [2,6m-0,2] - 2$$

ifadesinin $(mod\ 7)$'ye göre negatif olmayan en küçük kalanı olarak ifade edilecektir.

N yılının m ayının k'ıncı gününe W dersek, W'yı bulmak içinde aynı ayın ilk gününü veren formüle $k-1$ ekleriz. Buna göre

$$W \equiv k+[2,6m-0,2]-2C+Y+[C/4]+[Y/4](\bmod 7)$$

olarak elde edilir ki bu formül bize Gregorian takviminde herhangi bir tarihin hangi güne geldiğini verir. Örneklendirirsek;

<u>**Örnek 1:**</u> 11 Mart 1996

$$\begin{aligned}
k &= 11 \quad m=1 \quad C=19 \quad Y=96\\
W &\equiv 11+[2,6.1-0,2]-2.19+96+[19/4]\\
&\quad +[96/4] \pmod 7\\
W &\equiv 11+[2,4]-38+96+4+24 \pmod 7\\
W &\equiv 1 \pmod 7
\end{aligned}$$

O halde 11 Mart 1996 Pazartesi'dir.

<u>**Örnek 2:**</u> 20 Temmuz 1969 (Aya ilk insanın çıktığı gün)

$$\begin{aligned}
k &= 20 \quad m=5 \quad C=19 \quad Y=69\\
W &\equiv 20+[2,6.5-0,2]-2.19+69+[19/4]\\
&\quad +[69/4] \pmod 7\\
W &\equiv 20+12-38+69+4+17 \pmod 7\\
W &\equiv 84 \pmod 7\\
W &\equiv 0 \pmod 7
\end{aligned}$$

Pazar günü bulunur.

KAYNAKÇA

1. K.Rosen; Elementary Number Theory and Its Applications
Addison Wesley 1988

2. J.Uspensky and M.A.Heaslet Elementary Number Theory
McGraw - Hill NewYork, 1935.

GAUSS TOPLAMLARI ÜZERİNE

Emre Alkan *

$S_k(n) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$ ifadesine $k \geq 1$ tamsayısı için mertebesi k olan Gauss toplamı denildiğini biliyoruz.

$$\begin{aligned}
S_1(n) &= n(n+1)/2,\\
S_2(n) &= n(n+1)(2n+1)/6,\\
S_3(n) &= S_1^2(n), \cdots
\end{aligned}$$

olduğunu hepimiz bilmekteyiz. Burada kendi başına ilginç olan soru, k sabitlendiğinde, $S_k(n)$ ifadesini n'in bir fonksiyonu olarak elde etmektir. İsabetli bir tahmin $S_k(n)$'in n'e göre derecesi $k+1$ olan bir polinom olacağıdır. Fakat bu polinomun katsayılarını açık seçik bulmak olanaklı mı? Bu yazıda polinomun katsayılarının Bernoulli sayılarıyla ilgisini kurup, Gauss toplamlarının bazı özelliklerine değineceğiz.

$\frac{x}{e^x-1}$ fonksiyonunun $x=0$ civarında Taylor serisine açılımına düşünelim. Pratikte bu açılımı şöyle elde ederiz.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

* Boğaziçi Üniversitesi Matematik Bölümü Öğrencisi

olduğundan, bu kuvvet serisini bir polinom gibi düşünerek bir polinom bölmesi yaparız. Elde edilen açılım geleneksel olarak,

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{1}{2}x+\frac{B_1}{2!}x^2-\frac{B_2}{4!}x^4+\frac{B_3}{6!}x^6-\cdots$$

olarak yazılmakta ve B_k sayılarına Bernoulli sayıları denmektedir. Bu açılımda x'in tek kuvvetlerin katsayısı x^1 hariç sıfırdır. Bunun nedeni ise $\frac{x}{2}+\frac{x}{e^x-1}$ fonksiyonunun çift bir fonksiyon olmasıdır. (Aslında bazı yazarlar sıfırı da bir Bernoulli sayısı olarak kabul ederler.) Eşdeğer olarak $\beta_0=1, \beta_1=-\frac{1}{2}, \beta_{2k+1}=0$ ve $\beta_{2k}=(-1)^{k-1}B_k$ olmak üzere,

$$\frac{x}{e^x-1}=\beta_0+\frac{\beta_1}{1!}x+\frac{\beta_2}{2!}x^2+\frac{\beta_3}{3!}x^3+\cdots$$

yazabiliriz. n pozitif tamsayısı için $e^{nx}-1=nx+\frac{n^2x^2}{2!}+\frac{n^3x^3}{3!}+\cdots$ olduğunu gözönüne olarak

$$\frac{x(e^{nx}-1)}{e^x-1}=x(1+e^x+e^{2x}+\cdots+e^{(n-1)x})$$

ifadesine bakalım. Sonlu sayıda fonksiyon olduğundan $1+e^x+\cdots+e^{(n-1)x}$ ifadesinin Taylor serisi herbirinin Taylor serileri toplamıdır. Böylece

$$1+e^x+\cdots+e^{(n-1)x}=\sum_{k=0}^{\infty}(1^k+2^k+\cdots+(n-1)^k)\frac{x^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}S_k(n-1)\frac{x^k}{k!}$$

elde edilir. Dolayısıyla katsayılar Gauss toplamları ile ilgilidir. Kolayca görüleceği gibi $S_k(n-1), k!\frac{x(e^{nx}-1)}{e^x-1}$ ifadesinin Taylor açılımında x^{k+1}'in katsayısıdır. Öte yandan

$$k!\frac{x(e^{nx}-1)}{e^x-1}=k!\frac{x}{e^x-1}(e^{nx}-1)=k!(\beta_0+\frac{\beta_1}{1!}x+\frac{\beta_2}{2!}x^2+\cdots)\cdot(nx+\frac{n^2x^2}{2!}+\frac{n^3x^3}{3!}+\cdots)$$

yazılabilir. Burada iki kuvvet serisinin çarpımı elde edilmiştir. Bu serilerin Cauchy çarpımıdır ve x^n'in katsayısı, $\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$ şeklinde verilir. Bunu pratikte şöyle değerlendirebiliriz. $(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots)$ ifadesinde x^n terimini elde etmek için ilk parantezden a_0 ikincisinden b_nx^n veya birinciden a_1x, ikinciden $b_{n-1}x^{n-1}\cdots$ şeklinde devam ederiz. Böylece x^n'in katsayısı verilen şekilde olur. x^{k+1} elde etmek için ilk parantezden $\frac{\beta_r}{r!}x^r$, ikinci parantezden $\frac{n^{k+1-r}}{(k+1-r)!}x^{k+1-r}$ alırız. Burada $r=0,1,\cdots,k$ olur ($r=k+1$ olamaz çünkü ikinci serinin sabit terimi yoktur.) Öyleyse bu durumda da x^{k+1}'in katsayısı,

$$k!\sum_{r=0}^{k}\frac{\beta_r}{r!}\frac{n^{k+1-r}}{(k+1-r)!}=\sum_{r=0}^{k}\frac{1}{k+1-r}\frac{k!}{r!(k-r)!}\beta_rn^{k+1-r}=\sum_{r=0}^{k}\frac{1}{k+1-r}\binom{k}{r}\beta_rn^{k+1-r}$$

x^{k+1} katsayısını iki farklı şekilde elde ettik, Böylece $S_k(n-1)$ ve hemen

$$S_k(n)=\sum_{r=0}^{k}\frac{1}{k+1-r}\binom{k}{r}\beta_r(n+1)^{k+1-r}$$

elde ederiz. Hemen görüldüğü gibi bu ifade n'ye göre derecesi $k+1$ olan bir polinomdur. Üstelik bu polinomun katsayıları β_r sayılarına, yani Bernoulli sayılarına bağlıdır.

Bundan sonra $S_k(n)$ ifadesini p asal bir sayı olmak üzere $(mod\ p)$ 'de inceleyeceğiz. Bunun için sadece, $S_k(p-1)=1^k+2^k+\cdots+(p-1)^k$ ifadesini $(mod\ p)$'de incelemek yeterlidir. Z_p çarpma işlemine göre çembersel bir gruptur. Böylece g bir ilkel kök olmak üzere,

$$S_k(p-1)\equiv 1+g^k+g^{2k}+\cdots+g^{(p-2)k}=\frac{g^{(p-1)k}-1}{g^k-1}\ (mod\ p)\quad \text{ve } g^k-1\equiv j\ (mod\ p)$$

olsun. $p-1|k$ ise $j\equiv 0\ (mod\ p), p-1\nmid k$ ise $j\not\equiv 0\ (mod\ p)$ olur çünkü g bir ilkel köktür. Öte yandan $g^{(p-1)k}-1\equiv 0\ (mod\ p)$ olduğundan $S_k(p-1)j\equiv 0\ (mod\ p)$ olur. $p-1\nmid k$ ise $j\not\equiv 0\ (mod\ p)$ olduğundan $S_k(p-1)\equiv 0\ (mod\ p)$ olmalıdır. $p-1|k$ ise, de Fermat Teoremiyle $S_k(p-1)\equiv p-1\equiv -1$ $(mod\ p)$ olur. Sonuç olarak şunu elde etmiş olduk;

$$S_k(p-1)\equiv\begin{cases}0, & p-1\nmid k\\ -1, & p-1|k\end{cases}\quad (mod\ p)$$

Böylece $S_k(n)$ ifadesini $(mod\ p)$'de elde etmek için $1^k+2^k+\cdots+m^k$, $1\le m<p-1$ şeklindeki bir ifadeyi $(mod\ p)$'de bulmak yeterlidir. Burada m,n'in p ile bölümünden kalandır. Şimdi şu sonucu göstereceğiz.

Yardımcı Teorem: $a_1,a_2,\cdots,a_j$ uygun rasyonel sayılar olmak üzere,

$$S_1^k(n)=a_1S_k(n)+a_2S_{k+2}(n)+\cdots+a_jS_{2k-1}(n),\quad k\quad \text{tek ise},$$

$$S_1^k(n)=a_1S_{k+1}(n)+a_2S_{k+3}(n)+\cdots+a_jS_{2k-1}(n)\quad k\quad \text{çift ise},$$

$$S_1^k(n)S_2(n)=a_1S_{k+2}(n)+a_2S_{k+4}(n)+\cdots+a_jS_{2k+2}(n)\quad k+1\quad \text{tek ise},$$

$$S_1^k(n)S_2(n)=a_1S_{k+1}(n)+a_2S_{k+3}(n)+\cdots+a_jS_{2k+2}(n)\quad k+1\quad \text{çift ise},$$

eşitlikleri geçerlidir.

Kanıt: Önce bazı somut örnekler ele alalım. $k=1$ için yapacak bir şey yok $k=2$ için $S_1^2(n)=S_3(n)$ olduğunu biliyoruz. $k=3$ için $S_1^3(n)=a_1S_3(n)+a_2S_5(n)$ olacak şekilde a_1,a_2 rasyonel sayıları bulalım. Bunun için en sağlam yol $S_1^3(n+1)=a_1S_3(n+1)+a_2S_5(n+1)$ olduğunu gözönüne alarak,

$$S_1^3(n+1)-S_1^3(n)=a_1(S_3(n+1)-S_3(n))+a_2(S_5(n+1)-S_5(n))$$

bir polinom özdeşliği elde etmektir. Burada n bağımsız değişken gibi düşünülmektedir. Buradan

$$\frac{1}{8}((n+2)^3(n+1)^3-(n+1)^3n^3)=a_1(n+1)^3+a_2(n+1)^5$$

ve kolayca $(n+2)^3-n^3=8a_1+8a_2(n+1)^2$ ve $a_1=\frac{1}{4},a_2=\frac{3}{4}$ bulunur. Burada $a_1+a_2=1$ olduğuna dikkat edelim. Şimdi $S_1^3(n)=\frac{1}{4}S_3(n)+\frac{3}{4}S_5(n)$ olduğunu tümevarımla gösterebiliriz. $n=1$ için $1=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}(a_1+a_2=1$ olması tümevarımın başlangıcını sağlıyor). Tümevarım adımı ise sağladığımız özdeşlikten dolayı hemen yapılabilir. Okuyucu $k=4$ için benzer bir yol izleyerek

$$S_1^4(n)=\frac{1}{4}S_5(n)+\frac{1}{2}S_7(n)$$

olduğunu bulabilir. Şimdi genel olarak , k tek ise,

$$S_1^k(n)=a_1S_k(n)+a_2S_{k+2}(n)+\cdots+a_jS_{2k-1}(n)$$

alarak (k çift durumu okuyucuya bırakılmıştır),

$$S_1^k(n+1)=a_1S_k(n+1)+\cdots+a_jS_{2k-1}(n+1)$$

ve böylece

$$S_1^k(n+1)-S_1^k(n)=a_1(S_k(n+1)-S_k(n))+a_2(S_{k+2}(n+1)-S_{k+2}(n))+\cdots+a_j(S_{2k-1}(n+1)-S_{2k-1}(n)).$$

$$\frac{1}{2^k}((n+2)^k(n+1)^k-(n+1)^kn^k)=a_1(n+k)^k+a_2(n+1)^{k+2}+\cdots+a_j(n+1)^{2k-1}$$

ve hemen,

$$(n+2)^k-n^k=2^ka_1+2^ka_2(n+1)^2+\cdots+2^ka_j(n+1)^{k-1}$$

Eğer bu özdeşliği sağlayan $a_1, a_2, \cdots, a_j$ rasyonel sayıları bulunabiliyorsa, her iki tarafın sabit terimleri karşılaştırılarak $a_1 + a_2 + \cdots + a_j = 1$ elde ederiz. Dolayısıyla,

$$S_1^k(n) = a_1 S_k(n) + a_2 S_{k+2}(n) + \cdots + a_j S_{2k-1}(n)$$

$n = 1$ için sağlanır ve tümevarımla tüm n'ler için doğru olur. Böylece söz konusu eşitliklerin olabilmesi $a_1, a_2, \cdots, a_j$'nin bulduğumuz polinom özdeşliğinden belirlenebilmesine bağlıdır. k tek olduğu için,

$$2^k a_1 + 2^k a_2 (n+1)^2 + \cdots + 2^k a_j (n+1)^{k-1} = (n+2)^k - n^k = (n+1+1)^k - (n+1-1)^k$$

$$= 2\binom{k}{k} + 2\binom{k}{k-2}(n+1)^2 + \cdots + 2\binom{k}{3}(n+1)^{k-3} + 2\binom{k}{1}(n+1)^{k-1}$$

yazarak

$$a_1 = \frac{1}{2^{k-1}}, a_2 = \frac{1}{2^{k-1}}\binom{k}{k-2} = \frac{1}{2^{k-1}}\binom{k}{2}, \cdots, a_j = \frac{k}{2^{k-1}}$$

Böylece $a_1, a_2, \cdots, a_j$ rasyonel sayılarını da belirlemiş oluyoruz. Sonuç olarak k tek iken,

$$S_1^k(n) = \frac{1}{2^{k-1}} S_k(n) + \frac{1}{2^{k-1}}\binom{k}{2} S_{k+2}(n) + \cdots + \frac{k}{2^{k-1}} S_{2k-1}(n)$$

elde ederiz. Benzer şekilde k çift iken,

$$S_1^k(n) = \frac{k}{2^{k-1}} S_{k+1}(n) + \frac{1}{2^{k-1}}\binom{k}{3} S_{k+3}(n) + \cdots + \frac{k}{2^{k-1}} S_{2k-1}(n)$$

olduğuda görülebilir.

Buradan şu sonuç da çıkarılabilir. Her $k > 1$ tek sayısı için $S_k(n)/S_1^2(n)$ ifadesi $S_1(n)$'in rasyonel katsayılı bir polinomu olarak ifade edilebilir. Bunun kanıtını fazla uzatmamak amacıyla, bir özel durumda isteneni görelim. Genel halde de aynı yol izlenir. $k = 9$ için $S_9(n)/S_1^2(n)$ ifadesini istenen biçimde yazalım. Yazım kolaylığı için $S_k(n) \equiv S_k$ alacağız. Elde ettiğimiz eşitliklerden,

$$S_1^5 = \frac{1}{16} S_5 + \frac{5}{8} S_7 + \frac{5}{16} S_9, \tag{1}$$

$$S_1^4 = \frac{1}{2} S_5 + \frac{1}{2} S_7, \tag{2}$$

$$S_1^3 = \frac{1}{4} S_3 + \frac{3}{4} S_5, \tag{3}$$

$$S_1^2 = S_3 \quad (4) \tag{4}$$

yazılabilir. (1)'den $S_9 = \frac{16}{5} S_1^5 - \frac{1}{5} - 2S_7$, (2)'den $S_7 = 25_1^4 - S_5$ yazılıp yerine konursa $S_9 = \frac{16}{5} S_1^5 - 4S_1^4 + \frac{9}{5}$ (3)'den $S_5 = \frac{4}{3} S_1^3 - \frac{1}{3} S_3$ yerine konursa ve (4) kullanılırsa, $S_9 = \frac{16}{5} S_1^5 - 4S_1^4 + \frac{12}{5} S_1^3 - \frac{3}{5} S_1^2$ ve eşdeğer olarak,

$$S_9/S_1^2 = \frac{16}{5} - 4S_1^2 - 4S_1^2 + \frac{12}{5} S_1 - \frac{3}{5}$$

yazılabilir.

$k+1$ tek ise ilk kısımdaki gibi

$$(2n+3)(n+2)^{k+1} - (2n+1)n^{k+1} = 6.2^k a_1 (n+1) + 6.2^k a_2 (n+1)^3 + \cdots + 6.2^k a_j (n+1)^{k+1}$$

elde ederiz. Sol taraf $2(n+1)[(n+2)^{k+1} - n^{k+1}] + (n+2)^{k+1} + n^{k+1}$ şeklinde yazılıp $n+1$'in kuvvetleri şeklinde düzenlenirse katsayılar hemen,

$$a_1 = \frac{1}{6.2^{k-1}}\left[2\binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1}\right],$$